Dr Kchaou borhen

Section MP2-PT2-PC2

SERIE N° 1
ELECTROSTATIQUE

Exercice 1 : symétries

On donne ci-dessous diverses distributions de charges présentant des symétries. Donner dans chaque cas : - Le système de coordonnées qu'on doit utiliser ?- La direction du champ crée ? - Les coordonnées dont dépend ce champ ?

a- Sur un fil infini.
b- Sur une spire circulaire.
c- Sur un plan infini.
d- Sur une sphère uniformément chargé en volume.

Exercice 2 :

A- Sphère creuse

Soit une sphère creuse de rayon R, portant une charge répartie uniformément avec une densité superficielle σ (Figure 1) :

Figure 1

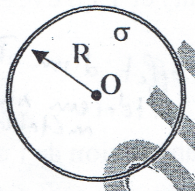
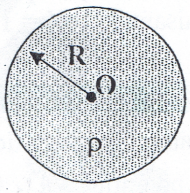


Figure 2



1- Calculer : le potentiel créé par cette sphère en un point M à la distance r (r = OM) du centre O de la sphère à partir de l'équation de Laplace. En déduire le champ électrique $\vec{E}$ en M ? Conclusion.
2- Retrouver ces résultats par application du théorème de Gauss.

B- sphère pleine

On considère maintenant la sphère conductrice de centre O de rayon R uniformément chargée avec une densité volumique ρ positive (Figure 2).

1- Déterminer le champ électrique $\vec{E}(r)$ créé par la sphère pleine, en un point M (OM = r) à l'aide du théorème de Gauss dans les deux cas ($r \geq R$ et $r \leq R$).
2- En déduire le potentiel électrique au point M.
a- À partir de $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$.
b- À partir de l'équation de Poisson.

Exercice 2 : Potentiel de Yukawa

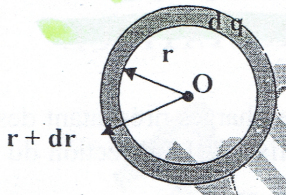
Un point quelconque de l'espace est défini par son vecteur position $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$. Une distribution de charge crée en M le potentiel :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r}\,\exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad \text{(Potentiel de Yukawa)}$$

Où **q** et **a** sont des constantes positives respectivement homogènes à une charge et à une distance.

1- Calculer le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ sortant d'une sphère de centre O et de rayon r.
2- On déduire que le potentiel étudié est créé par une charge ponctuelle q_1 placée en O et par une charge répartie Q'(r) dans l'espace dont on déterminera leurs expressions respectives.
3- Déterminer l'expression de la densité volumique ρ (r) de la charge répartie dans l'espace par :
a- Méthode directe
b- À partir de l'équation de Poisson.
4- On considère la charge répartie entre les sphères de centre O et de rayon r et r + dr.
On la note dq = f(r) dr

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés. 1 mahdystudies.tn



a- Déterminer l'expression de la fonction f(r)
b- Etudier le comportement aux limites de la fonction f(r) lorsque "r " tend vers zéro ou l'infini (∞)
c- Montrer qu'elle admet un extremum pour une valeur de r qu'on déterminera.
d- Interpréter physiquement cette fonction f(r) ainsi que son extremum.

5- Définir la notion d'énergie potentielle d'une charge ponctuelle ; et déterminer son expression pour la charge ponctuelle se trouvant en O, en présence de la charge volumique ρ (r) répartie dans l'espace.

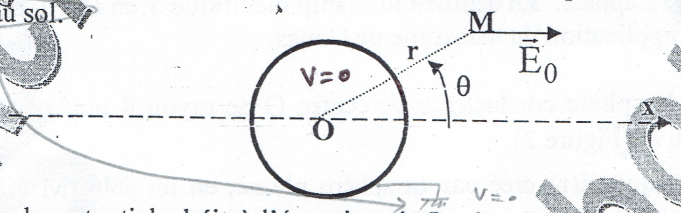
6- Le potentiel de Yukawa fut une tentative de modélisation électrostatique de l'atome d'hydrogène et de la délocalisation de la charge de son électron. Que représentent, dans le cadre de ce modèle, la charge ponctuelle en O et la charge volumique répartie dans l'espace ? le rayon et l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène valant respectivement $0{,}529\ 10^{-10}$ m (rayon de Bohr) et 13,6 eV, en quoi ce modèle n'est–il pas satisfaisant ? ($1eV = 1{,}6\ 10^{-19}$ J)

Exercice 3: sphère métallique dans un champ uniforme

effet d'un champ électrique extérieur sur une sphère métallique

1- On crée un champ électrostatique uniforme $\vec{E}_0$ parallèle à Ox dans une région de l'espace. Quelle est l'expression du potentiel V_0 (r,θ) correspondant, en un point M tel que r = OM et θ = (Ox, OM), sachant que $V_0 = 0$ pour le plan x = 0.

2- Dans le champ précédent, on introduit une sphère métallique de centre O et de rayon R reliée électriquement au sol.



Dans tout l'espace, le potentiel obéit à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$; ici, V ne dépendant que de r et de θ, l'équation $\Delta V = 0$ s'écrit : $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right] = 0$

On se propose de chercher des solutions de la forme $V(r,\theta) = f(r)\ \cos\theta + V_1$ où V_1 est une constante.

a- Déterminer l'équation différentielle de f(r)
b- En déduire l'expression de la fonction f(r) à l'aide de deux constantes C et D
c- Déterminer, à l'aide des conditions aux limites les deux constantes C et D ainsi V_1

3- En déduire que le champ $\vec{E}_{ext}(r \geq R, \theta)$ à l'extérieur de la sphère est la somme du champ $\vec{E}_0$ et du champ d'un dipôle $\vec{E}_{dip}$ dont on donnera le moment dipolaire $\vec{p}$.

4- Calculer $\sigma(\theta)$ la densité superficielle de charges sur la sphère, ainsi que la charge électrique totale de celle-ci.

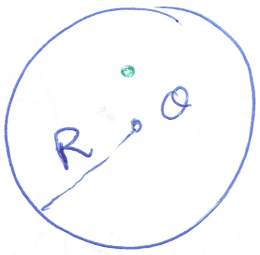
© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Serie

Ex1

Ex2

$$\oiint \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$



$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} 0 & ; r<R \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & r>R \end{cases}$$

$E(r) = 0 \quad r<R$;

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad ; r>R$$

$$Q = \sigma\, 4\pi R^2$$

- $$\oiint \vec{E}\,\vec{dS} = \iiint \operatorname{div}\vec{E}\, d\tau = \frac{\iiint \rho\, d\tau}{\varepsilon_0}$$

$$\overrightarrow{grad} = \vec{\nabla} : \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \qquad div = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Donc $\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ Maxwell – Gauss.

ou $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$; $\operatorname{div}(-\overrightarrow{grad}V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$ Poisson

$\rho = 0$, $\Delta V = 0$. Laplace

$$\text{div}\left[(\text{grad})V\right] = \Delta V(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(rV(r)\right) = 0$$

$V(r) = ??$

$r \leq R$;

$$\frac{d}{dr}\left(rV(r)\right) = C_1$$

$$rV(r) = C_1 r + C_2$$

$$V_{int}(r) = C_1 + \frac{C_2}{r}$$

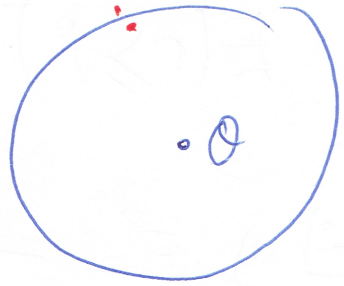
$r \geq R$ $\quad V_{ext}(r) = C_3 + \frac{C_4}{r}$

- $\lim_{r \to 0} V_{in}(r) = \frac{C_2}{0} + C_1 = \infty \Rightarrow C_2 = 0$
- $\lim_{r \to \infty} V_{ext}(r) = C_3 + \frac{C_4}{\infty} = C_3 = 0$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\begin{cases} V_{int}(r) = C_1 \\ V_{ext}(r) = \dfrac{C_4}{r} \end{cases}$$

$$V_{int}(R^-) = V_{ext}(R^+) \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{C_4}{R}}$$



- $\vec{E}_{ext} - \vec{E}_{int} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_r$

$$\left(-\frac{dV_{ext}}{dr}\right)_{r=R^+} - \left(-\frac{dV_{int}}{dr}\right)_{r=R^-} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{C_4}{R^2} - 0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0};$$

$$\boxed{C_4 = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}}$$

B)

$$Q_{int}(r \leq R) = \rho \frac{4\pi r^3}{3}$$



$$Q_{int}(r \geqslant R) = \rho \frac{4\pi R^3}{3}$$

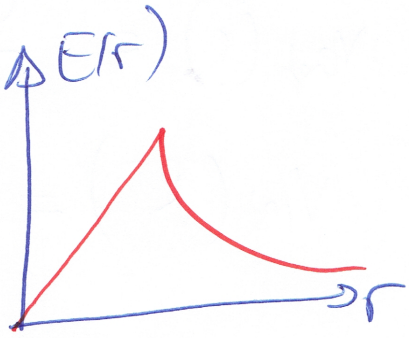
$$Q = \iiint \rho \left(r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr\right)$$

$$\Phi = \oiint \vec{E} \, d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r).$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$4\pi r^2 E(r) = \Phi = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$$



$$E(r \leq R) = \frac{\rho r}{3\varepsilon}$$

$$E(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon r^2}$$

2) a) $\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V = -\frac{dV(r)}{dr}\vec{e_r}$

$$V(r) = -\int E(r)\,dr$$

$$V_{int} = -\frac{\rho}{3\varepsilon}\int r\,dr$$

$$V_{ext} = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon}\int \frac{dr}{r^2}$$

b) $\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rV(r)) + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0$

$r \leq R$ $\quad \frac{d^2}{dr^2}(rV(r)) = -\frac{\rho r}{\varepsilon}$

$$\frac{d}{dr}(rV(r)) = -\frac{\rho r^2}{2\varepsilon} + C_1 \quad (4)$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$r V(r) = -\frac{\rho r^3}{6\varepsilon_0} + C_1 r + C_2$$

$$V_{int}(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C_1 + \frac{C_2}{r}$$

⊙ $\rho = 0$



$\underline{r \geq R}$ $\quad V_{ext} = C_3 + \frac{C_4}{r}$

or $r \to \infty$; $\quad \frac{C_2}{0} = \infty \Rightarrow C_2 = 0$

or $r \to \infty$, $\quad V_{ext} = 0 = C_3$

$$\begin{cases} V_{int} = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C_1 \\ V_{ext} = \frac{C_4}{r} \end{cases}$$

$$C_1 + \left(-\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}\right) = \frac{C_4}{R}$$

* $\vec{E}_{ext}(R^+) - \vec{E}_{int}(R^-) = \vec{0}$

$$\left(-\frac{dV_{ext}(r)}{dr}\right)_{R^+} = \left(-\frac{dV_{int}(r)}{dr}\right)_{R^-}$$

(5)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Exercice 3

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}\exp\left(\frac{-r}{a}\right), \quad \varepsilon_0 = F.m^{-1}$$

$$C = \frac{\varepsilon S}{e}$$

1) $\Phi = \iint \vec{E}\,\vec{dS} = 4\pi r^2 E(r)$

ϕ

$$E(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\exp\left(\frac{-r}{a}\right)\right)$$

$$= \frac{-q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r^2}e^{-r/a} + \frac{1}{r}\left(-\frac{1}{a}\right)e^{-r/a}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\left(1 + \frac{r}{a}\right)e^{-r/a}$$

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r)$$

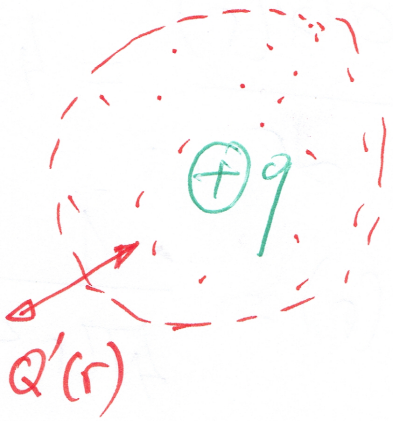
$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(1+\frac{r}{a}\right)\exp\left(\frac{-r}{a}\right) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$$

(6)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$V(r) = V_q(\theta) + V'(r)$$

$$Q(r) = q_{en\,\theta} + Q'(r)$$

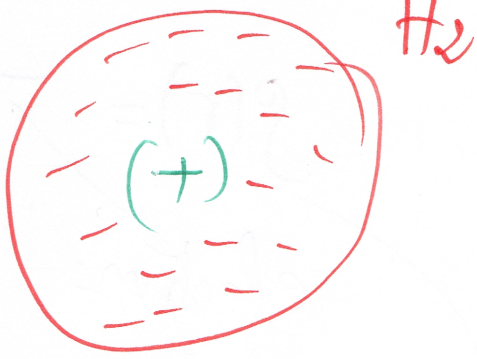


$$\Rightarrow Q(r) = \sum \Phi$$

$$Q(r) = q\left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

$$\lim_{r \to 0} Q(r) = q$$

$$\lim_{r \to +\infty} Q(r) = 0 \Rightarrow \exists\, Q'(r)$$



$$\lim_{r \to +\infty} Q'(r) = -q$$

$$Q'(r) = Q(r) - q$$

$$= q\left[\left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a} - 1\right]$$

3) $$Q'(r) = \iiint \rho(r)\, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$Q'(r) = 4\pi \int r^2 \rho(r)\, dr \qquad (7)$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\frac{dQ'(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dQ'(r)}{dr}$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d}{dr}\left(q\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-r/a} - q\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} q\left(\frac{1}{a}e^{-r/a} + \left(1+\frac{r}{a}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)e^{-r/a}\right)$$

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi r a^2}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

$r a^2$: m^3

$\rho(r)$: électrons → C/m^3

b) $\frac{1}{r}\frac{d^2(rV(r))}{dr^2} + \frac{\rho(r)}{\varepsilon} = 0$ (potentiel créé par la charge q')

$$V'(r) = V(r) - \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}$$

(8)

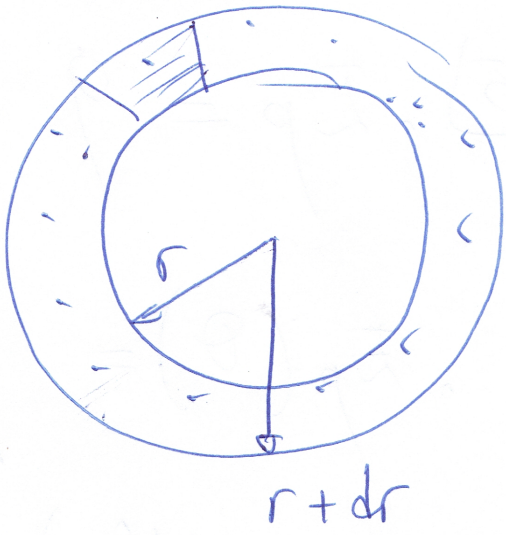
© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

4)

a) $\forall \theta, \forall \varphi$

$d^3q = \rho(r)\, d^3\tau$

$= \rho(r)\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$



$$\iiint d^3q = \int \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int \rho(r)\, dr\, r^2$$

$$dq = \left[4\pi r^2 \rho(r)\right] dr = f(r)\, dr$$

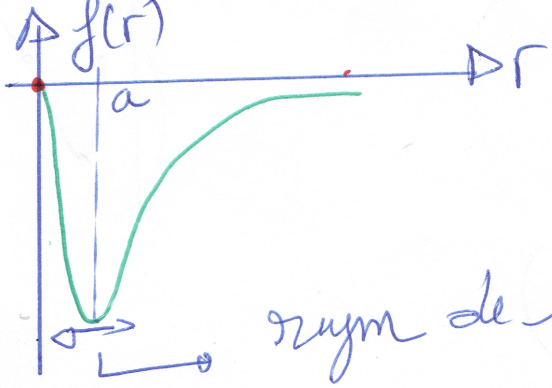
$$f(r) = 4\pi r^2 \rho(r) = -\frac{q\, r}{a^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

↳ C/m : densité de charge linéique

b) $f(r \to 0) = 0$; $f(r \to \infty) = 0$

$f'(r) = 0$

$r = a$



rayon de l'atome : rayon de Bohr

(9)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

5) . $E_p = q\,V(M)$ autre charge

. $E_p(0) = q\,V'(M \equiv O)$



$$V'(r) = V(r) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left[\exp\left(-\frac{r}{a}\right) - 1\right)$$

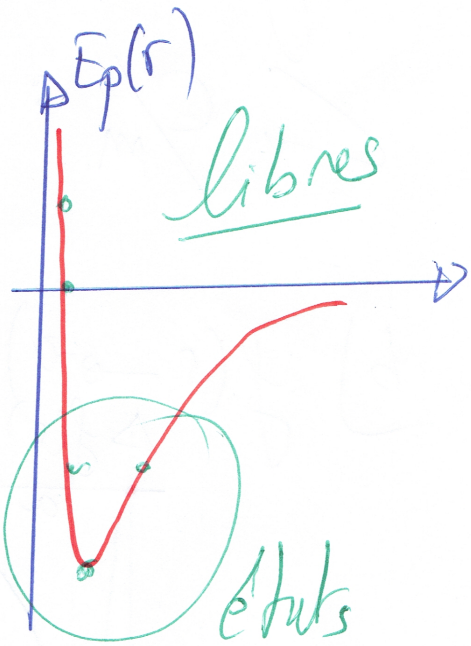
$$E_p(0) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\left(1 - \frac{r}{a}\right) - 1\right)$$

$r \to 0$

$e^x \simeq 1 + x$; $x \ll 1$

$$E_p = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

< 0



(10)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

q : proton $\quad a = 0{,}5\,\text{Å}$

Q(r) = électrons. $\quad E_i = 13{,}6\,eV$

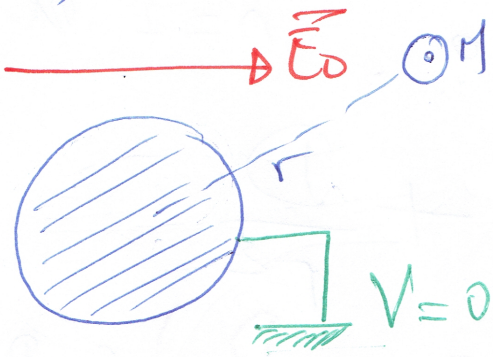
$$E_{ionisation} = -E_p = +\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = 27{,}2\,eV$$

Bohr : quantique

Exercice 3 $\longrightarrow \vec{E_0} = -\overrightarrow{grad}\, V_0$

1) $V_0(x=0)$ $\quad V_0 = -E_0 x = -E_0 r\cos\theta$

2)



$\Delta V(r,\theta) = 0$

$V(r,\theta) = f(r)\cos\theta + V_1$

- $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = f''(r)\cos\theta$
- $\frac{\partial V}{\partial r} = f'(r)\cos\theta$

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\sin\theta\right) = \frac{f(r)}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\sin^2\theta\right)$$

$$= -\frac{2}{r^2}f(r)\cos\theta \quad (11)$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\left[f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) - \frac{2f(r)}{r^2}\right] \cos\theta = 0 \quad \forall \theta$$

$$f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) - \frac{2}{r^2} f(r) = 0 .$$

b) $$f(r) = \sum c_n r^n$$

$$f'(r) = \sum n c_n r^{n-1}$$

$$f''(r) = \sum n(n-1) c_n r^{n-2}$$

$$(n-1)(n+2) = 0 \qquad n = 1 \text{ ou } n = -2$$

$$f(r) = Cr + \frac{D}{r^2}$$

c) $$V(r,\theta) = \left(Cr + \frac{D}{r^2}\right)\cos\theta + V_1$$

$$V\left(r \leq R ;\ \theta = \frac{\pi}{2}\right) = V_1 = 0$$



$$V(r \to \infty, \theta) = Cr\cos\theta = -E_0 r\cos\theta$$

effet $\vec{E}_0$

$$C = -E_0$$

(12)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$V(r=R;\theta) = 0 = \left(CR + \frac{D}{R^2}\right)\cos\theta$$

$$D = -CR^3 = +E_0 R^3$$

$$\Rightarrow V(r,\theta) = -E_0\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta$$

3) $\vec{E}_{ext} = -\overrightarrow{grad}\, V_{ext} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$

$$= +E_0\left(1 + \frac{2R^3}{r^3}\right)\cos\theta\,\vec{u}_r$$

$$-E_0\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\sin\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{E}_{ext} = E_0(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta)$$

$$+\frac{E_0 R^3}{r^3}(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{E}_{ext} = E_0\,\vec{e}_x + \vec{E}_{dipole}$$

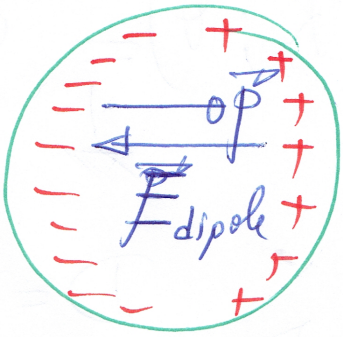
$$\vec{E}_{dipole} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta)$$

(13)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$\vec{E_0}$

$$Q = \iint \sigma(\theta) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$



$$\vec{E}_{ext} - \vec{E}_{int} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \vec{u_r}$$

$\vec{E}_{int} = \vec{0}$ $(r = R)$ Interface ö9ö

$$3 E_0 \cos\theta \, \vec{u_r} = \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon} \vec{u_r}$$

$$\sigma(\theta) = 3\varepsilon E_0 \cos\theta$$

$$Q = R^2 (2\pi) \int_0^{\pi} 3\varepsilon E_0 \cos\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$\left(\frac{\sin^2\theta}{2}\right)_0^{\pi} = 0$$

$Q = 0$ ⊥

(14)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.