Dr Kchaou borhen

Section MP2 - PC2 - PT2

MAGNETOSTATIQUE

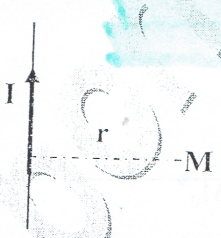
SERIE 1

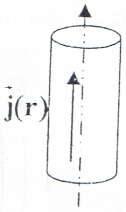
Exercice 1 :

1.Un fil rectiligne illimité, de section négligeable et coïncidant avec l'axe Oz est parcouru par un courant continu d'intensité I :

a- Déterminer par des considérations de symétrie la structure du vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$.

b- En appliquons le théorème d'Ampère déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ crée par le fil infini au point M à une distance $r = OM$.





2.On considère un cylindre d'axes Oz, de rayon R, de longueur infinie, parcouru par un courant dont la densité volumique en un point M situé à la distance r de l'axe Oz vaut :

$r < R \quad \vec{j} = j_0 \frac{r}{R} \vec{u}_z \qquad r > R \quad \vec{j} = \vec{0}$;

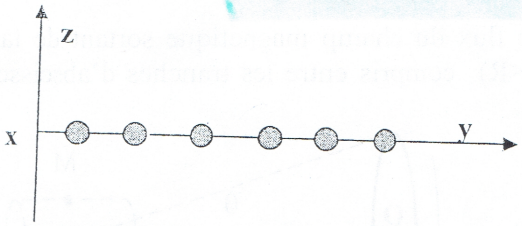
Etudier le champ magnétostatique $\vec{B}$ en tout point de l'espace en utilisant les lois :

a- Intégrées de la magnétostatique (Théorème d'Ampère).

b- Locales de la magnétostatique (Maxwell Ampère).

Exercice 2:

On considère une nappe, plane, infinie, de courants surfaciques, contenue dans le plan (x O y) avec une densité surfacique de courant uniforme $\vec{js} = js\,\vec{u}_x$.



1- Déterminer par des considérations de symétrie la structure du vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$.

Quelle relation relie $\vec{B}(z)$ à $\vec{B}(-z)$.

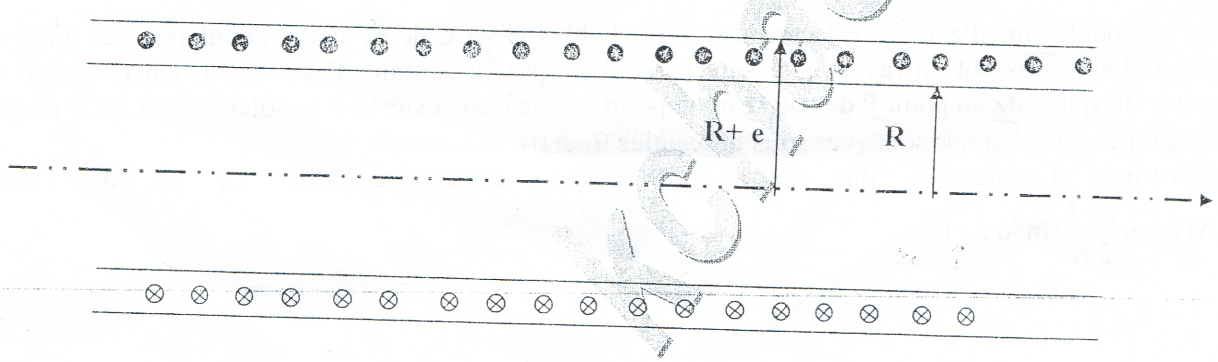
2- Déterminer $\vec{B}(M)$ en tout point de l'espace ($z > 0$; $z < 0$).

3- Etudier la continuité dc $\vec{B}(M)$ à la traversée de la nappe.

Exercice 3:

L'espace étant à un repère cylindrique, on considère la distribution volumique de courant suivante :

$r < R \quad \vec{j} = \vec{0}$; $\qquad r \in [R, R+e] \quad \vec{j} = j_0 \vec{u}_\theta$; $\qquad r > R+e \quad \vec{j} = \vec{0}$



© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

mahdystudies.tn

1- Justifier que le champ magnétique $\vec{B}$ est nul pour r > R+ e.

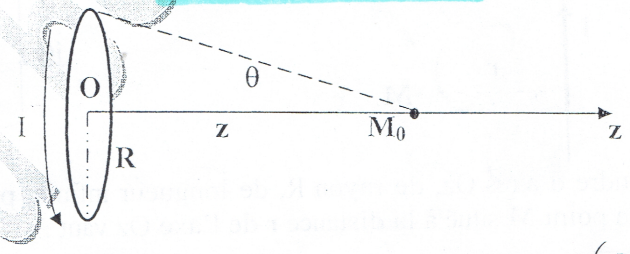
2- Etudier le champ $\vec{B}$, en tout point de l'espace en utilisant :

a- Les équations locales de la magnétostatique. (Maxwell Ampère).

b- Les lois intégrées de la magnétostatique. (Théorème d'Ampère).

Exercice 2 :

1. Une spire circulaire de centre O, d'axe Oz et de rayon R est parcourue par un courant continu d'intensité I. A partir d'un point M_0 de son axe elle est vue sous un angle au sommet θ. Le champ magnétique de la spire est donnée par : $\vec{B}(M_0) = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta\ \vec{u_z}$,

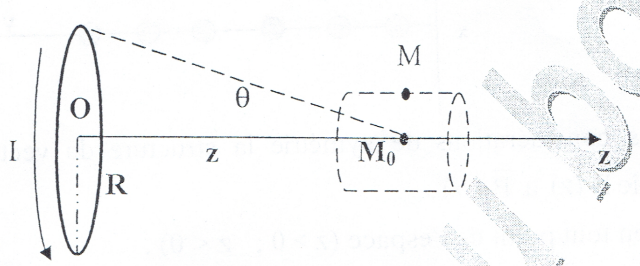


- On écrira l'expression de $B_0(z)$,sous la forme suivante : $B_0(z) = B_{max}\, f\left(\frac{z}{R}\right)$, Préciser les expressions de B_{max} et $f\left(\frac{z}{R}\right)$

- Tracer l'allure de la courbe $B_0(z)$ correspondante en fonction de z, préciser les postions des deux points d'inflexions.

2. Un point M voisin de M_0 se trouve à la même abscisse z mais à une distance r de l'axe (r << R). On considère en première approximation que la composante du champ en M selon l'axe Oz est égale au champ en M_0, soit $B_z(r = 0, z) = B_z(r,z) = B_0(z)$

On cherche à calculer le flux du champ magnétique sortant de la surface (S) fermée délimitée par le cylindre de rayon **r** (r <<R) compris entre les tranches d'abscisses **z** et **z + dz** comme indiqué sur le schéma suivant :



a- Que peut on dire du flux de $\vec{B}$ à travers une surface (S) fermée ?

b- En déduire que la composante radiale du champ magnétique en M s'écrit :

$$B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_0(z)}{dz} = \frac{3}{4}\frac{\mu_0 I R^2 z\, r}{(R^2+z^2)^{5/2}}$$

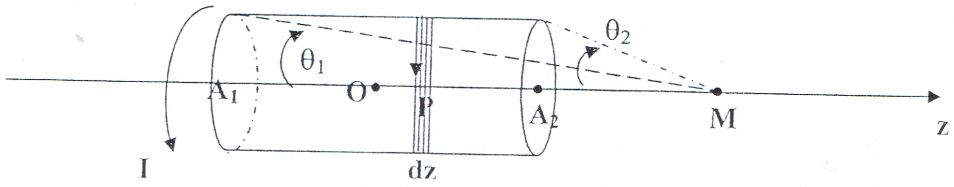
3. Un solénoïde fini d'axe Oz est constitué d'un bobinage serré de n spires circulaires par unité de longueur. Les spires ont un rayon R et sont parcourues par un courant d'intensité I. On considère un épaisseur de spires **dz** au point P de coté z et un point M sur l'axe, extérieur au solénoïde, à partir duquel les extrémités du solénoïde sont vues sous des angles θ_1 et θ_2.

a-Déterminer l'expression du champ magnétique élémentaire crée en M de l'axe :

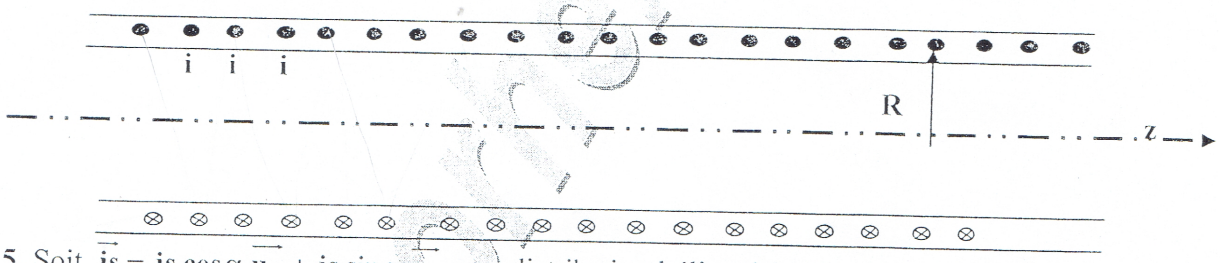
$$\overrightarrow{dB}(M) = n\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta\, dz\, \vec{u_z}$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

b-Déduire l'expression du champ magnétique totale $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\vec{u_z}$



4. Soit un solénoïde de longueur infinie, en appliquant le théorème d'Ampère sur des contours bien choisis, déterminer le champ magnétique pour r < R, on donne (r > R ; $\vec{B} = \vec{0}$). Vérifier la discontinuité du champ magnétique $\vec{B}$



5. Soit $\vec{js} = js\cos\alpha\,\vec{u_\theta} + js\sin\alpha\,\vec{u_z}$ une distribution hélicoïdale de courant surfacique d'un solénoïde de longueur infinie de rayon R ; $js = n\,I$. Déterminer l'expression du champ B en tout point de l'espace.

Exercice 5: Modèle de Drüde

$n = \frac{\text{nombre } e^-}{V}$: nombre d'e- par unité de volume

On considère un métal parcouru par un courant électrique permanent. Le passage du courant est assuré par un déplacement d'électrons. Qualifiés d'électrons libres de charge $q = -e$, de masse m et de concentration n. Le métal contient en outre des charges fixes positives. Si ρ_m désigne la densité volumique des charges mobiles (ρ_{libre}) et ρ_f celle des charges fixes, alors $\rho_m + \rho_f = 0$ (ρ_{fixe})

Conduction en l'absence de champ magnétique

Pour rendre compte de la conductivité du métal, on considère que les électrons assurant la conduction se déplacent avec une vitesse $\vec{v}$ et subissant une force $\vec{f} = -\lambda\vec{v} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Cette force modélise leurs interactions avec l'environnement. Le métal est plongé dans un champ électrique extérieur $\vec{E}$.

a- Appliquer le principe fondamental de la dynamique à un électron et en déduire en régime permanent, une relation entre $\vec{v}$ et $\vec{E}$.

b- Au mouvement de ces électrons, on associe une densité volumique de courant $\vec{j}$. Exprimer $\vec{j}$ et en déduire la conductivité γ du conducteur en fonction de n, λ et e.

c- Exprimer la puissance *volumique* cédée aux électrons par le champ électrique.

d- Calculer la puissance totale reçue par un parallélépipède métallique, de section S et de longueur L tel que le champ électrique appliqué soit *parallèle* aux cotés de longueur L.

e- Déduire de ce calcul l'expression de la résistance R de cette portion de métal en fonction de γ, S et L.

f-Trouver une autre méthode pour déterminer la résistance R

Acquis : $\vec{v} = -\mu\vec{E}$ (μ : mobilité)

$\vec{j}_c = \rho_{libre}\vec{v}$

$\rho_{libre} = \frac{dq}{d\tau} = \frac{dN\,q}{d\tau} = nq$

$\vec{j}_c = \gamma\vec{E}$: 2e loi d'Ohm

$P_{joule} = \vec{j}\cdot\vec{E}$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Magnetostatique

Exercice 1:

a)



toute translation suivant (O_z) et rotation suivant θ laisse invariante la distribution de courant.

donc $\vec{B} = \vec{B}(r)$

tout plan passant par (O_z) sont des plans de symétrie paire, or $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur $\Rightarrow \vec{B} = B(r)\,\vec{u}_\theta$

b)

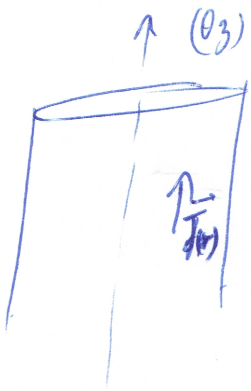
Théorème d'ampère: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_{enlacant}$

$$\oint_0^{2\pi} B(r)\,\vec{u}_\theta \; r\,d\theta\,\vec{u}_\theta = 2\pi r\, B(r)$$

$$= \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u}_\theta}$$

2)



d'après le principe de Pierre-Curie:

$\vec{B} = B(r)\,\vec{u}_\theta$

si $r < R$

$$\sum I_{enlacé} = \iint \vec{j}(r)\cdot d\vec{S} = \int_0^r \int_0^{2\pi} j_0 \frac{r'}{R}\, r'\,dr'\,d\theta$$

$$= \boxed{j_0 \frac{r^3}{R}\frac{2\pi}{3R}}$$

si $r > R$ $\quad \sum I_{enlacé} = \iint \vec{j}(R)\,d\vec{s} = \int_0^R \int_0^{2\pi} j_0 \frac{r}{R}\,dr'\,d\theta = \boxed{j_0 \frac{R^3}{3}\pi 2}$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi r} \times j_0 \frac{r^2}{3R} 2\pi r = \mu_0 j_0 \frac{r^2}{3R} \vec{u_\theta} & \text{si } r < R \\ \frac{\mu_0}{2\pi r} \times j_0 \frac{R^3}{3} 2\pi = \frac{\mu_0 j_0 R^3}{3r} \vec{u_\theta} & \text{si } r > R \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j_v} = \mu_0 j_0 \frac{r}{R} \vec{u_z} & \text{si } r < R \\ \vec{rot}(\vec{B}) = \vec{0} & \text{si } r > R \end{cases}$$

$$\vec{rot}(\vec{B}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} \vec{u_z}$$

Si $r < R$

donc $\frac{1}{r} \frac{d(rB_\theta)}{dr} = \mu_0 j_0 \frac{r}{R}$

$\Rightarrow d(rB_\theta) = \frac{\mu_0 j_0}{R} r^2 dr$

$\Rightarrow rB_\theta = \frac{\mu_0 j_0}{R} \frac{r^3}{3} + C$

$\Rightarrow B_\theta = \frac{\mu_0 j_0}{R} \frac{r^2}{3} + \frac{C}{r}$

Supposons que $C \neq 0 \Rightarrow B_\theta \xrightarrow[r \to 0]{} \infty$ absurde

donc $C = 0$ et $\boxed{\vec{B_1} = \frac{\mu_0 j}{3} \frac{r^2}{R} \vec{u_\theta}}$

si $r > R$

$\Rightarrow \frac{d(rB_\theta)}{dr} = 0$

$\Rightarrow rB_\theta = C$

$\Rightarrow B_\theta = \frac{C}{r}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{B_2} = \frac{\mu_0 j R^2}{3r} \vec{u_\theta}}$

or $\vec{B_2} - \vec{B_1} = \vec{M_{1/2}} \wedge \mu_0 \vec{j_s} = \vec{0}$

$\vec{B_2} = \vec{B_1}$

$\Rightarrow \frac{C}{R} = \frac{\mu_0 j}{3} R$

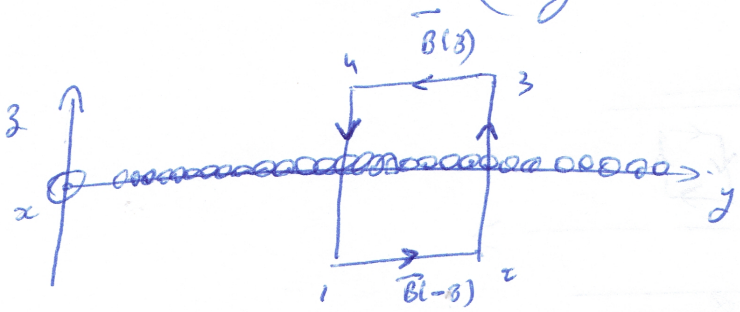
$\Rightarrow C = \frac{\mu_0 j R^2}{3}$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Exercice 2:

1) d'après le principe de Pierre Curie :

$\vec{B}(M) = \vec{B}(z) = B(z)\vec{u_y}$ (car le plan $\Pi(M, \vec{u_x}, \vec{u_z})$ est un plan de symétrie paire)



On constate que $\vec{B}(z) = -\vec{B}(-z)$

2) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum \vec{J}_s$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 B(-z)\, dy + \int_3^4 B(z)\, dy$$

$$= 2\int_1^2 \vec{B}(-z)\, dy$$

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2y\, B(-z)}$$

$$\mu_0 \sum \vec{I} = \mu_0 \int \vec{J}_s \vec{u_x} \cdot dy\, \vec{u_x}$$

$$= \mu_0\, y\, \vec{J}_s$$

$$\Rightarrow 2y\, B(-z) = \mu_0\, y\, \vec{J}_s$$

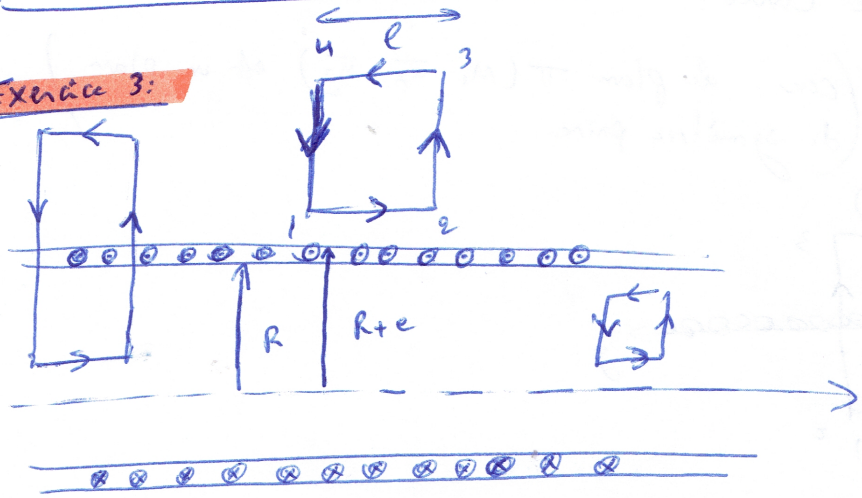
$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(-z) = \frac{\mu_0 \vec{J}_s}{2} \cdot \vec{u_y}}$$

et $\boxed{B(z) = \frac{\mu_0 \vec{J}_s}{2} \vec{u_y}}$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\vec{B}(z) - \vec{B}(-z) = \mu_0 \vec{n} z \wedge \vec{J}_s$$

Exercice 3:



1) on choisit le cadre d'ampère ailleurs de la bobine

$\vec{B} = \vec{B}(r) = B(r)\vec{u_z}$ par principe de curie et on remarque que $\Pi(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ est un plan de symétrie paire.

d'où $\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B}\, d\vec{l} + \underbrace{\int_2^3 \vec{B}\, d\vec{l}}_{=\vec{0}} + \int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \underbrace{\int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=\vec{0}}$

$= B(r > R+e)\, l - B(\infty)\, l$ ($=0$) (le champ $\vec{B}$ à l'infini est nul)

$= \mu_0 \sum I = 0$

d'où $\boxed{\vec{B}(r > R+e) = \vec{0}}$

2)(a) . on choisit le cadre d'ampère entièrement dans la bobine.

$\Rightarrow B_1(r < R)\, l - B_2(r < R)\, l = 0 = \mu_0 \sum I_{enlacé}$

$\Rightarrow B_1(r < R) = B_2(r < R)$

d'où le champ $\vec{B}$ dans la bobine est uniforme

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

• On choisit le cadre d'ampère partiellant dans la bobine.

$$\Rightarrow \quad B(r \leq R)\ell - B(\infty)\ell = \mu_0 \sum I$$

$$\sum I = \iint_{R+e} \vec{j}\, d\vec{S}$$

$$= \int_R^{R+e} \int_0^{\ell} j_0 \, dr \, dz$$

$$= j_0 \cdot e\ell$$

$$\Rightarrow \quad B(r \leq R)\ell = \mu_0 j_0 e \ell$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}(r \leq R) = \mu_0 j_0 e \, \vec{u}_z}$$

de même: $\boxed{\vec{B}(R \leq r \leq R+e) = \mu_0 j_0 (R+e-r)\, \vec{u}_z}$

(b) $\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}_v \qquad (\vec{B} = B(r)\vec{u}_z)$

pour $r \leq R$ $\quad \vec{rot}(\vec{B}) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \frac{-\partial B_z}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-dB_z}{dr} = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_z = \text{cste (uniforme)}.$$

pour $R \leq r \leq R+e$

$$-\frac{dB_z}{dr} = \mu_0 j_0$$

$$\Rightarrow B_z = -\mu_0 j_0 r + C$$

or $B_z(r \geq R+e) = \text{cste} = 0 \quad (\text{car } B(\infty) = 0)$

et par continuité:

$$B_z(R+e) = -\mu_0 j_0 (R+e) + C = 0$$

$$\Rightarrow C = \mu_0 j_0 (R+e)$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

d'où $\boxed{\vec{B_3}(R \leq r \leq R+e) = \mu_0 j_0 (R+e-r)\vec{u_3}}$

et par continuité en $r = R$

$$B_3(r \leq R) = C = \mu_0 j_0 e$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B_3}(r \leq R) = \mu_0 j_0 e \vec{u_3}}$$

et $\boxed{\vec{B_3}(r \geq R+e) = \vec{0}}$

Exercice 4 :

2) $\vec{B}(M_1) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\theta \vec{u_3}$

$$\tan\theta = \frac{R}{z} \quad / \quad \sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{R}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M_1) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1+\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{\frac{-3}{2}} \vec{u_3}$$

$$= B_{max} \cdot f\left(\frac{z}{R}\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} B_{max} = \frac{\mu_0 I}{2R} \\ f\left(\frac{z}{R}\right) = \left(1+\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$f'\left(\frac{z}{R}\right) = -\frac{3}{2} \times 2\frac{z}{R^2}\left(1+\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-\frac{5}{2}} = -3\frac{z}{R^2}\left(1+\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f''\left(\frac{z}{R}\right) = -\frac{3}{R^2}\left(1+\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-\frac{5}{2}} - 3\frac{z}{R^2} \times -\frac{5}{2} \times 2\frac{z}{R^2}\left(1+\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-\frac{7}{2}}$$

$$= -\frac{3}{R^2}\left(1+\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-\frac{5}{2}}\left[1 - 5\frac{z^2}{R^2}\frac{1}{1+\left(\frac{z}{R}\right)^2}\right] = 0$$

si $1 - 5\cdot\frac{z^2}{R^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{z}{R}\right)^2} = 0$

si $5\frac{z^2}{R^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{z}{R}\right)^2} = 1$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

• On choisit le cadre d'ampère partiellant dans le bobine.

$$\Rightarrow \quad B(r \leq R)\ell - B(\infty)\ell = \mu_0 \sum I$$

$$\sum I = \iint_{R+e} \vec{j}\, d\vec{S}$$

$$= \int_R^{R+e} \int_0^{\ell} j_0 \, dr \, dz$$

$$= j_0 . e \ell$$

$$\Rightarrow \quad B(r \leq R)\ell = \mu_0 j_0 e \ell$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}(r \leq R) = \mu_0 j_0 e \, \vec{u}_z}$$

de même: $\boxed{\vec{B}(R \leq r \leq R+e) = \mu_0 j_0 (R+e-r)\, \vec{u}_z}$

(b) $\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}_v \qquad (\vec{B} = B(r)\vec{u}_z)$

pour $r \leq R$ $\quad \vec{rot}(\vec{B}) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \frac{-\partial B_z}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-dB_z}{dr} = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_z = \text{cste (uniforme)}.$$

pour $R \leq r \leq R+e$

$$\frac{-dB_z}{dr} = \mu_0 j_0$$

$$\Rightarrow \quad B_z = -\mu_0 j_0 r + C$$

or $B_z(r \geq R+e) = \text{cste} = 0 \quad (\text{car } B(\infty) = 0)$

et par continuité:

$$B_z(R+e) = -\mu_0 j_0 (R+e) + C = 0$$

$$\Rightarrow \quad C = \mu_0 j_0 (R+e)$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

ssi $5\frac{z^2}{R^2} = 1 + \frac{z^2}{R^2}$

ssi $\frac{z^2}{R^2} = \frac{1}{4}$

ssi $z = \pm \frac{R}{2}$

2) $B_z(r=0, z) = B_z(r, z) = B_0(z) = B_{max} f\left(\frac{z}{R}\right)$

(a) $\text{div}(\vec{B}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \text{div}\left(B_0(z) \right) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_0(z)}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow \frac{d B_0(z)}{dz} = -\frac{1}{r} \frac{d(r B_r(r,z))}{dr}$

$\Rightarrow d\left(r B_r(r,z)\right) = -r \left(\frac{d B_0(z)}{dz}\right) dr$

$\Rightarrow r B_r(r,z) = -\frac{r^2}{2} \frac{d B_0(z)}{dz} + C$

$\Rightarrow B_r(r,z) = -\frac{r}{2} \frac{d B_0(z)}{dz} + \frac{C}{r}$ (et $C=0$ car sinon B diverge).

$\Rightarrow \boxed{B_r(r,z) = -\frac{r}{2} \frac{d B_0(z)}{dz}}$

$\frac{d B_0(z)}{dz} = B_{max} \times -3 \frac{z}{R^2} \left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-\frac{5}{2}}$

$= \frac{-3 \mu_0 I}{2R} \times \frac{z}{R^2} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}$

$= \frac{-3 \mu_0 I z R^2}{2 (R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$

d'où $\boxed{B_r(r,z) = \frac{3}{4} \times \frac{\mu_0 I R^2 z r}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}}$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

3/ (2)

$n \longrightarrow \ell$

$\frac{n}{\ell} dz \longrightarrow dz$

$$\Rightarrow d\vec{B}(M_0) = \frac{n}{\ell} dz \times \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\theta \, \vec{u}_z$$

$$\boxed{d\vec{B}(M_0) = n \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\theta \, dz \, \vec{u}_z}$$

$$\tan\theta = \frac{R}{z} \iff \cot\theta = \frac{z}{R} \Rightarrow \frac{d\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{R} dz$$

$$\Rightarrow \boxed{dz = R \frac{d\theta}{\sin^2\theta}}$$

$z \nearrow \Rightarrow \theta \searrow \Rightarrow \boxed{dz = -R \frac{d\theta}{\sin^2\theta}}$

$$\Rightarrow d\vec{B}(M_0) = n \frac{\mu_0 I}{2R} \times -R \frac{d\theta \sin^2\theta}{\sin^2\theta} \vec{u}_z$$

$$= \frac{n\mu_0 I}{2} (-\sin\theta) d\theta \, \vec{u}_z$$

$$\text{d'où } \vec{B}(M_0) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\vec{B}(M_0) \, \vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{B}(M_0) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \vec{u}_z}$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

4) $\vec{B}(r<R) = \mu_0 n I \vec{u_z}$

5) Par travail par superposition :

$\vec{J_S} = \begin{cases} J_S \cos\alpha \, \vec{u_\theta} \longrightarrow \vec{B_1} = \vec{B_3} \\ + \\ j_S \cos\alpha \, \vec{u_z} \longrightarrow \vec{B_2} = \vec{B_4} \end{cases}$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Exercice 5: Modèle de Drüde

a) RFD sur un électron :

$$-e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{-1}{e}\left(\frac{m}{\tau}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}\right)}$$

b) $\vec{j} = \rho\vec{v}$

$\vec{j} = -ne\vec{v}$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m}{\tau}\vec{v} = e\vec{E}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{u} - \frac{\tau e}{m}\vec{E} \qquad \text{or } \tau \ll 1$$

$$\Rightarrow \vec{v} \simeq -\frac{\tau e}{m}\vec{E}$$

d'où $\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} = \gamma\vec{E}$ avec $\boxed{\gamma = \frac{ne^2\tau}{m} = \frac{ne^2}{\rho}}$

c) $P_{Joule} = \frac{dP_{Joule}}{dV} = \frac{d\vec{F}_e \cdot \vec{v}}{dV} = \frac{dq}{dV}\vec{E} \cdot -\frac{\tau e}{m}\vec{E}$

$= -ne\vec{E} \times -\frac{\tau e}{m}\vec{E}$

$= \frac{m\tau e^2}{m}\vec{E}\cdot\vec{E}$

$= \vec{j}\cdot\vec{E}$ Watt/m³

$$P_{Joule} = \iiint p_{Joule}\, dV$$

$= \frac{1}{\gamma} j^2 L S$

$= \frac{1}{S\gamma} L I^2$

$= RI^2 \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}}$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma}\vec{J} = -\overrightarrow{grad}\,V$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma} J = (V_2 - V_1)\frac{1}{L} \qquad \left(\text{or } I = JS \Rightarrow J = \frac{I}{S}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{S\gamma} L\right) I = V_2 - V_1 \Rightarrow RI$$

d'où $\boxed{R = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{L}{S}}$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Modèle de Drüde

métal → neutre $\rho_{total} = 0$

$q_{e^-} = -e$; $q_{ions} = +e$

$\rho_{fixe} + \rho_{mobile} = 0$

$\rho_{mobile} = n q = \frac{dq}{d\tau} = \frac{dN_{e^-}}{d\tau} q = n(-e)$ (charge (+) / charge (−))

$\rho_{ions} = ne$

Forces appliquées sur le charge mobile (e^-) : $\vec{P}$ Poids, $\vec{F_E}$ force de Coulomb, $\vec{f}$ frottement visqueux dû aux chocs des particules.

RFD : $\vec{P} + \vec{F_e} + \vec{f} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ a $\|\vec{P}\| \ll \|\vec{F_e}\|$

$\Rightarrow \vec{F_e} + \vec{f} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

$\Rightarrow -e\vec{E} - \lambda\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow$ **éq diff :** $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \frac{-e}{m}\vec{E}$

on obtient $\vec{v} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}\vec{u} - \frac{e}{m}\tau\vec{E}$

en régime permanent : $\vec{v} = -\frac{e}{m}\tau\vec{E}$

On définit $\mu = \frac{e}{m}\tau$ $\quad \vec{v} = -\mu\vec{E}$ $\quad \mu$: mobilité électrique

$\vec{j_v} = \rho_{libre}\vec{v} = -ne\vec{v}$

$= ne\mu\vec{v}$

$= \frac{ne^2}{m}\tau\vec{v} = \gamma\vec{E}$ on définit $\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$

γ : conductivité

Loi d'Ohm locale : $\vec{j_v} = \gamma\vec{E}$

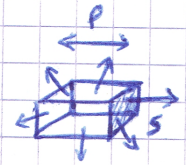
Puissance volumique cédé aux électrons par le champ électrique :

$\rho_{Joule\,v} = \frac{d\,\rho_{Joule}}{d\tau} = \frac{d\vec{F_e}\cdot\vec{v}}{d\tau} = \frac{dq}{d\tau}\vec{E}\cdot\vec{v} = \rho\vec{v}\cdot\vec{E}$

d'où $\rho_{Joule\,v} = \vec{j_v}\cdot\vec{E}$

$d\rho_{Joule} = \rho_{Joule\,v}\, d\tau$

$d\rho_{Joule} = (\vec{j_v}\cdot\vec{E})\, d\tau$



ρ_{Joule}

$\Rightarrow \rho_{Joule} = \iiint d\rho_{Joule} = \iiint \vec{j_v}\cdot\vec{j_v}\cdot\frac{1}{\gamma}\, d\tau$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$\Rightarrow P_{Joule} = \frac{1}{\gamma} j_v^2 \rho s$ or $I = \iint \vec{j_v} \, d\vec{s}$

$= \vec{j_v} \cdot \vec{s} = j_v s$

$= \frac{1}{\gamma} (j_v s)^2 \times \frac{\rho}{s}$

car $\vec{j_v}$ est le même sur tout le métal homogène

$$P_{Joule} = \left(\frac{1}{\gamma} \times \frac{\rho}{s} \right) I^2$$

or $P_{Joule} = R_e I^2 \Rightarrow$ $$R_e = \left(\frac{1}{\gamma} \times \frac{\rho}{s} \right) I^2$$

$\frac{1}{\gamma}$: ρ = résistivité

$\frac{1}{R_e}$: conductance en (Siemens)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.