phénomène d'induction dans un objet de masse ⟹ Courant de Foucault

تقتلو بيها

Conducteur Ohmique

CHAUFFAGE PAR INDUCTION

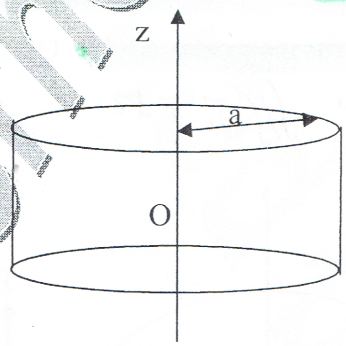
A- On considère un cylindre conducteur circulaire d'axe (O,z) de rayon **a** et de hauteur **h**. Sa conductivité est $\sigma = 5\ 10^7\ \Omega^{-1}m^{-1}$. On note **r** la distance d'un point M quelconque de l'espace à l'axe Oz.

Le disque est plongé dans un champ magnétique défini par .

$r < a$: $\vec{B} = B(t)\,\vec{u}_z = B_0 \cos(2\pi f t)\,\vec{u}_z$ $\quad r > a$: $\vec{B} = \vec{0}$; $\quad f = 50$ Hz $\Rightarrow \omega = 2\pi f$

On se place dans ARQS.

Figure1



Remarque :
- Le cylindre est caractérisé par $\frac{1}{16}$ au niveau de la puissance moyenne si on fait le calcul par (ωt)
- si $\vec{B}_0$ est portée par $\vec{u}_z$ tout les $\vec{B}_i$ sont de même portés par $\vec{u}_z$

1- Analyser qualitativement le phénomène observé.

2- Justifier l'apparition d'un champ électrique variable $\vec{E}$ dans le cylindre. Déterminer sa direction en un point M quelconque du barreau repéré par (r,θ,z). On néglige le champ propre crée par les courants circulant dans le cylindre. Exprimer la force électromotrice induite **e(t)** le long d'une ligne de courant de rayon **r**.

effet des bords négligé

3- Etablir l'expression de la densité des courants induits $\vec{j}(r,t)$ dans le cylindre.

4- Retrouver ce résultat par méthode locale.

lire attentivement

$\iiint \vec{j}\vec{E}\,d\tau$

5- Déterminer l'expression de la puissance moyenne dissipée par ces courants induits. Quelle remarque peut-on faire en ce qui concerne la fréquence ?

6- Applications :

a- On remplace le barreau métallique par un grand nombre **N** de petits barreaux cylindriques isolés, du même métal, de même longueur **L** et de rayon r_N ; tel que la section des **N** petits tubes soit celle du barreau de rayon **a**. Déterminer la puissance dissipée dans tous les petits barreaux. Commenter.

c'est le technique de feuillitage qui sert à diminuer les pertes par effet Joule N fois

$\mathcal{S}_{tot} = \pi N (r_N)^2 \Rightarrow a = \sqrt{N}\, r_N$ et $P_{Joule} = N P_{Joule\ 1\ fibre}$

b- Trouver un exemple d'application dans laquelle on utilise ces courants.

c- Trouver un exemple d'application dans laquelle ces courants sont néfastes. Comment parvient –on alors à les réduire ?

combien de méthode y'ils ?

7- Calculer par une méthode au choix, le champ magnétique $\vec{B}_i$ créé par les courants induits de la question a). l'hypothèse faite $|\vec{B}_i| << |\vec{B}_s|$ est elle vérifiée lorsque **a** est typiquement de l'ordre du décimètre ?

8- Sans faire l'approximation $|\vec{B}_i| << |\vec{B}_s|$, déterminer à quelle équation en ARQS satisfait le champ magnétique total $\vec{B}$. A quel type de solution faut-il s'attendre ?

Je seule méthode pour déterminer l'équation différentielle est de faire : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{B}))$ par deux méthode. $\Delta\vec{V} = \overrightarrow{grad}(div(\vec{V})) - \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{V}))$

si $\exists \frac{\partial}{\partial t}$ il y a facteur $\frac{1}{\tau}$ d'amortissement

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

mahdystudies.tn

B- On considère maintenant une sphère de rayon **a** et d'axe de révolution (O,z) de rayon. Sa conductivité est σ. On note **r** la distance d'un point M quelconque de l'espace.

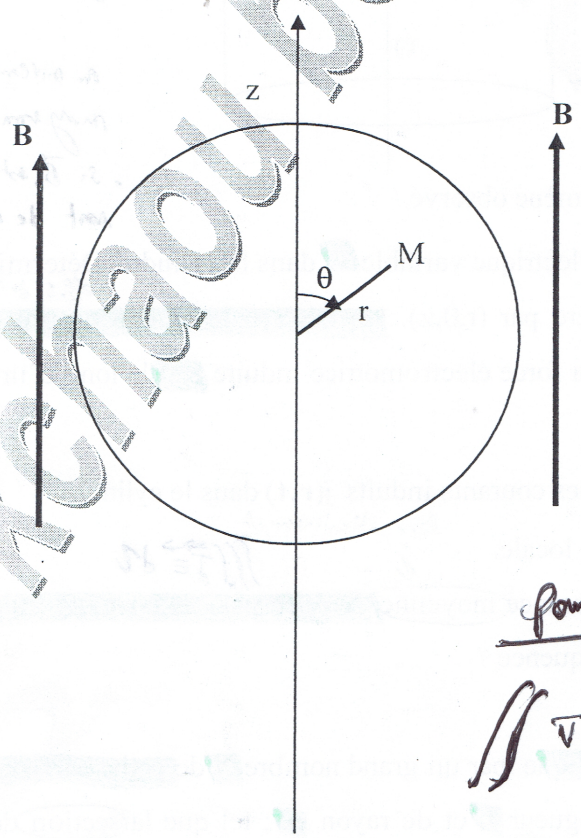
La sphère est plongé dans un champ magnétique extérieur défini par $\vec{B} = B_0 \cos(2\pi f t)\, \vec{u}_z$

1- Exprimer la force électromotrice induite le long d'une ligne de courant de rayon r.

2- Etablir l'expression de la densité des courants induits dans le cylindre.

3- Calculer la puissance dissipée par ces courants induits. Quelle remarque peut-on faire en ce qui concerne la fréquence ?

effet Joule $\iint \vec{j}_c \cdot \vec{E}\, d^2$



$\vec{e}_z = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta$

donc la surface attaqué par le champ $\vec{B}$ diffère selon les deux composantes.

Pour gagner du temps

$\iint \vec{V}\, d\vec{S}$ et $\vec{V} = v\vec{u}_\theta$ cylindrique uniforme

sphérique

$= +V \pi r^2 \sin^2\theta$ car $\vec{u}_\theta = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta$

car $d\vec{S} = ds(-\vec{e}_\theta)$

kenaoui ahmed

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Chauffage par induction

A-

1- On se place dans le champ mobile qui passe à travers la surface latérale fixe dans cylindre (cas de Neumann).

Dans il y a création d'un courant induit orthoradiale dans le cylindre.

C'est le Courant de Foucault.

2-

Maxwell - Faraday : $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (m/l/t)

l'existence d'un champ magnétique variable en temps est associé à l'apparition d'un champ électrique variable par Maxwell - Faraday.

$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$ avec $\Phi = \iint \vec{B}\, d\vec{S}$

$= \iint B_0 \cos(2\pi f t) \cdot r\, dr\, d\theta$

$= B_0 \cos(2\pi f t) \cdot \pi r^2$

d'où $e(t) = B_0 \pi r^2 \times 2\pi f \sin(2\pi f t)$

$$\boxed{e(t) = 2B_0 \pi^2 r^2 f \sin(2\pi f t)}$$

$\vec{J_v} = \gamma \vec{E}$ et $\vec{E} = \vec{E_\theta}$ (car $\pi(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est un p.s.p pour $\vec{B}$)

Ainsi $e(t)$ est la fem d'une ligne de courant de rayon r.

2- $\vec{j}(r,t) = \gamma \vec{E}$ et $\vec{E} = E(r)\, \vec{u_\theta}$

$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = B_0 \cdot 2\pi f \sin(2\pi f t)\, \vec{u_z}$

$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d(r E_\theta)}{dr} = 2\pi B_0 f \sin(2\pi f t)$

$\Rightarrow$ $$\boxed{\vec{E_\theta} = \pi B_0 f r \sin(2\pi f t)\, \vec{e_\theta}}$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\boxed{\vec{f}(r,t) = \gamma \pi B_0 f r \sin(2\pi f t)\, \vec{e}_\theta}$$

3) méthode intégrale :

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\iint \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$= 2B_0 \pi^2 r^2 f \sin(2\pi f t)$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int E(r)\, r\, d\theta$$

$$= 2\pi r E(r,t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r,t) = B_0 \pi r f \sin(2\pi f t)\, \vec{e}_\theta}$$

et $\boxed{\vec{f}_v = \gamma B_0 \pi r f \sin(2\pi f t)\, \vec{e}_\theta}$

5-

$$P_{Joule} = \iiint \gamma E^2 dv$$

$$= \iiint \gamma (B_0 \pi r f \sin(2\pi f t))^2 r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$= \gamma^2 B_0^2 \pi^2 f^2 \sin^2(2\pi f t) \int r^3 dr \int d\theta \int dz$$

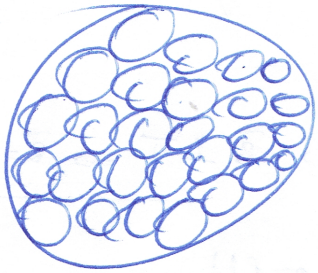
$$= \gamma^2 B_0^2 \pi^2 f^2 \sin^2(2\pi f t)\, \frac{a^4}{4}\, 2\pi\, h$$

$$\boxed{P_{Joule} = \gamma^2 B_0^2 \pi^3 f^2 \frac{a^4}{2} h \sin^2(2\pi f t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle P_{Joule} \rangle = \frac{\gamma^2 B_0^2 \pi^3 f^2 a^4}{4}}$$ la puissance dissipée par effet Joule est proportionnelle au carré de la fréquence.

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

6) (a)



$N \pi r_N^2 = \pi a^2 \Rightarrow N r_N^2 = a^2$

$\langle P_{Joule}' \rangle = N \dfrac{\delta^2 B_0^2 \pi^3 f^2 r_N^4}{4}$

$$\frac{\langle P_{Joule}' \rangle}{\langle P_{Joule} \rangle} = \frac{N \dfrac{\delta^2 B_0^2 \pi^3 f^2 r_N^4}{4}}{\dfrac{\delta^2 B_0^2 \pi^3 f^2 a^4}{4}} = \frac{N r_N^4}{a^4} = \frac{N r_N^4}{N^2 r_N^4} = \frac{1}{N}$$

$$\boxed{\langle P_{Joule} \rangle = N \langle P_{Joule}' \rangle}$$

donc par cette méthode on peut diminuer la puissance dissipé par effet Joule.

(b) On utilise les courants de foucault pour profiter des chaleurs crée par effet Joule au four à induction ou pour la fusion des matériaux.

(c) pour les fils conducteurs on utilise la technique de feuilletage pour éviter la destruction rapide aux hautes fréquence dû à l'effet Joule.

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

7- $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) \simeq \mu_0 \sigma \vec{E}$ (car $\|\vec{j}_D\| << \|\vec{j}_E\|$)

$= \mu_0 \sigma \pi B_0 f r \sin(2\pi f t) \vec{e_\theta}$

le plan $\Pi(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ est un P.S.P de $\vec{E} \Rightarrow \vec{B} \perp \Pi \Rightarrow \vec{B} = B(r)\vec{u_z}$

$$\frac{-\partial B_z}{\partial r} = -\frac{dB_z}{dr} = \mu_0 \sigma \pi B_0 f r \sin(2\pi f t)$$

$$\Rightarrow B_i(r,t) = -\frac{\mu_0 \sigma \pi B_0 f r^2}{2} \sin(2\pi f t) + C^{ste}$$

et $\vec{B_i}(a,t) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{B_i(r,t) = \frac{\mu_0 \sigma \pi f}{2}(a^2 - r^2)\sin(2\pi f t)\vec{u_z}}$

$$\frac{|B_i|}{|B_s|} \leq \frac{\mu_0 \sigma \pi B_0 f a^2}{2 B_0} << 1$$

8- $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \sigma \vec{E}$ (en ARQS)

$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{B})) = \mu_0 \sigma \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$

$\overrightarrow{grad}(div(\vec{B})) - \Delta \vec{B} = -\mu_0 \sigma \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$

$\Rightarrow \Delta \vec{B} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial B}{\partial r}\right)\vec{u_z} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial r^2} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial r}\right) + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{B}}{\partial r} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}}$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

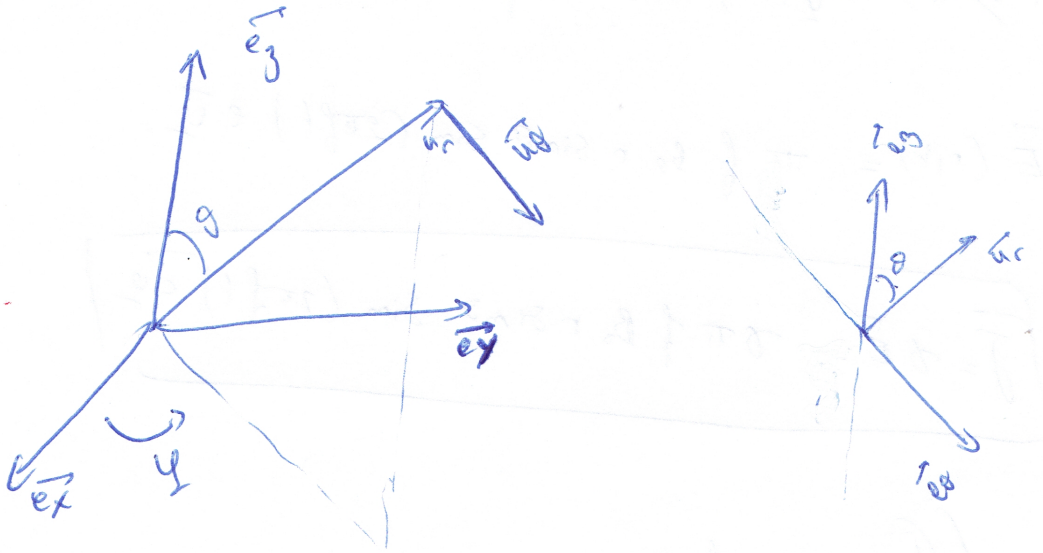
B-

1- postulat de Faraday:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint B_0 \cos(2\pi f t)\, \vec{e}_z \, dS$$

$$= B_0 \cos(2\pi f t) \iint (\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta) \cdot d\vec{S}$$



$$\vec{e}_z = \cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta$$

* $\iint \cos\theta \vec{e}_r \cdot d\vec{s} = \iint \cos\theta \vec{e}_r \, r\,d\theta \cdot r\sin\theta\, d\varphi$

$$= r \int \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int d\varphi = 0$$

* $\iint -\sin\theta \vec{e}_\theta \, dr \, r\sin\theta \, d\varphi \, (-\vec{e}_\theta)$

$$= \int_r \int_{2\pi} r\,dr \sin^2\theta \, d\varphi = \pi r^2 \sin^2\theta$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$\Rightarrow \Phi = B_0 \pi r^2 \sin^2\theta \cos(2\pi f t)$

$\Rightarrow e = 2\pi f . B_0 \pi r^2 \sin^2\theta \sin(2\pi f t)$

$$\boxed{e = 2\pi^2 f B_0 r^2 \sin^2\theta \sin(2\pi f t)}$$

2) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r \, E_\varphi(r,t)$

et de plus tout plan passant par $\vec{e_\varphi}$ est un P.S.P pour $\vec{B} \Rightarrow \vec{E} = E \vec{e_\varphi}$

$\Rightarrow 2\pi \sin\theta \, E_\varphi(r,t) = 2\pi^2 f B_0 r^2 \sin^2\theta \sin(2\pi f t)$

$\Rightarrow \vec{E}(r,t) = \pi f B_0 r \sin\theta \sin(2\pi f t) \, \vec{e_\varphi}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E} = \gamma \pi f B_0 r \sin\theta \sin(2\pi f t) \vec{e_\varphi}}$$

3) $P_{Joule} = \iiint \gamma E^2 \, d\tau$

$= \iiint \left(\pi f B_0 r \sin\theta \sin(2\pi f t)\right)^2 r^2 dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$= \pi^2 f^2 B_0^2 \sin^2(2\pi f t) \int_0^a r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

$= \frac{8\pi^3}{3} f^2 B_0^2 \sin^2(2\pi f t) \, a$

On remarque que notre objet est dispersif.

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.