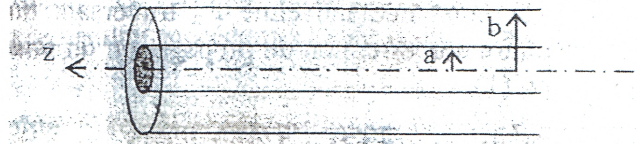


Câble coaxial

Un câble coaxial cylindrique d'axe (Oz) , de rayon intérieur a et de rayon extérieur b est le siège d'un champ électromagnétique dont les champs électriques et magnétiques sont, en coordonnées cylindriques :

$$= \vec{E}(r, z, t)$$

$$\vec{E}(M, t) = E(r) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_r \quad / \quad \vec{B}(M, t) = B_0(r) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_\theta$$



Avec $\omega = ck$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Les cylindres de rayons a et b sont des conducteurs parfaits : les champs électrique et magnétique sont nuls pour $r > b$ et pour $r < a$. L'espace situé entre les cylindres de rayon a et b est le vide.

1. Calculer $E(r)$ en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss et les conditions aux limites. On posera : $E_a = \lim_{r \rightarrow a} E(r)$ pour $r = a$.

2. En appliquant l'équation de Maxwell-Faraday, montrer que : $B_0(r) = \frac{a E_a}{c r} u_\theta$

3.a. Utiliser les relations de passage des champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ pour déterminer les densités surfaciques de charge $\sigma_a(z, t)$ et de courant $j_{sa}(z, t)$ sur l'armature cylindrique $r = a$.

3.b. De même, déterminer les densités surfacique $\sigma_b(z, t)$ et $j_{sb}(z, t)$ sur l'armature $r = b$.

3.c. Montrer que l'équation $\frac{\partial j_s}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$ est vérifiée sur chacune des 2 armatures $r = a$ et $r = b$.

Interpréter physiquement cette équation.

4. Sachant que le champ électrique est relié au potentiel $V(r, z, t)$ par la relation : $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$. On

prendra $V(b, z, t) = 0$.

5. Soit $U(z, t) \equiv V(a, z, t)$ le potentiel du conducteur intérieur à l'abscisse z et à l'instant t et $I(z, t)$ l'intensité du courant électrique porté par ce même conducteur.

Montrer que $Z_c = \frac{U(z, t)}{I(z, t)}$ est indépendant de z et de t . Donner son expression.

6. Déterminer le vecteur de Poynting à l'intérieur du câble coaxial.

7. On définit la puissance moyenne transférée à travers une section de ce câble de la manière suivante :

$$\langle P \rangle = \int_0^{2\pi} \int_a^b \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}. \text{ Montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de } Z_c \text{ et } \langle I^2 \rangle.$$

câble coaxiale

1 - Maxwell Gauss : $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

or l'espace entre les cylindres de rayons a et b est vide $\Rightarrow \rho = 0$

$$\Rightarrow \text{div}(\vec{E}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r E_r)}{\partial r} \right) = 0$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{C}{r} \quad \text{or} \quad E_r \xrightarrow{r \rightarrow a} E_a = \frac{C}{a} \Rightarrow C = E_a \cdot a$$

$Q: E(r) = \frac{E_a \cdot a}{r}$

2 - Maxwell - Faraday:

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{B}_0(r) \omega \sin(\omega t - kz) \quad \text{or le plan } \pi(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) \text{ et un P.S.P. pour } \vec{E}.$$

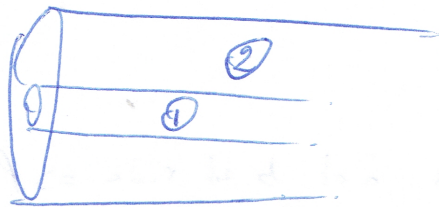
$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = E(r) k \sin(\omega t - kz) \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B}_0(r) \omega \sin(\omega t - kz) = E(r) k \sin(\omega t - kz) \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B}_0(r) = \frac{a \cdot E_a}{r} \frac{k}{\omega} \vec{e}_\theta \quad \text{or} \quad \frac{k}{\omega} = c$$

$\Rightarrow \vec{B}_0(r) = \frac{a \cdot E_a}{r} c \vec{e}_\theta$

3-a



$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{m}_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \frac{a \cdot E_a}{c} \cos(\omega t - kz) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \epsilon_0 \cdot E_a \cos(\omega t - kz)}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_2 - \vec{B}_1 &= \mu_0 \vec{J}_S \wedge \vec{m}_{12} \Rightarrow \vec{J}_S = \frac{\vec{m}_{12}}{\mu_0} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \\ &= \frac{\vec{u}_r}{\mu_0} \wedge \frac{a \cdot E_a}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_\phi \\ &= \frac{E_a}{\mu_0 c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J}_S = \frac{E_a}{\mu_0 c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_z}$$

de même :

$$\begin{cases} \sigma = -\frac{\epsilon_0 a E_a}{b} \cos(\omega t - kz) \\ \vec{J}_S = -\frac{a E_a}{\mu_0 c b} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_z \end{cases}$$

3-c

$$\frac{\partial \mathcal{J}_s}{\partial z} = \frac{\epsilon E_0 K}{\mu_0 c} \sin(\omega t - kz) = \frac{E_0 \omega}{\mu_0} \sin(\omega t - kz)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{E_0 \omega}{\mu_0} \sin(\omega t - kz)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial \mathcal{J}_s}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \right] \quad \text{l'équation de la conservation de charge est vérifiée.}$$

$$\begin{aligned} 5- \quad I &= \int \mathcal{J}_s \cdot d\vec{l} \cdot \vec{m} \\ &= \int \frac{E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t - kz) a d\theta \end{aligned}$$

$$\boxed{I = \frac{E_0 \cdot a \cdot 2\pi}{\mu_0 c} \cos(\omega t - kz)}$$

$$U(z,t) = V(a,z,t) - V(b,z,t)$$

$$= - \int_a^b E_r dr$$

$$= \int_a^b \frac{E_0 \cdot a}{r} \cos(\omega t - kz) dr$$

$$\boxed{U(z,t) = \frac{E_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cos(\omega t - kz)}$$

$$Z_c = \frac{U}{I} = \frac{\cancel{E_0 a} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cos(\omega t - kz)}{\frac{E_0 a \cdot 2\pi}{\mu_0 c} \cos(\omega t - kz)} = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\boxed{Z_c = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$6) \vec{H} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\frac{E_0 A \vec{e}_r}{r} \wedge \frac{E_0 A \vec{e}_\theta}{c r}}{\mu_0} \cos^2(\omega t - k z)$$

$$= \frac{E_0^2 a^2}{r^2 c \mu_0} \cos^2(\omega t - k z) \vec{e}_z$$

$$7) \langle P \rangle = \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{E_0^2 a^2}{2 c \mu_0 r^2} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z r dr d\theta$$

$$= \frac{E_0^2 a^2}{c \mu_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\langle I^2 \rangle = \frac{2 E_0^2 a^2 \pi r}{\mu_0 c^2}$$

$$\frac{\langle P \rangle}{\langle I^2 \rangle} = \frac{\frac{E_0^2 a^2 \pi}{c \mu_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{2 E_0^2 a^2 \pi r}{\mu_0 c^2}} = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = Z_c$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = Z_c \langle I^2 \rangle : \text{Identité de Poynting}$$