## Exercice 8 : ETUDE D'UN TRANSFORAMTEUR

A-

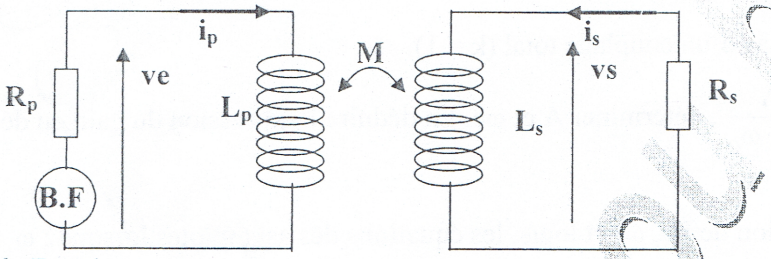
1- On considère un long solénoïdes $\Sigma_1$ d'axe $(Oz)$, de longueur $\ell$, de rayon $r_1$ et comportant $N_1$ spires jointives, parcouru par un courant i(t). Le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est donnée par $\overrightarrow{B_1} = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} i_1(t) \overrightarrow{u_z}$. Dans toute la suite on négligera les effets de bord. Déterminer le coefficient d'inductance $L_1$ de $\Sigma_1$ en fonction de $N_0$ et une inductance $L_0$:

2- On considère deux solénoïdes $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ coaxiaux, d'axe $(Oz)$, de même longueur $\ell$, de rayons $r_1$ et $r_2 < r_1$ et comportant respectivement $N_1$ et $N_2$ spires jointives, enroulées dans le même sens : déterminer l'expression du coefficient de mutuelle inductance **M** entre les deux solénoïdes.

**Principe du transformateur**

Un transformateur se compose de deux bobines distinctes primaire et secondaire enroulées sur une carcasse en fer doux.

- Le circuit primaire (à gauche sur le schéma) est caractérisé par une auto-inductance $L_p$, et une résistance $R_p$. formé de $N_p$ spires. Il est alimenté par un générateur idéal de tension d'amplitude E à la pulsation $\omega$.
- Le circuit secondaire (à droite sur le schéma) est caractérisé par une auto-inductance $L_S$, et une résistance $R_S$ qui prend à la fois la résistance de la bobine et du dipôle qu'on cherche a alimenter, formé de $N_S$ spires.
- Le coefficient mutuelle **M** entre les deux solénoïdes est positif.




3- Enoncer la loi de Faraday.

4- Montrer que le primaire et le secondaire sont le siége d'un phénomène d'induction. Quel type de Neumann ou de Lorentz.

5- Calculer alors les forces électromotrices induites dans le primaire et le secondaire.

6- Etablir le système d'équations couplés vérifiées par les intensités $\mathbf{i_p}$ et $\mathbf{i_s}$ en régime sinusoïdal établi.

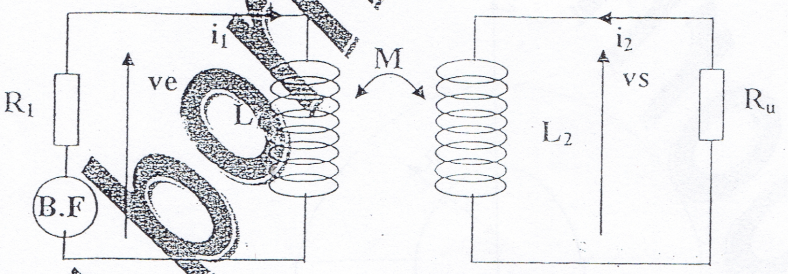
7- En déduire le rapport complexe $\frac{\mathbf{I_p}}{\mathbf{I_S}}$, puis l'expression de $\underline{i_p}$ en fonction de E et des caractéristiques des circuits.



© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés. 

# Transformateur

A- Un transformateur se compose de deux bobines distinctes 1 et 2 enroulées sur une carcasse en fer doux. Le circuit 1 d'inductance $L_1$, formé de $N_1 = 250$ spires. Le circuit 2 d'inductance $L_2$, formé de $N_2 = 1000$ spires. Si M est l'inductance mutuelle entre 1 et 2, le coefficient de couplage $k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$ $(0 < k < 1)$.




Le primaire est alimenté par un générateur B.F de résistance négligeable qui fournit une tension sinusoïdale de pulsation ω. ($R_1 = 0$)

Le secondaire est chargé par une résistance $R_u = 320\Omega$ ($R_u << L_2\omega$)

On suppose le transformateur est idéal ( k = 1). Déterminer en fonction de $N_1$ et $N_2$, $R_u$

1- Le rapport des tensions efficaces $V_2/V_1$ aux bornes du secondaire et du primaire.

2- Le rapport des intensités efficaces $I_2/I_1$ dans le secondaire et le primaire.

3- L'impédance d'entrée $Z^*$ du transformateur (vue entre les bornes d'entrée A1 et B1) du primaire ; on admettra que les inductances propres des circuits 1 et 2 sont proportionnelles au carré du nombre de spires

**B- fonction de transfert :**

On relie en série avec l'enroulement 1 une résistance $R_1$. L'enroulement 2, identique à celui de figure ($L_1 = L_2 = L$) est connecté sur une résistance de charge $R_u$. On se place en régime sinusoïdal de pulsation ω, $v_1 = E\sqrt{2}\cos\omega t$.

1- Etablir les expressions complexes de $\underline{V_1}$ et $\underline{V_2}$ en fonction de L, M, ω, $R_1$, $R_u$ et $\underline{i_2}$.

2- En déduire que la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \frac{H_0}{1 + j\,Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\ ;\ \text{avec}\quad H_0 = \frac{k}{2},\quad Q = \frac{\sqrt{1-k^2}}{2}\quad \text{et}\quad \omega_0 = \frac{R_1}{L\sqrt{1-k^2}}$$

3- On se place dans le cas d'un couplage total (k=1).

a- Montrer que $\underline{H} = \frac{A}{1 - j\,\frac{\omega_c}{\omega}}$, déterminer A et ωc. En déduire l'expression du gain en décibel $G_{dB}$.

b- Déterminer en fonction de $H_0$, $\omega_0$ et logω, les équations des asymptotes lorsque : ω tend vers zéro et l'infini.

c- Tracer le diagramme de Bode.

d- En déduire la nature du filtre et sa bande passante en fonction des données du problème.

4- On se place dans le cas où le couplage n'est pas total.

a- Donner l'expression du gain en décibel $G_{dB}$.

b- Déterminer en fonction de $H_0$, $\omega_0$ et logω, les équations des asymptotes lorsque : ω tend vers zéro et l'infini.

c- Tracer le diagramme de Bode.

d- En déduire la nature du filtre et sa bande passante en fonction des données du problème.

Khaou borhen



© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.  mahdystudies.tn

On considère maintenant le cas d'un transformateur idéal vérifiant : $L_p.Ls = M^2$ $\frac{Ls}{Lp} = \frac{N_s^2}{N_p^2}$ ; couplage total.

Les résistances sont négligeables devant les impédances inductives.

8- Simplifier l'expression précédente de $I_p$ (l'exprimer en fonction de E, $R_S$, et $R_p$). Interpréter à quoi est équivalent le circuit secondaire vu du circuit primaire.

9- Etablir les expressions des rapports $\frac{Us}{Ue}$ et $\frac{Is}{Ip}$ en fonction de Np et Ns

10- Déterminer l'expression de l'impédance d'entrée $Z_e$ du transformateur (vue entre les bornes d'entrée du primaire) ;

11- On introduit un rhéostat $R_p$ dans le circuit primaire. Quelle valeur de $R_p$ faut-il donner à ce rhéostat pour que la puissance dissipée dans la charge $R_S$ soit maximale

**B- Etude de la fonction de transfert**

On relie en série avec l'enroulement primaire une résistance $R_p$. L'enroulement secondaire est connecté sur une résistance de charge $R_S = R_p = r$. On se place en régime sinusoïdal de pulsation ω, $v_1 = E\sqrt{2}\cos\omega t$

1- Etablir les expressions complexes de $\underline{V_1}$ et $\underline{V_2}$ (tension de sortie) en fonction de L, M, ω, r, $\underline{i_1}$ et $\underline{i_2}$.

2- En déduire que la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \frac{H_0}{1 + j\,Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \text{ ; avec } H_0 = \frac{k}{2},\quad Q = \frac{\sqrt{1-k^2}}{2} \text{ et } \omega_0 = \frac{R_1}{L\sqrt{1-k^2}} \text{ ; } k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

3- On se place dans le cas d'un couplage total (k = 1).

a- Montrer que $\underline{H} = \frac{A}{1 - j\,\frac{\omega_c}{\omega}}$, déterminer A et ωc. En déduire l'expression du gain en décibel $G_{dB}$.

b- Déterminer en fonction de $H_0$, $\omega_0$ et logω, les équations des asymptotes lorsque : ω tend vers zéro et ∞.

c- Tracer le diagramme de Bode.

d- En déduire la nature du filtre et sa bande passante en fonction des données du problème.

4- On se place dans le cas où le couplage n'est pas total.

a- Donner l'expression du gain en décibel $G_{dB}$

b- Déterminer en fonction de $H_0$, $\omega_0$ et logω, les équations des asymptotes lorsque: ω tend vers zéro et ∞.

c- Tracer le diagramme de Bode.

d- En déduire la nature du filtre et sa bande passante en fonction des données du problème.



© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$u_2 = L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$

Dr Kchaou borhen



## Exercice 7

On considère deux spires coaxiales $S_1$ et $S_2$ de rayon $R_1$ et $R_2$ distantes de $d = O_1O_2$ parcourues respectivement par les courants $i_1$ et $i_2$ de même sens On suppose $R_1 << d$ et $R_2 << R_1$. Calculer de deux façons le cœfficient d'inductance mutuelle M entre les deux circuits.

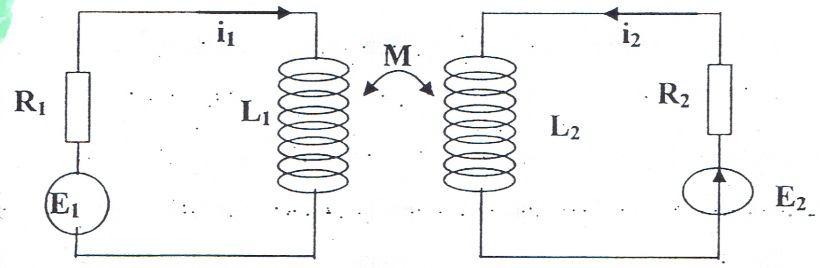
## Exercice 8

1- Soit les deux circuits couplés représentés ci-dessous. Pour simplifier les calculs, on suppose que le coefficient d'inductance mutuelle M est positif, $L_1 = L_2 = L$ et $R_1 = R_2 = R$. $E_1$ désigne la f.e.m constante du générateur.

a- écrire les deux équations différentielles couplées vérifiées par $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

b- en déduire deux équations différentielles découplés par le changement de variable : $I = i_1 + i_2$ et $J = i_1 - i_2$.

c- Déterminer $i_1(t)$ et $i_2(t)$ dans le cas où $M<L$ . On introduira les temps caractéristiques $\tau_1 = \frac{(L+M)}{R}$ et $\tau_2 = \frac{(L-M)}{R}$




2- Considérons deux circuits identiques. Chacun est constitué d'une bobine d'inductance propre L, de résistance négligeable, d'inductance mutuelle M et d'un condensateur de capacité C. L'un des circuits est alimenté par un générateur $e_1(t)$ (voir Figure).

Un couplage est réalisé par inductance mutuelle entre les deux oscillateurs électriques.

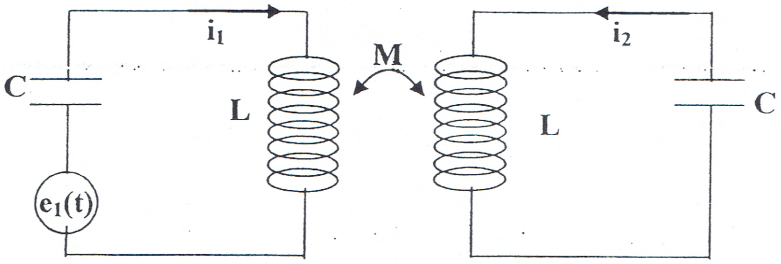
Etablir les équations différentielles régissant $q_1$ et $q_2$. $i_1 = \frac{dq_1}{dt}$ $i_2 = \frac{dq_2}{dt}$

3- On suppose que $e_1(t) = 0$ (régime libre).

4- En faisant les changements de variables $p = q_1 + q_2$ et $r = q_1 - q_2$. En déduire les équations différentielles non couplées.

4- Trouver les pulsations propres des modes correspondants

4- On suppose maintenant que $e_1(t) = E_1\cos(\omega t)$. Déterminer les d.d.p $v_1(t)$ et $v_2(t)$ aux bornes des deux ondensateurs en régime forcé.




Remarques :

- $\omega_1$ question 3 est la pulsation de symétrie c'à d si $\omega_2 = 0$ $\Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = 1$
- $\omega_2$ est la pulsation d'antisymétrie c'à d si $\omega_1 = 0$ $\Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = -1$



© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.



mahdystudies.tn

Exercice 8 : Transformateur

1) ⓐ Loi des mailles :

$$\begin{cases} E_1 = Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\ E_2 = Ri_2 + L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

ⓑ $$\begin{cases} E_1 + E_2 = R(i_1+i_2) + (L+M)\frac{d(i_1+i_2)}{dt} \\ E_1 - E_2 = R(i_1-i_2) + (L-M)\frac{d(i_1-i_2)}{dt} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E_1 + E_2 = RI + (L+M)\frac{dI}{dt} \\ E_1 - E_2 = RJ + (L-M)\frac{dJ}{dt} \end{cases} \quad \text{avec } I = i_1 + i_2 \text{ et } J = i_1 - i_2$$

$$I(t) = \frac{E_1+E_2}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)$$

$$J(t) = \frac{E_1-E_2}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$$

$$2i_1(t) = \frac{E_1+E_2+E_1-E_2}{2} - \frac{E_1+E_2}{2}e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{E_1-E_2}{2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

$$2i_1(t) = E_1 - \frac{E_1+E_2}{2}e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{E_1-E_2}{2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{i_2(t) = \frac{E_1}{2} - \frac{E_1+E_2}{4}e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{E_1-E_2}{4}e^{-\frac{t}{\tau_2}}}$$

$$i_2 = \frac{E_1+E_2}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) - \frac{E_1}{2} + \frac{E_1+E_2}{4}e^{\frac{-t}{\tau_1}} + \frac{E_1-E_2}{4}e^{\frac{-t}{\tau_2}}$$

$$\boxed{i_2(t) = \frac{E_2}{2} - \frac{E_1+E_2}{4}e^{\frac{-t}{\tau_1}} + \frac{E_1-E_2}{4}e^{\frac{-t}{\tau_2}}}$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

2) Loi des mailles:

$$\begin{cases} \frac{q_1}{C} + L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} - e_1(t) = 0 \\ \frac{q_2}{C} + L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{q_1}{C} + L\frac{d^2q_1}{dt^2} + M\frac{d^2q_2}{dt^2} - e_1(t) = 0 \\ \frac{q_2}{C} + L\frac{d^2q_2}{dt^2} + M\frac{d^2q_1}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + (LC + MC)\frac{d^2(q_1+q_2)}{dt^2} = 0 \\ q_1 - q_2 + (LC - MC)\frac{d^2(q_1-q_2)}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p + (LC + MC)\frac{d^2p}{dt^2} = 0 \\ r + (LC - MC)\frac{d^2r}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = A\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC+MC}}t + \varphi_1\right) = q_1 + q_2 \\ r = B\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC-MC}}t + \varphi_2\right) = q_1 - q_2 \end{cases}$$

$p(0) = (q_1+q_2)(0) = U_0$

$r(0) = (q_1-q_2)(0) = U_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\cos(\varphi_1) = U_0 \\ B\cos(\varphi_2) = U_0 \end{cases}$$

$$\frac{d(q_1+q_2)}{dt} = i_1 + i_2$$

$$\Rightarrow -\frac{A}{\sqrt{C(L+M)}}\sin(\varphi_1) = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0$$

de même $\varphi_2 = 0$

et $A = B = U_0$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

d'où $\begin{cases} p = q_1 + q_2 = U_0 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{C(L+M)}}t\right) \\ r = q_1 - q_2 = U_0 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{C(L-M)}}t\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{U_0}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{(L+M)C}}t\right) + \cos\left(\frac{t}{\sqrt{C(L-M)}}\right)\right) \\ q_2 = \frac{U_0}{2}\left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{(L+M)C}}\right) - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{C(L-M)}}\right)\right) \end{cases}$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.