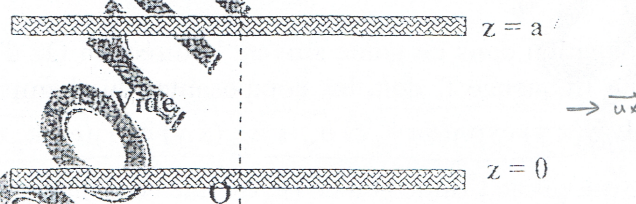


SERIE N°4

PROPAGATION GUIDEE

Problème 1

L'espace est rapporté au trièdre O : direct et orthonormé, de base (u_x, u_y, u_z) . Une onde électromagnétique TE (Transversale électrique) de fréquence f polarisée rectilignement, se propage dans le vide suivant la direction Ox entre deux plans métalliques parfaits ($z=0$ et $z=a$). Le champ électrique de cette onde en $M(x,y,z)$ entre les conducteurs est : $\vec{E} = E_0(z) \cos(\omega t - kx) u_y$. La célérité de la lumière dans le vide est $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.



Remarque: l'onde obtenue n'est pas une onde plane.

- 1- Montrer que l'amplitude $E_0(z)$ de cette onde obéit à une équation différentielle du second ordre.
- 2- a- Déterminer la loi $E_0(z)$ dans les trois cas : $\omega < kc$, $\omega = kc$, $\omega > kc$. Conclusion?
b- Montrer qu'il ne peut y avoir propagation des ondes de mode N (N entier) que pour des fréquences f , supérieures à une fréquence de coupure f_N , qu'on exprimera en fonction de $a, |N|$ et c .
- 3- Déterminer le champ électrique $E(x, z, t)$ et magnétique $B(x, z, t)$ de l'onde, lorsqu'elle existe. Dans quels plans cette onde est-elle TEM ?

Problème 2

Une cavité parallélépipédique rectangulaire vide est délimitée par un conducteur parfait. Un des sommets est à l'origine O des axes (O, x, y, z) . Les points inférieurs à la cavité sont définis par les conditions $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$; $0 \leq z \leq c$; on suppose $a < b < c$.

- 1- On cherche une solution des équations de Maxwell dans la cavité telle que le champ électrique soit de la forme :

$$E_x = E_1 \cos(k_1 x + \phi_1) \sin(k_2 y + \phi_2) \sin(k_3 z + \phi_3) e^{j\omega t}$$

$$E_y = E_2 \sin(k_1 x + \phi_1) \cos(k_2 y + \phi_2) \sin(k_3 z + \phi_3) e^{j\omega t}$$

$$E_z = E_3 \sin(k_1 x + \phi_1) \sin(k_2 y + \phi_2) \cos(k_3 z + \phi_3) e^{j\omega t}$$

Quelles relations doivent vérifier $k_1, k_2, k_3, E_1, E_2, E_3$ et ω ?

équation de dispersion: relation entre ω et k et $\Rightarrow$ relation entre ω et E

- 2- Ecrire les conditions aux limites vérifiées par E . Exprimer k_1, k_2 et k_3 en fonction des dimensions de la cavité et de trois nombres entiers m, n, p . Calculer ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 .

En déduire les valeurs $f_{m,n,p}$ des fréquences du champ électrique observable dans la cavité. Quelle est la plus petite valeur possible f_0 de ces fréquences.

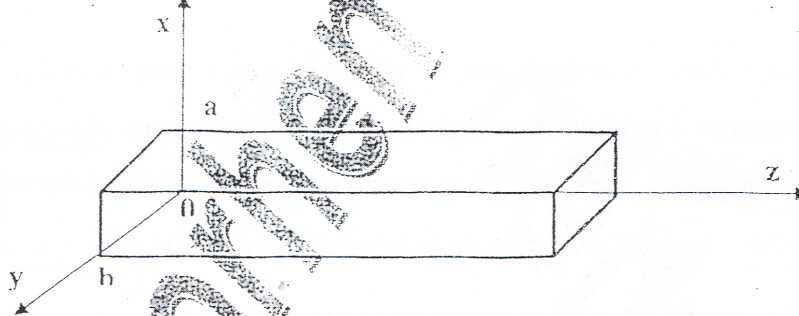
- 3- Calculer les composantes du champ magnétique dans la cavité.

- 4- a- Calculer l'énergie électrique emmagasinée dans la cavité. On envisagera les différents cas possibles suivant les valeurs de k_1, k_2 et k_3 .

- b- Calculer dans les mêmes cas l'énergie W_{mag} emmagasinée. En déduire l'expression de W_{totale} dans la cavité.

Problème 3

Quatre plans métalliques parfaitement conducteurs en $x=0$, $x=a$, $y=0$ et $y=b$ sur la figure ci-dessous délimitent un "guide d'ondes" de longueur infinie suivant Oz, de section droite rectangulaire.



On se propose d'étudier la propagation dans ce guide suivant la direction Oz d'une onde électromagnétique T.E monochromatique de très haute fréquence f , dont les composantes du champ électrique dans la cavité en $M(x,y,z)$ sont de la forme :

$$\vec{E} = E_{ox}(x,y) \exp j(\omega t - k_g z) \vec{u}_x + E_{oy}(x,y) \exp j(\omega t - k_g z) \vec{u}_y$$

où $\vec{k}_g = k_g \vec{u}_z$ est le vecteur d'onde qui pilote l'onde guidée (k_g est une constante positive).

1- a- Etablir l'équation de propagation du champ $\vec{E}$ dans le vide

b- Ecrire deux équations différentielles du second ordre, l'une (1) en $E_{ox}(x,y)$ et l'autre (2) en $E_{oy}(x,y)$

2- On admettant les solutions de (1) sous la forme du produit de deux fonctions f et g :

$$E_{ox}(x,y) = f(x) \cdot g(y) \quad \text{et on posera} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = -\alpha^2 \cdot f(x) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 g}{dy^2} = -\beta^2 \cdot g(y)$$

a- Déterminer la relation qui lie α , β , k_g et ω . : *équation de dispersion*

b- En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère dans le vide, montrer que l'amplitude de la composante B_z

de $\vec{B}$ est $B_{oz} = \frac{1}{\omega} (\alpha^2 + \beta^2) \int E_{ox} dy$

3- a- Montrer que les conditions aux limites imposent $g(0) = 0$; $g(b) = 0$; $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=0} = 0$ et $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a} = 0$

b- En déduire l'expression de la composante : $E_x = E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \exp j(\omega t - k_g z)$

où m et n sont deux entiers et E_0 la valeur maximale de l'amplitude E_{ox}

4- a- En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, exprimer la composante instantanée E_y du champ $\vec{E}$ à l'aide de E_0 et des entiers m et n .

b- En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, exprimer les composantes instantanées de $\vec{B}$ de l'onde guidée en $M(x,y,z)$ à l'aide de E_0 et des entiers m et n .

5- Pour chacune des modes T.E_{m,n} correspondant aux entiers m et n , il existe une fréquence de coupure au dessous de la quelle l'onde ne se propage pas, exprimer $f_{c_{m,n}}$ en fonction de a , b et m , et n .

6- a- Exprimer la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g des modes T.E_{m,n}. vérifier que $v_\phi \cdot v_g = c^2$

b- Exprimer la longueur d'onde λ_g de propagation dans le guide en fonction de a , b , m , n et de la longueur d'onde $\lambda_0 = c/f$ dans le vide infini.

7- Exprimer pour ce mode T.E, l'impédance d'onde $Z(\omega)$ définie par $Z(\omega) = \mu_0 \frac{E_\perp}{B_\perp}$ où $E_\perp$ et $B_\perp$ sont les composantes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ perpendiculairement à la direction de propagation.

8- Exprimer le vecteur de Poynting moyen $\langle \vec{R} \rangle$ au cours du temps en $M(x,y,z)$. En déduire la puissance moyenne transportée par ce guide d'ondes ($P_m = \iint \langle \vec{R} \cdot \vec{u}_z \rangle dx dy$).

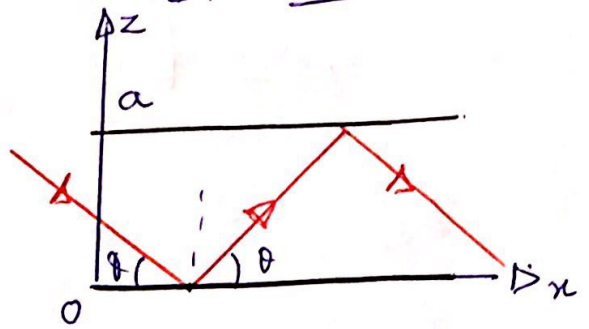
MP2: 2004 ...

guide d'onde

PT2: 2011
PT2: 2018 ...

$$\vec{E} = E_0(z) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$



$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_0(z) \cos(\omega t - kx) = 0$$

$$-k^2 E_0(z) + \frac{d^2 E_0(z)}{dz^2} - \frac{1}{c^2} (-\omega^2) E_0(z) = 0$$

$$\frac{d^2 E_0(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_0(z) = 0$$

$$r^2 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) = 0$$

1^{er} cas : $\omega < kc$
 $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = -\alpha^2 < 0$

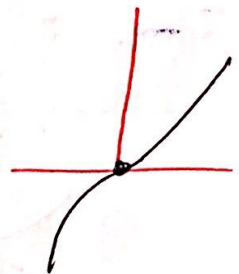
$$r^2 - \alpha^2 = 0, \quad r = \pm \alpha$$

$$E_0(z) = A_1 e^{\alpha z} + A_2 e^{-\alpha z}$$

$$E_0(z) = A_1' \cosh(\alpha z) + A_2' \sinh(\alpha z)$$

métal parfait: $z=0 \quad E(0)=0 = A_1'$
 $z=a \quad E(a)=0 = A_2' \sinh(\alpha a)$

30 Dec (7)



$$A_1' = A_2' = 0 \quad \text{longue } \nexists \text{ si } \underline{\omega < kc}$$

$$\underline{2^{es} \text{ cas}} \quad \underline{\omega = kc} \quad E_0(z) = A_1 z + A_2$$

$$E_0(0) = 0$$

$$E_0(a) = 0 = A_1 a$$

$$A_2 = 0$$

$$A_1 = 0$$

$$\underline{3^{es} \text{ cas}} \quad \underline{\omega > kc} ; \quad \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \kappa^2 > 0$$

$$E_0(z) = A_1 \cos(\kappa z) + A_2 \sin(\kappa z)$$

$$E_0(0) = A_1 = 0$$



$$E_0(a) = A_2 \sin(\kappa a) = 0$$

$$\Rightarrow \kappa a = n\pi ; \quad \kappa_n = \left(\frac{n\pi}{a} \right) = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)^{1/2}$$

$$k^2 = \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] > 0$$

$$\omega > \left(\frac{c\pi}{a} \right) n = \omega_{n \text{ coupure}}$$

$$\omega_1 = \left(\frac{c\pi}{a} \right)$$

30 Dec (8)

$$\vec{E} = E_0(z) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

onde progressive $(\omega t)^+$, stationnaire (oz)

polarisé rectilignement (oy) .

$$\star \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ E_y(x,z,t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\hookrightarrow -ik$
OPlane

$$-\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} ; \quad -\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial B_x}{\partial t} = E_0 \left(\frac{n\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx)$$

$$B_x = E_0 \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \sin(\omega t - kx)$$

$$B_z \neq 0 \quad \vec{B}_x \parallel \vec{k} \Rightarrow \text{n'est pas T.M}$$

$$\vec{E} \perp \vec{k} \quad (\text{T.E.})$$

30 Dec (9)

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 & E_y & 0 \\ E_x & 0 & B_z \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} E_y B_z \\ 0 \\ -B_y E_x \end{vmatrix}$$

$$\langle B_x E_y \rangle = 0$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle E_y B_z \rangle \vec{e}_x$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\text{Re}[\vec{E} \wedge \vec{B}^*]}{\mu_0}$$

$$U_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad U_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Ex 2

$$\underline{E}_x = E_1 \cos(k_1 x + \varphi_1) \sin(k_2 y + \varphi_2) \sin(k_3 z + \varphi_3) e^{i\omega t}$$

$$\underline{E}_y = E_2 \sin(k_1 x + \varphi_1) \cos(k_2 y + \varphi_2) \sin(k_3 z + \varphi_3) e^{i\omega t}$$

$$\underline{E}_z = E_3 \sin(k_1 x + \varphi_1) \sin(k_2 y + \varphi_2) \cos(k_3 z + \varphi_3) e^{i\omega t}$$

$$\textcircled{*} \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

30 Dec (10)

$$\Delta E_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$-k_1^2 E_x - k_2^2 E_x - k_3^2 E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = 0$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k^2$$

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

$$(*) \quad \text{div } \vec{E} = 0 \quad ; \quad \boxed{k_1 E_1 + k_2 E_2 + k_3 E_3 = 0}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$m=0, \quad x=a$$

$$E_{1T} = E_{2T}$$

$$B_{1N} = B_{2N}$$

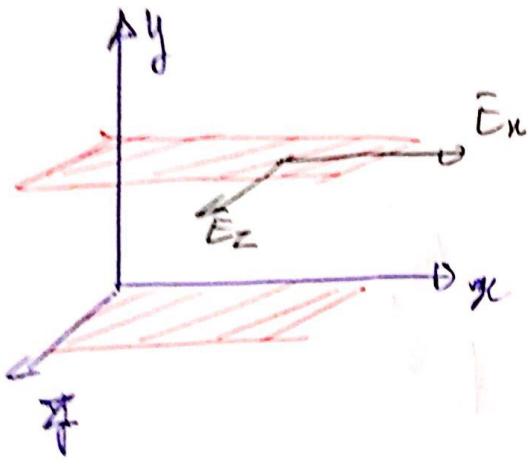
$$E_y(x=0, t) = 0$$

$$E_y(x=a, t) = 0$$

$$\sin \varphi_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \varphi_1 = 0$$

$$\sin(k_1 a) = 0 \quad \longrightarrow \quad k_1 a = m\pi$$

30 Dec (11)



$$y=0 \rightarrow \varphi_2=0$$

$$y=b \rightarrow k_2 b = n\pi$$

$$\left/ \begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \end{array} \right.$$

$$\varphi_3=0$$

$$k_3 c = p\pi$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$$

$$\pi^2 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2} \right] = \frac{\omega^2}{c_0^2} = \frac{(2\pi f)^2}{c_0^2}$$

$$f_{m,n,p} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}}$$

$$f_{0,0,1} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\frac{1}{c^2}}$$

$$3) \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{ voir 2b3 : PT2: 2015}$$

30 Dec (12)