ELECTROMAGNETIQUE
(RAYONNEMENT)
SERIE N°5

Problème: **Rayonnement dipolaire**

I- Etude du dipôle oscillant

Considérons un dipôle formé de la charge –q fixe situé en N et de la charge + q mobile, situé en P et tel que : NP =2a cosωt où en notation complexe, NP =2a exp jωt.

La charge +q décrit un mouvement sinusoïdale de pulsation ω. On se placera en coordonnées sphériques :

1-On suppose que **r** = $\|\overrightarrow{OM}\|$ et grande devant **a**. Quelle est l'expression du moment dipolaire de cette distribution de charge. On pose 2aq = p_0.

2-a- Sachant que la charge +q est animé d'un mouvement non relativiste, quelle est l'inégalité satisfaite par la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique créée par le dipôle oscillant ?

b- Pour quelles valeurs de λ l'onde électromagnétique appartient-elle au domaine visible ?

Le potentiel vecteur retardé crée par le dipôle oscillant au point M est donné par:

$$\underline{\vec{A}}(M,t) = j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\exp j(\omega t - \vec{k}\vec{r})}{r} \vec{e}_z \qquad avec \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_r$$

Le potentiel scalaire V(M,t) crée par une tel distribution est donné, à l'ordre le plus bas en a/r, par la relation:

$$\underline{V}(M,t) = \frac{\underline{p}\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(1 + j\ \vec{k}.\vec{r}) \qquad avec \qquad \underline{p} = p_0 \exp j\,(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$$

3-a- Montrer que cette expression est compatible avec celle obtenue dans le cas statique.

b- Le potentiel V est écrit sous la forme d'une somme de deux termes; donner pour chacun d'eux l'échelle spatiale associée à r.

Le calcul de champ magnétique créé par la distribution conduit à l'expression :

$$\underline{\vec{B}}(M,t) = j\omega\,(1 + j\,\vec{k}.\vec{r})\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\underline{p}\sin\theta}{r^2}\vec{e}_\varphi$$

4- Que devient cette expression pour des champs lointains, c'est-à-dire pour r >>λ?

Le calcul du champ électrique $\vec{E}$, conduit aux relations :

$$\underline{E}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{p}}{r^3}2\,(1 + j\,\vec{k}.\vec{r})\cos\theta \ ;\ \underline{E}_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{p}}{r^3}(1 + j\,\vec{k}.\vec{r} - (\vec{k}.\vec{r})^2)\sin\theta \ ;\ \underline{E}_\varphi = 0$$

5-a-Montrer que cette expression est compatible avec celle obtenue dans le cas statique.

b-En déduire l'expression des composantes de E pour des champs lointains

6- A quelle condition sur l'angle θ peut-on écrire E_θ très supérieur à E_r ?

II- Etude du rayonnement lointain

Dans la suite du problème on se situera dans l'approximation des champs lointains ou zone de rayonnement (r >> λ). Dans cette partie l'étude se fera en notation réelle.

1-a Déterminer la valeur du rapport **E / B**.

b- En déduire la structure locale (en M) de l'onde rayonnée par le dipôle oscillant.

2-a- Calculer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$ en fonction de E, c et μ_0 et d'un vecteur unitaire de la base sphérique.

b- Dans quelle direction l'énergie électromagnétique se propage-t-elle ?

c- En optique géométrique, comment appelle-t-on les lignes de champ du vecteur de Poynting ?

3- Déterminer l'expression de l'intensité électromagnétique de l'onde I = <$\|\vec{R}\|$>, en fonction de ω, p_0, c, ε_0, r et θ.

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés. 1 mahdystudies.tn

4-a Pour quelle valeur de θ la fonction $I=<\|\vec{R}\|>$ est elle maximale ? On note I_{max} l'expression obtenue. Dans quelle direction la puissance rayonnée est–elle nulle?

b- Former le rapport $\frac{I(\theta)}{I_{max}}$ et tracer le diagramme polaire correspondant.

5-a- Montrer que la puissance électromagnétique P moyenne rayonnée dans tout l'espace par le dipôle s'écrit sous la forme suivante :

$$P=\frac{1}{12\pi}\frac{p_0^2\omega^4}{\varepsilon_0 c^3}$$

b- Justifier rapidement pourquoi la puissance P ne dépende pas de r.

III- Diffusion de Rayleigh et couleur du ciel

Pour décrire la diffusion par l'atmosphère terrestre de la lumière venant du soleil, le modèle simplifié suivant est adopté. Un électron atomique d'une molécule constituant l'air, est mis en mouvement sous l'action d'une onde électromagnétique plane progressive dont le champ électrique est pris polarisé rectilignement : $\vec{E}=E_0\cos\omega t\,\vec{u}_z$.

Masse du proton: $1{,}7\ 10^{-27}$ kg : Charge de l'électron: $-e = -1{,}6\ 10^{-19}$ C . Masse de l'électron : $9{,}1\ 10^{-31}$ kg Célérité de la lumière dans le vide : $c= 3.10^8$ m/s . Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ (SI).

1- a- Comparer la taille d'un atome aux longueurs d'ondes du spectre visible. Quelle hypothèse peut-on faire alors quant au champ électromagnétique de l'onde lumineuse à l'échelle de l'atome ?

b- Pourquoi peut-on négliger l'influence du champ magnétique de l'onde lumineuse ?

c- Pourquoi est-il possible de limiter notre étude à un champ électrique monochromatique ?

d- Est-il légitime de se borner à l'étude d'un champ électrique à polarisation rectiligne ?

2- L'électron de masse m et de charge –e est soumis dans l'atome à une force de rappel proportionnelle à l'écart par rapport à l'équilibre: $-m\omega_0^2\,\vec{r}$ (où ω_0 est la pulsation de résonance correspondant à un pic d'absorption) ; et une force de frottement $-m\Gamma\,\vec{r}$, le terme de frottement Γ décrivant les phénomènes dissipatifs, dépendant du milieu.

a- Écrire sur Oz l'équation du mouvement de l'électron, et déterminer en régime permanent, l'expression du déplacement z(t) de l'électron.

b- En déduire l'expression du moment dipolaire $\vec{p}(t)$ constitué par cet électron mobile et le reste de l'atome en O.

c- On définit le vecteur polarisation $\vec{P}=\frac{d\vec{p}}{d\tau}=\varepsilon_0\,\underline{\chi}(\omega)\,\vec{E}$; $\underline{\chi}(\omega)$ est la susceptibilité électrique du milieu sans dimension. Déterminer la partie réelle et imaginaire de : $\underline{\chi}(\omega)=\chi'(\omega)-j\chi''(\omega)$: graphe ;

d- Quelle valeur, exprimée en fonction de ω_0 et Γ, faut-il donner à la constante Q pour pouvoir écrire $\underline{H}(i\omega)$ sous la forme ? $\underline{H}(j\omega)=\frac{\chi_e(\omega)}{\chi_e(\omega=0)}=\frac{1}{1-\omega^2/\omega_0^2+j\omega/Q\omega_0}$

☺ Tracer le diagramme de Bode correspondant à la fonction de transfert dans le cas où Q=10. On précisera les équations des asymptotes et on qualifiera le filtre ainsi obtenu.

☻ Proposer un dispositif électronique passif simple caractérisé par la même fonction de transfert.

☺ À quelle condition portant sur Q apparaît-t-il un phénomène de résonance ?

3- Un dipôle électrique variable de moment $p(t)=p_0\cos(\omega t)$ rayonne une onde électromagnétique dont la puissance instantanée $P_{ray}(t)$ est donnée par la formule de Laromor : $P_{ray}(t)=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}a^2(t)$; $a(t)$ accélération de l'électron .

a- Démontrer cette expression et déterminer sa valeur moyenne $<P_{ray}(t)>$?

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés. 2 mahdystudies.tn

b- En déduire l'expression de la section efficace de diffusion de rayonnement $\sigma(\omega)$, définie par le rapport $< P_{ray}(t) > / I_0$ où I_0 puissance moyenne surfacique de l'O.P.P.M incidente.

c- On introduit le rayon classique de l'électron r_e, défini par l'égalité énergétique $mc^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e}$.

Montrer que la section efficace de diffusion de rayonnement $\sigma(\omega) = \frac{8}{3}\pi r_e^2 f(\frac{\omega}{\omega_0})$. Tracer l'allure de la graphe $\sigma(\omega)$ sachant que $Q >> 1$. Quel phénomène retrouve t-on au voisinage de la pulsation ω_0.

4- a- Quel est l'expression simplifiée de $< P_{ray}(t) >$ si on néglige les frottements

b- Calculer la longueur d'onde λ_0 correspondant à $\omega_0 = 2{,}3.10^{16}$ rad.s^{-1}. Dans quel domaine de rayonnement se situe le pic d'absorption ?

La lumière visible est composée, en première approximation, d'un spectre d'intensité uniforme de longueurs d'onde comprises entre 0,32µm (violet) et 0,75µm (rouge). En déduire une expression simplifiée de $< P_{ray}(t) >$. Commentaire.

5- L'atmosphère comporte **n** molécules par unité de volume dont les rayonnements sont incohérents entre eux de telle sorte que la puissance diffusée par unité de volume est $P_d = n < P_{ray}(t) >$.(4-b)

a- Comment évolue l'intensité $I = < \| \vec{R} \| >$ du faisceau lumineux le long de l'axe de propagation ?

Montrer en faisant le bilan des puissances dans un petit cylindre de base S et de longueur dz suivant la direction de propagation, que l'intensité à la traversée d'une couche diffusante d'épaisseur dz et pour laquelle n est constant s'écrit : $I_\lambda(z) = I_0 \exp(-z/H_\lambda)$.

Exprimer H_λ en fonction de n, λ/λ_0 et d'autres termes.

b- AN : Estimer **n** pour un gaz parfait à la surface de la terre dans les conditions normales de température et de pression. Puis calculer H_λ pour le violet et le rouge.

c- En déduire la couleur dominante du ciel en plein jour et par temps clair, puis sa couleur en coucher.

6- On rappelle que le champ électrique au point M situé à grande distance s'écrit : $\vec{E}(r,t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} a(t - \frac{r}{c}) \sin\theta \, \vec{e}_\theta$; a(t) accélération de l'électron.

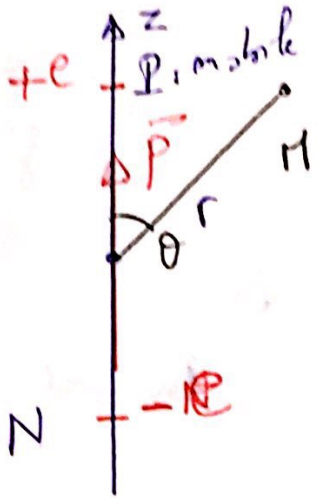
On suppose maintenant que l'onde se propage suivant l'axe Ox n'est plus polarisée ; cette onde peut être décrite par la superposition de deux ondes de même amplitude E_0 l'une polarisée suivant Oz l'autre suivant oy mais indépendante l'une de l'autre.

- **a-** Déterminer pour un point M du plan xOy, repéré par $\alpha = (Ox, \vec{r})$ et très éloigné de l'origine les composantes du champ rayonné par l'électron atomique : on note $\vec{E}_{//}$ la composante située dans le plan xOy, et $\vec{E}_\perp$ la composante selon Oz.
- **b-** Evaluer en fonction de α, Y a-t-il une ou plusieurs directions pour les quelles le champ diffusé est polarisé linéairement.

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés. 3 mahdystudies.tn

Série 5

(Electromag) rayonnement



1) $\vec{P} = q(\overrightarrow{NP}) = (q\,2a)\cos(\omega t)\,\vec{e}_z$

$\vec{P} = P_0 \cos(\omega t)\,\vec{e}_z$ oscillant

$a \ll r$: approximation dipolaire

2) a) $v \ll c$; $v = \frac{dOP}{dt} = \frac{d}{dt}(a\cos(\omega t))$

$v(t) = -[a\omega]\sin(\omega t)$; $v_{max} \ll c \Rightarrow$

$\Rightarrow a\omega \ll c \Rightarrow a \cdot \frac{2\pi c}{\lambda} \ll c$

$2a \ll \frac{\lambda}{2\pi} < \lambda \Rightarrow 2a \ll \lambda$ (AR.Q.S)

b) $\lambda_{visible} \in [0{,}4 - 0{,}8\,\mu m]$

violet ↔ rouge

$$\underline{V} = \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\underline{P}}{r^2} + j\frac{(k\vec{r})\underline{P}}{r^2}\right)$$

$$\underline{V} = \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\underline{P}}{r^2} + \frac{(\dot{\underline{P}})}{r}\right]$$

30 Déc (1)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Cas statique : $\omega = 0$. $\underline{k}\,\underline{r} = 0$.

$$\underline{V} = \frac{p_0 \cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}$$

3) b) terme (1) $\dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2} \sim \dfrac{1}{r^2}$

$r \ll \lambda$ dominant

2ème terme $j\dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon}\dfrac{k}{r} \sim \dfrac{1}{r}$

$r \gg \lambda$: $kr = \dfrac{2\pi}{\lambda} r \gg 1 \neq 0$

$$\underline{V} \simeq \frac{j p k \cos\theta}{4\pi\varepsilon r}$$

Zone de rayonnement : champ lointain

4) $\underline{\vec{B}} = j\omega\left(1 + j\underline{k}\,\underline{r}\right)\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{p\sin\theta}{r^2}\vec{e}_\varphi$

si $\left(\underline{k}\,\underline{r}\right) \gg 1$;

$$\underline{\vec{B}} = -\frac{\omega^2}{c}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p\sin\theta}{r}\vec{e}_\varphi$$

30 Déc (2)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\ddot{p})}{rc}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

5) $\vec{E} = \begin{cases} E_r = \dfrac{2p}{4\pi\varepsilon r^3}\left(1 + j\bar{k}\bar{r}\right)\cos\theta \\ E_\theta = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon r^3}\left(1 + j\bar{k}\bar{r} - k^2r^2\right)\sin\theta \end{cases}$

$1 \rightarrow$ proche ; $j\bar{k}\bar{r} \rightarrow$ moyen ; $\rightarrow$ lointain

a) $\vec{E}(\text{statique}) = \begin{cases} \dfrac{2p_0}{4\pi\varepsilon}\dfrac{\cos\theta}{r^3}\,\vec{e}_r \\ \dfrac{p_0}{4\pi\varepsilon r^3}\sin\theta\,\vec{e}_\theta \end{cases}$

$r \gg \lambda$: $\vec{E}(r \gg \lambda) = \vec{E}\left(|\bar{k}\bar{r}| \gg 1\right)$

$$\begin{cases} E_r = j\dfrac{2p}{4\pi\varepsilon}\dfrac{k}{r^2}\cos\theta \sim 1/r^2 \\ E_\theta = \dfrac{-pk^2}{4\pi\varepsilon r}\sin\theta \sim 1/r \end{cases} ; \; -\omega^2 p = \ddot{p}$$

$|E_\theta| \gg |E_r|$: si $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pi$

30 Déc (3)

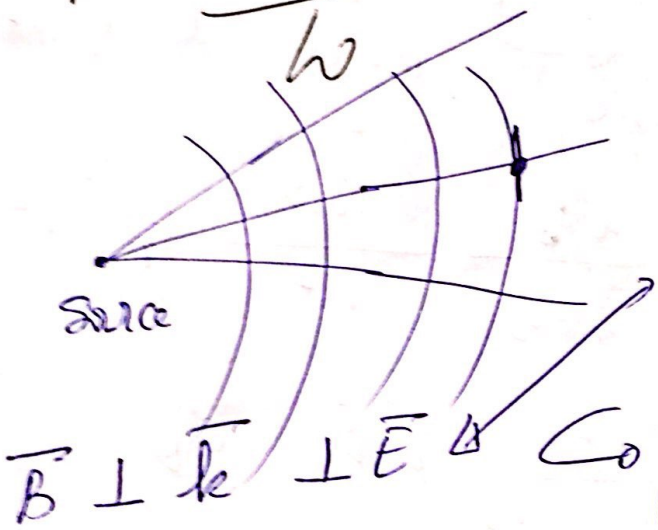
© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\vec{E}(r \gg \lambda) \simeq \vec{E}_\theta = \frac{(\ddot{p})}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{r} \vec{e}_\theta$$

lointain

$$\vec{B}(r \gg \lambda) = \vec{B}_\varphi = \frac{\mu_0 \ddot{p}}{4\pi c} \frac{\sin\theta}{r} \vec{e}_\varphi$$

$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ .. localement plane



$\vec{B} \perp \vec{k} \perp \vec{E}$

$\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|} = c$

$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}$

* $\vec{rot}\,\vec{B} = -i\vec{k} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} i\omega \vec{E}$

$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_r$,

$\boxed{\vec{E} = \frac{(\vec{B} \wedge \vec{k}) c^2}{\omega}}$

$\boxed{\vec{E} = c(\vec{B} \wedge \vec{e}_r)}$

30 Déc (4)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

2) a) $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_\theta B_\varphi}{\mu_0} \vec{e}_r = \frac{E_\theta^2}{c\mu_0} \vec{e}_r$

b) $\vec{v}_e = \frac{\langle \vec{R} \rangle}{\langle u_{em} \rangle} \Rightarrow$ radialement

c) les rayons lumineux

3) $I = \langle \| \vec{\Pi} \| \rangle = \langle \| \vec{R} \| \rangle = \frac{d\mathcal{P}}{dS}$

en W/m^2

$$I = \frac{\langle \| \vec{E}_0 \|^2 \rangle}{\mu_0 c} = \frac{1}{\mu_0 c} \cdot \frac{\sin^2\theta}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 c^4 r^2} \langle (\ddot{p})^2 \rangle$$

or $p(t) = p_0 \cos(\omega t - kr)$

$$(\ddot{p}) = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t - kr)$$

$$\langle (\ddot{p})^2 \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{2}$$

, $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$

$$I = \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} = I_{max} \sin^2\theta$$

4) a) I est max $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$; $\theta \in [0, \pi]$

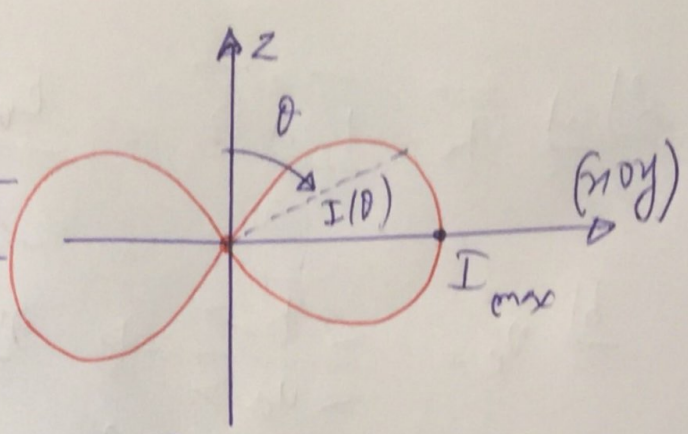
I est min $\Rightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi$

suite (5)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

b) $I(\theta) = I_{max} \sin^2\theta$

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin^2\theta$	0	$1/4$	$1/2$	$3/4$	1



5] a) $P = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle \, \vec{dS}$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta)\, r^2 \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2}$$

$$= \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{1}{12\pi} \frac{p_0^2 \omega^4}{\varepsilon_0 c^3}$$

$$\frac{P_{violet}(\omega)}{P_{rouge}(\omega)} = \left(\frac{\omega_{violet}}{\omega_{Rouge}}\right)^4 = \left(\frac{\lambda_R}{\lambda_V}\right)^4 = \left(\frac{0,8}{0,4}\right)^4 = 16$$

b) $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \sim \frac{1}{r^2} \Rightarrow P = cte.$

$dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

le milieu est non absorbant (vide) : $k = \frac{\omega}{c}$

($P = cte$)

30 Déc (6)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\vec{E}(r \gg \lambda) = \frac{\mu_0 \ddot{\vec{p}} \sin\theta \, \vec{e}_\theta}{4\pi r}$$

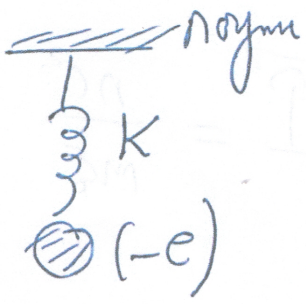
$$\vec{B}(r \gg \lambda) = \frac{\mu_0 \ddot{\vec{p}} \sin\theta \, \vec{e}_\varphi}{4\pi r c}$$

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c} \; ; \quad \vec{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -i \vec{k} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} i\omega \vec{E}$$

$$\vec{E} = -\frac{(\vec{k} \wedge \vec{B})\, c^2}{\omega} \; , \quad k = \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{E} = (\vec{B} \wedge \vec{e}_r)\, c$$



$$\vec{F}_{rappel} = -m\omega_0^2 \vec{r}$$

$$\vec{F}_{vis} = -\frac{m}{\tau}\dot{\vec{r}} = -m\Gamma\dot{\vec{r}}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E} - m\omega_0^2\vec{r} - m\Gamma\dot{\vec{r}}$$

$$\boxed{\ddot{\underline{z}} + \Gamma\dot{\underline{z}} + \omega_0^2 \underline{z} = -\frac{e}{m}\underline{E}}$$

$$\underline{E} = E_0 e^{i\omega t} \; , \quad \ddot{\underline{z}} = -\omega^2 \underline{z} \; ; \quad \dot{\underline{z}} = i\omega \underline{z}$$

(1)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\underline{z} = -\frac{e}{m}\,\frac{\underline{E}}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\omega\Gamma}$$

b) $\vec{p} = q(\vec{NP}) = -e\vec{r}$

$$\vec{p} = +\frac{e^2}{m}\,\frac{\vec{E}}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\Gamma\omega}$$

$\vec{P}$ = vecteur polarisation $= n\vec{p}$ ← donnée

$$\vec{P} = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}\,\frac{\varepsilon_0\vec{E}}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\Gamma\omega} = \varepsilon_0\underline{\chi}(\omega)\vec{E}$$

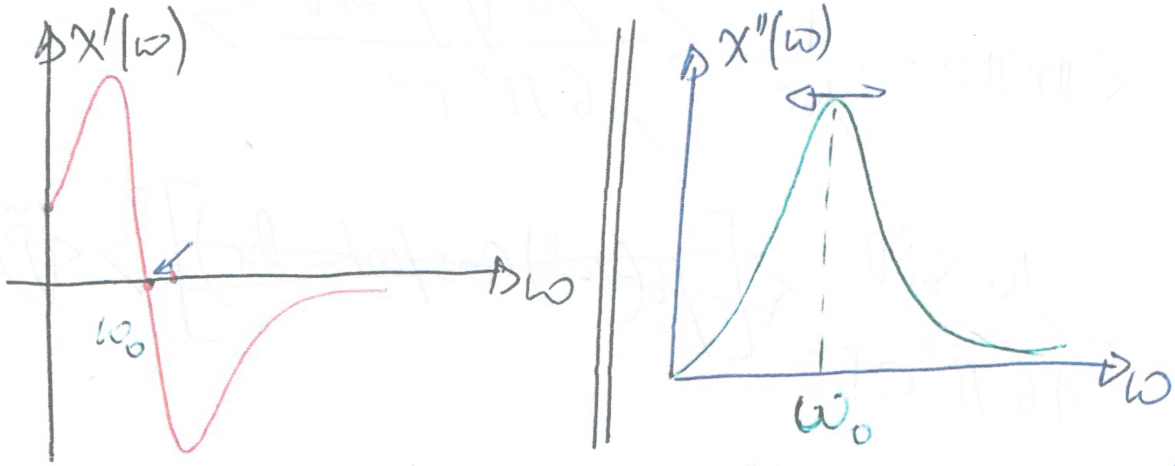
$$\underline{\chi}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\Gamma\omega}$$

$$\underline{\chi}(\omega) = \chi'(\omega) - j\chi''(\omega)$$

$$= \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\Gamma\omega)^2}\left((\omega_0^2-\omega^2) - j\Gamma\omega\right)$$

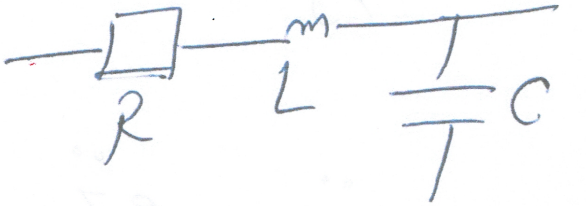
(2)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.



$$\underline{\chi}(\omega=\omega_0) = -i\,\chi''(\omega_0) \; ; \; \chi(0) = \omega_p^2/\omega_0^2$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + i\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left(\frac{1}{Q}\right)} = \frac{\underline{\chi}(\omega)}{\chi(0)}$$



$$G_{dB} = -40 \log x$$

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\underline{n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\underline{\varepsilon_r} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1+\underline{\chi}(\omega)\right)$$

3) $$P_{rayonnée} = \iint \langle \vec{R} \rangle \cdot \vec{dS}$$

$$= \iint \left\langle \frac{E_\theta^2}{\eta c} \right\rangle r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

(3)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\langle \|\vec{R}\| \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \left\langle \frac{\mu_0^2 (\ddot{p})^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 r^2} \right\rangle$$

$$= \frac{\mu_0 \sin^2\theta}{16\pi^2 c r^2} \left\langle \left[p_0(-\omega^2)\cos(\omega t - kr) \right]^2 \right\rangle \langle (\ddot{p})^2 \rangle$$

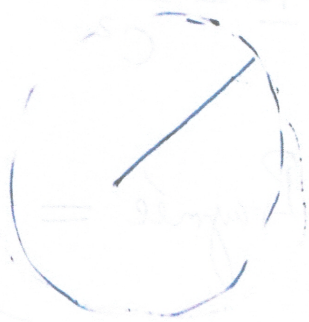
$$= \frac{\langle (\ddot{p})^2 \rangle \sin^2\theta}{16\pi^2 c^3 \varepsilon r^2}$$

$$P_{ray} = \frac{(\ddot{p})^2}{16\pi^2 \varepsilon c^3} \frac{r^2}{r^2} \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = 4/3 \qquad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

$$P_{ray} = \frac{(\ddot{p})^2}{6\pi\varepsilon c^3} \quad ; \quad \ddot{p} = -e\ddot{z}$$

$$P_{ray} = \frac{e^2 a^2(t)}{6\pi\varepsilon c^3}$$



(4)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\langle a^2(t)\rangle = \frac{1}{2}\,\text{Réel}\left[\ddot{\underline{z}}\;\ddot{\underline{z}}^*\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{E_0^2\, e^2\,(-\omega^2)^2}{m^2\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\Gamma\omega)^2\right]}$$

$$\langle P_{ray}\rangle = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi\varepsilon_0 m^2 c^3}\,\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\Gamma\omega)^2}$$

b) $\sigma = \dfrac{\langle P_{ray}\rangle}{I_0}$; watt

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\,\vec{e}_x$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz)\,\vec{e}_y$$

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} = \langle \|\vec{R}\| \rangle \rightarrow \text{watt}/m^2$$

$$\sigma = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi\varepsilon_0 m^2 c^3}\,\frac{2}{\varepsilon_0 c E_0^2}\,f(\omega)$$

$$\sigma = \frac{e^4}{6\pi\varepsilon_0^2 (mc^2)^2}\,\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\Gamma\omega)^2}$$

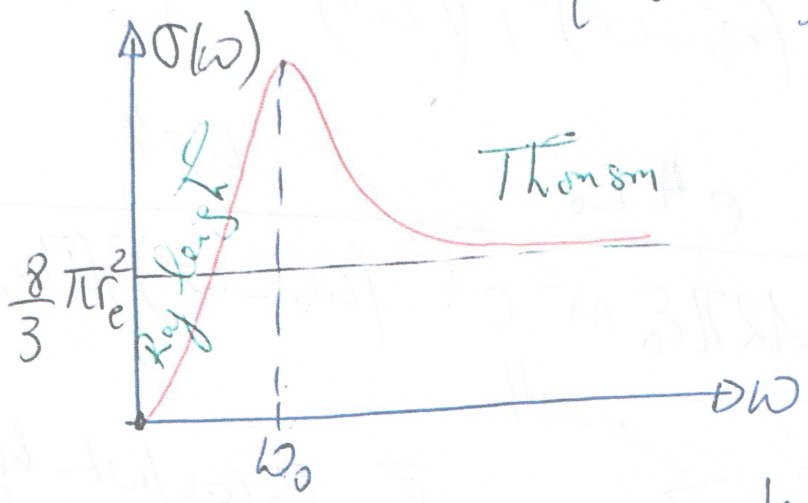
σ_0 en m^2

(5)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

c) $m c^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e}$

$$\sigma = \frac{8}{3}\pi r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma\omega)^2}$$



$$\omega_r \simeq \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}\,\omega_0$$

prc de résonnance de puissance

4) $\sigma(\omega) = \frac{8}{3}\pi r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} = \frac{\langle P_{ray} \rangle}{I_0}$

$$\langle P_{ray} \rangle = \frac{8}{3}\pi r_e^2 I_0 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

b) $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 0{,}082\,\mu m$ UV

$[\lambda_{violet} = 0{,}32\,\mu m$ — $\lambda_R = 0{,}75\,\mu m]$

$\omega_0 \gg \omega_{max}$; $\lambda_0 \ll \lambda_{min}$

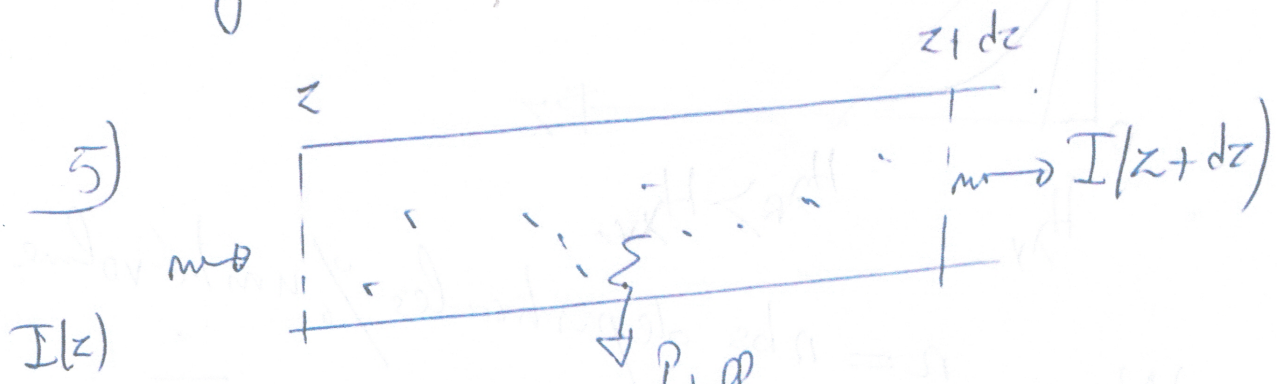
(6)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\langle P_{ray} \rangle \simeq \frac{8}{3} \pi r_e^2 I_0 \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$$

$$\frac{P_{violet}}{P_{rouge}} = \left(\frac{\omega_v}{\omega_R}\right)^4 = \left(\frac{\lambda_R}{\lambda_v}\right)^4 = \left(\frac{75}{32}\right)^4 \simeq 29$$

5)



Mq : $I(z) = I_0 \exp\left(-\frac{z}{H_2}\right)$

$I(z)\,S = I(z+dz)\,S + n \langle P_{ray} \rangle (S\,dz)$

$I(z)$: watt/m² n : watt/m³

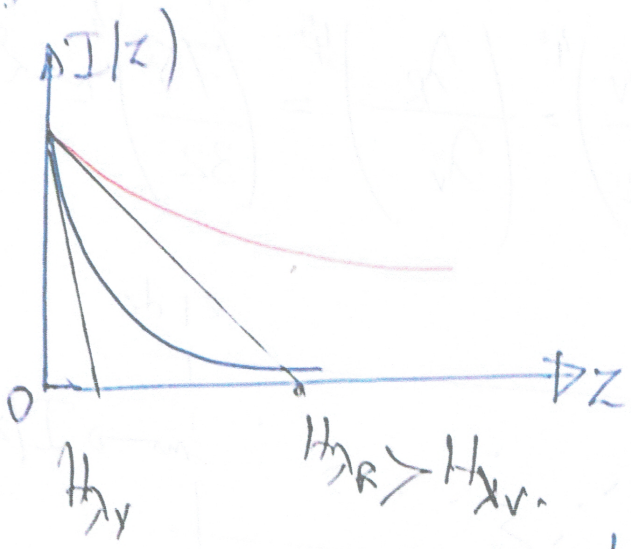
$$\frac{I(z) - I(z+dz)}{dz} = n \langle P_{ray} \rangle$$

$$-\frac{dI(z)}{dz} = n \frac{8}{3} \pi r_e^2 I(z) \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$$

$$\frac{dI(z)}{I(z)} = -\frac{8}{3} n \pi r_e^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 dz \quad (7)$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\frac{dI(z)}{I(z)} = -\frac{dz}{H_\lambda} \; ; \quad I(z) = I_0 \exp\left(-\frac{z}{H_\lambda}\right)$$



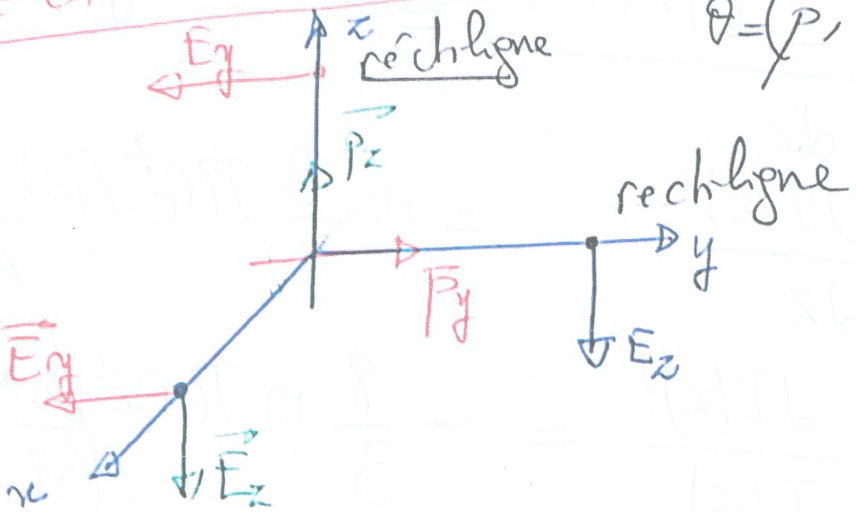
AN : n = nbs de particules / unité volume

$$PV = \frac{m}{M} RT = \frac{m^* \cdot N}{m^* \cdot \mathcal{N}_A} RT$$

$$P = \left(\frac{N}{V}\right) \frac{R}{\mathcal{N}_A} T = \boxed{n k_B T = P}$$

k_B = cte de Boltzmann , $n = \frac{N}{V}$

6)



$\theta = (\vec{P}, \overrightarrow{OM})$

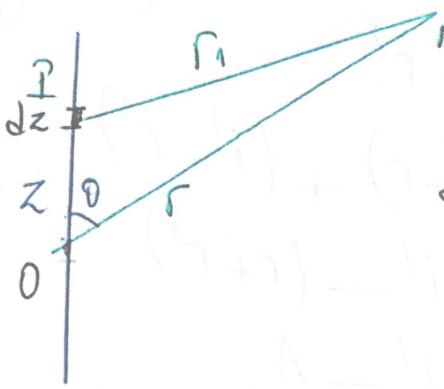
© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

PT2 : 2013 : $i(z,t) = I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{\ell}\right)\cos(\omega t) = \frac{dq}{dt}$

$$q = I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{\ell}\right)\frac{\sin(\omega t)}{\omega}$$

et MP2 2009

$$\vec{dp} = q(z,t)\,dz\,\vec{e}_z = \frac{I_0}{\omega}\cos\left(\frac{\pi z}{\ell}\right)\sin(\omega t)\,dz$$



$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi c\,(PM)}\,\ddot{\vec{dp}}(t)_{ret}\,\vec{e}_\varphi$$

$$(PM)^2 = z^2 + r^2 - 2rz\cos\theta$$

$$= r^2\left[1 + \frac{z^2}{r^2} - \frac{2rz}{r^2}\cos\theta\right]$$

$$(PM) = r\left[1 - \frac{2z}{r}\cos\theta\right]$$

$$\frac{1}{PM} \simeq \frac{1}{r}\,; \qquad PM = r - z\cos\theta$$

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi c r}\sin\theta\,\frac{I_0}{\omega}\cos\left(\frac{\pi z}{\ell}\right)\sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c} + \frac{z\cos\theta}{c}\right)\right]$$

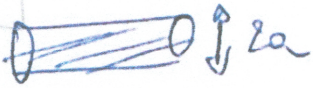
(9)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

AN $f = 50\,Hz$ $\quad \delta = 9{,}3\,mm > a = 0{,}5\,mm$

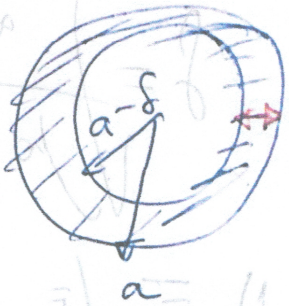
$f = 100\,MHz$; $\delta = 6\,\mu m \ll 0{,}5\,mm$

on parle d'effet pelliculaire



- $R_{50Hz} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{l}{\pi a^2}$

$$R_{100MHz} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{l}{2\pi(a-\delta)\,\delta}$$



$$d^2S = \rho\, d\rho\, d\theta$$



$$= (2\pi\rho)\, d\theta$$

$$R_{100MHz} \simeq \left(\frac{1}{\sigma_0} \frac{l}{\pi a^2}\right)\left(\frac{a}{2\delta}\right)$$

$$R_{100MHz} = R_{50Hz} \frac{a}{2\delta} \gg 1$$

$\omega \Rightarrow$, $R(\omega) \Rightarrow$

11/12 (6)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

c) Conducteur en très haute fréquence.

$$\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1+i\omega\tau} \quad ; \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

a) $(\omega\tau) \gg 1$ $\quad \underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{i\omega\tau} = \frac{ne^2}{m\omega} \frac{\tau}{\omega}$

$$\underline{\sigma} \simeq -i \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega}$$

Approximation : $\|\vec{F}_{vis}\| \ll \|\vec{F}_e\|$

$$\langle p_J \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Réel}\left[\underline{\vec{j}} \cdot \underline{\vec{E}}^*\right] = 0$$

pas de problème

b) $\frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}_c\|} \simeq 0,1$, $\overrightarrow{rot}\,\underline{\vec{B}} = \mu_0\left[\underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}} + \varepsilon \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}\right]$

c) $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left[\vec{j}_c + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]$ (R.F.D)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau}\right)\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

$$\vec{j} = -ne\vec{v}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau}\right)(-ne)\vec{v} = +\frac{ne^2}{m}\vec{E} \quad \underline{\vec{j}} = \varepsilon_0 \omega_p^2 \underline{\vec{E}}$$

16/12 (7)

Scanned with CamScanner

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau}\right)\vec{j}=\varepsilon_0\omega_p^2\vec{E}$$

b) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{B})=-\Delta\vec{B}=\overrightarrow{rot}\left(\mu_0\vec{j}+\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\right)$

$$\overrightarrow{rot}(\mu_0\vec{j})=-\Delta\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}\right)$$

$$=-\Delta\vec{B}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\overrightarrow{rot}(\mu_0\vec{j})=-\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau}\right)\overrightarrow{rot}(\mu_0\vec{j})=\mu_0\varepsilon_0\omega_p^2\,\overrightarrow{rot}\,\vec{E}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau}\right)\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B}=\frac{\omega_p^2}{c^2}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

c) $\left(i\omega+\frac{1}{\tau}\right)\left(-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)=\frac{\omega_p^2}{c^2}i\omega$

$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}\left[1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{i\omega\tau}{1+i\omega\tau}\right]$$

(8)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

c) $\omega\tau \gg 1$

$$k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = \frac{c}{n}$$

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad ; \quad v_\varphi \cdot v_g = c^2$$

3) $\underline{\vec{E}} = \underline{f}(x)\, e^{i\omega t}\, \vec{e}_y$

a) $\Delta \underline{\vec{E}} - \mu_0 \underline{\sigma} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}$

$$\left[\frac{d^2 \underline{f}(x)}{dx^2} - \mu_0 \underline{\sigma}\, i\omega\, \underline{f}(x) + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{f}(x)\right] e^{i\omega t} = 0.$$

$$\frac{d^2 \underline{f}(x)}{dx^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\mu_0 \underline{\sigma}\right]\underline{f}(x) = 0$$

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0 \underline{\sigma}\omega = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{i\underline{\sigma}\omega\mu_0 c^2}{\omega}\right]$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2}\,\underline{n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{i\,\underline{\sigma}}{\varepsilon_0 \omega}\right]$$

16/12 (9)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

d) $\omega\tau \ll 1$; $\boxed{\omega \ll \frac{1}{\tau} \ll \omega_p}$

$$k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{i\omega\tau}{1}\right]$$

$$\simeq \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - i\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2(\omega\tau)\right]$$

$\left(\frac{\omega_p}{\omega} \gg 1\right)$ $\left(\omega\tau \gg 1\right)$

$$k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}\left[-i\frac{\omega_p^2\tau}{\omega}\right]$$

$$k^2 \simeq -i\frac{\omega\omega_p^2\tau}{c^2} = \frac{(1-i)^2}{\left(\frac{2c^2}{\omega\omega_p^2\tau}\right)}$$

onde progressive + atténuation

$$\delta = \sqrt{\frac{2c^2}{\omega\omega_p^2\tau}} = \sqrt{\frac{2c^2}{\omega\frac{ne^2\tau}{m\varepsilon_0}}}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2c^2\varepsilon_0}{\omega\sigma_0}} = \frac{2}{\sqrt{\omega\sigma_0\omega}}$$

16/12 (10)

Scanned with CamScanner

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{i}{\varepsilon_0 \omega}\frac{ne^2\tau}{m}\frac{1}{1+i\omega\tau}\right]$$

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{i\omega\tau}{1+i\omega\tau}\right]$$

b) $r^2 + \underline{k}^2 = 0 ; \quad \underline{r} = \pm i\,\underline{k}$

$$f(x) = A_1 e^{i\underline{k}x} + A_2 e^{-i\underline{k}x}$$

$$= A_1 e^{i(k' - ik'')x} + A_2 e^{-i(k' - ik'')x}$$

$$= A_1 e^{-k''x} \quad A_2 e^{+k''x}$$

$$e^{i\omega t} f(x) = A_2 e^{-k''x} e^{i(\omega t - k'x)}$$

$$\underline{\vec{E}} = \left[E_0 e^{-k''x}\right] e^{i(\omega t - k'x)} \vec{e}_y$$

$$k' = \frac{\omega}{c} n' \qquad \vec{B} = \frac{\underline{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

$$k'' = \frac{\omega}{c} n''$$

Car c'est une onde Plane

Ab/Ag (11)

Scanned with CamScanner

$$\underline{B} = \frac{\underline{k} \wedge \underline{E}}{\omega} = \frac{(n' - i n'')}{c} \underline{E}\, \vec{e}_z$$

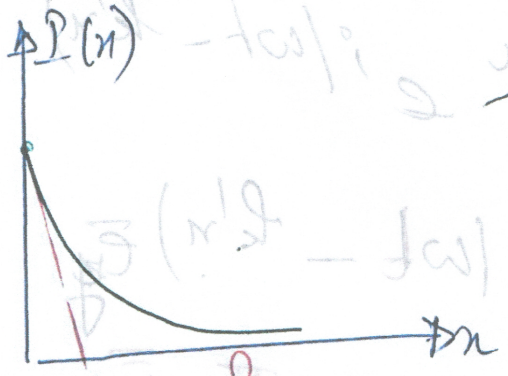
$$\underline{B} = \frac{(n' - i n'')}{c} E_0 \exp(-k'' z) \exp i(\omega t - k' z)\, \vec{e}_z$$

4) $I = \iint \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S} \rightarrow (dy\, dz)\, \vec{e}_x$ $\quad \vec{e}_x$

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} Re\left[\underline{E} \wedge \underline{B}^*\right] = \frac{1}{2\mu_0} Re\left[\underline{E} \cdot \underline{B}^*\right]$$

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} n' \exp(-2k'' x)\, \vec{e}_x$$

$$I = I(0) \exp(-\alpha x) \; ; \; I(0) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} n' S$$



$k' = k'' = \frac{1}{\delta}$

$\lambda = 1{,}06\ \mu m \in$ IV

$\delta \rightarrow$

$$Re(\underline{B}) = \frac{n'}{c} E_0 \exp(-k'' x) \cos(\omega t - k' x) + \frac{n'' E_0}{c} \exp(-k'' x) \sin(\omega t - k' x)$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.