Dr Kchaou borhen

ELECTROMAGNETIQUE :DANS LES MILIEUX

SERIE N°3

Problème 1 : Notions de conduction dans les métaux

La conductivité peut être décrite dans le modèle simple suivant :

Un conducteur métallique est formé d'atomes ionisés fixes et d'électrons libres de densité n (nombre d'électrons libres par unité de volume), ces derniers assurant la conduction électrique. En plus des forces dues au champ électromagnétique, un électron de masse m et de charge -e est soumis aux forces d'interaction (chocs) avec les ions, modélisés par une force de type frottement fluide $-m\frac{\vec{v}}{\tau}$, $\vec{v}$ étant la vitesse de l'électron par rapport au conducteur et τ une constante dépendant de la nature du matériau.

A. Conducteur en régime continu ; loi d'Ohm

1- Le conducteur est initialement en équilibre (électrons au repos). A partir de l'instant t = 0, un générateur extérieur impose de façon instantanée un champ électrique uniforme et constant, parallèle à l'axe Oz : $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$.

a- Écrire et intégrer l'équation du mouvement d'un électron en exprimant la vitesse en fonction de m, e, τ et $\vec{E}_0$. Que représente physiquement τ ?

b- Montrer qu'en régime permanent, $\vec{v}$ tend vers une valeur limite $\vec{v}_l$. En déduire la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}_0$ liant la densité de courant $\vec{j}_0$ au champ $\vec{E}_0$; exprimer la conductivité σ_0 en régime continu en fonction de n, e, m et τ. **AN**: Pour le cuivre $\sigma_0 = 5{,}8.10^7\ \Omega^{-1}\ m^{-1}$ et $N = 1{,}1.10^{29}\ m^{-3}$; en déduire la valeur numérique de τ. Commentaire.

2- Le conducteur est de forme cylindrique, de section constante S et de longueur L limitée entre deux points A et B de son axe Oz ($z_B - z_A = L$).

a- Montrer que la différence de potentiel entre les points A et B est proportionnelle au courant I traversant le cylindre : $V_A - V_B = R_0 I$.

Exprimer la résistance R_o de la portion AB en fonction de L, σ_0 et S.

b- Déterminer la puissance P transmise par le générateur aux électrons situés entre A et B, en fonction de R_o et I.

B. Conducteur en régime variable ; épaisseur de peau

1- Le générateur extérieur impose un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω, parallèle à Oz ; en notation complexe $\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 \exp(i\omega t)\, \vec{u}_z$.

a- Déterminer en régime permanent, la vitesse $\underline{\vec{v}}$ d'un électron.

b- Montrer que la loi d'Ohm locale s'écrit encore $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\, \underline{\vec{E}}$ où la conductivité $\underline{\sigma}$ en régime variable est complexe; l'exprimer en fonction de σ_0, ω, τ. Quelles sont les deux différences importantes avec le cas du régime continu ?

AN : Jusqu'à quelle fréquence f_c peut-on utiliser, pour le cuivre, la valeur σ_0 du régime continu sans commettre une erreur supérieure à 1% ?

*La suite de la partie **B** concerne le cas $f < f_c$.*

c- Montrer qu'alors le courant de déplacement $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant le courant de conduction $\vec{j}$.

2- On se propose d'étudier le cas du conducteur cylindrique d'axe Oz et de rayon a.

a- Montrer, en utilisant l'équation de conservation de la charge, que la densité volumique de charges est nulle dans le conducteur en régime sinusoïdal.

b- Déduire des équations de Maxwell l'équation vérifiée par le champ électrique dans le conducteur.

c- Montrer qu'une solution du type: $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp[-(1+i)(a-r)/\delta] \exp(i\omega t)\, \vec{u}_z$, convient si $r >> \delta$, r étant la distance d'un point du conducteur à l'axe et δ une grandeur homogène à une longueur à exprimer en fonction de μ_0,σ et ω. On donne en coordonnées cylindriques : $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial f}{\partial z^2}$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

mahdystudies.tn

d) Interpréter physiquement la solution proposée. Quelle signification peut-on donner à δ ? Tracer l'amplitude E(r) en fonction de r en admettant que E(r) est négligeable pour *r* de l'ordre ou inférieur à δ.

AN : Expliquer pourquoi un fil de cuivre de 1 mm de diamètre convient à la transmission de la fréquence domestique (f = 50 Hz) ainsi qu'à celle des basses fréquences de l'électrocinétique (f_{max} = 100 kHz en TP d'électronique). Ce moyen convient-il à la transmission des fréquences radio (f ≈ 100 MHz) ? Expliquer et justifier le nom d'épaisseur de peau donné à δ dans ce cas.

C. Conducteur en très haute fréquence ; plasmon

1- Le calcul de la conductivité effectué à la question B1 reste valable :

$\underline{\sigma} = \dfrac{\sigma_0}{1+i\omega\tau}$ avec $\sigma_0 = \dfrac{Ne^2\tau}{m}$; τ temps caractéristique lié à la dissipation.

a- Quelle est l'expression approchée de $\underline{\sigma}$ pour les hautes fréquences? Quelle hypothèse cela revient-il à faire au niveau du mouvement de l'électron de conduction ?

b- Dans ces conditions, le courant de déplacement reste-il négligeable devant le courant de conduction ? Introduire une fréquence f_p liée à $\omega_p = \sqrt{Ne^2/\varepsilon_0 m}$

AN : Calculer pour le cuivre et le sodium le rapport $\|\vec{j}_D\|/\|\vec{j}\|$ pour la fréquence $f = f_c$.

2- L'étude est reprise sans approximations, pour une fréquence quelconque, mais en notation temporelle réelle (et non en fréquentielle complexe) jusqu'à la question *2b)* incluse.

a- Quelle est, à partir de l'équation du mouvement de l'électron, la relation différentielle reliant $\vec{j}$ et $\vec{E}$? Peut-on y remplacer $d\vec{j}/dt$ par $\dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t}$?

b- A partir de cette relation et à l'aide des équations de Maxwell, éliminer successivement $\vec{j}$, puis $\vec{E}$ et montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ vérifie l'équation

$$(\frac{1}{\tau}+\frac{\partial}{\partial t})(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{B} = \frac{\omega_p^2}{c^2}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

c- A quelle condition sur k, ω, ωp, c et τ une onde plane sinusoïdale de champ $\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}_0}\exp i(\omega t - kx)$ peut-elle exister dans le conducteur ?

d- Examiner le cas ωτ << 1 : exprimer k et caractériser l'onde. Que retrouve-t-on ?

e- Examiner le cas ωτ >>1 (avec ω ≠ ωp) : quel est le comportement de l'onde pour ω < ωp et ω > ωp ? Conclure.

3- Etudions maintenant la propagation d'une onde électromagnétique dans ce métal (x > 0 ; ωτ quelconque) et que le champ électrique de l'onde peut s'écrire : $\underline{\vec{E}}(M,t) = f(x)\exp i\omega t\,\vec{u}_y$ où f(x) est une fonction complexe à déterminer.

a- Démontrer l'équation $\dfrac{d^2\underline{f}(x)}{dx^2} + \underline{k}^2\underline{f}(x) = 0$ avec $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{n}^2 = k_0^2(n'-in'')^2$ avec n'> 0.

b- Déterminer l'expression du champ électrique $\underline{\vec{E}}(M,t)$ et $\underline{\vec{B}}(M,t)$ sachant que l'onde se propage dans le sens des x croissants et en posant f (x = 0) = E_0

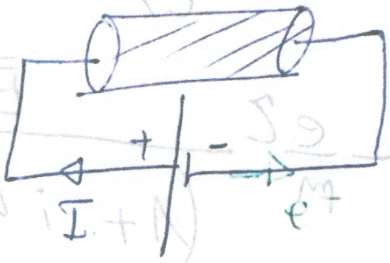
4- Quel la puissance moyenne **P** qui traverse une section S perpendiculaire à Ox , située à la cote x > 0. Ecrire cette puissance sous la forme $P(x) = P_0\exp(-\alpha x)$. AN : α pour l'aluminium (λ = 1,06 μm). Commenter.

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés. 2 mahdystudies.tn

Série N°3

A) la loi d'Ohm : modèle de Drude

1) $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$

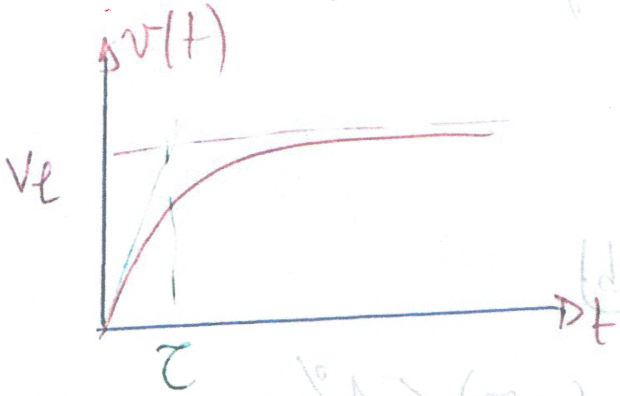


a) R.F.D

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{v}_p(t) = \vec{v}_0 + \vec{A}e^{-t/\tau}$$

$$\vec{v}(t) = -\frac{e\tau}{m}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)\vec{E}$$



$$\lim \vec{v}(t) = -\frac{e\tau\vec{E}}{m} = \vec{v}_\ell$$

$$\vec{v}_\ell = -\mu\vec{E}$$

la mobilité

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = +\left(\frac{ne^2\tau}{m}\right)\vec{E} = \sigma_0\vec{E}$$

Serie Mugnéhos EX6 MP2 : 2006

$$R_0 = \frac{1}{\sigma_0}\frac{l}{\pi a^2} \cdot \quad (1)\ 16/12$$

Scanned with CamScanner

B) $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v} = i\omega m\vec{v}$

$\vec{v}\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right) = -\frac{e}{m}\vec{E}$

$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\frac{\vec{E}}{(1+i\omega\tau)}$

$\vec{j} = -ne\vec{v} = +\frac{ne^2\tau}{m}\frac{\vec{E}}{(1+i\omega\tau)}$

$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{(1+i\omega\tau)}$

σ : complexe : retard de phase

$\sigma(\omega)$: dispersif.

$\tau = 10^{-14}$ s voir A) 1) b)

$\sigma \simeq \sigma_0$ à 1% près : $(\omega\tau) \leq 1\%$

$2\pi f\tau \leq \frac{1}{100} \Rightarrow f \leq \frac{1}{2\pi \times 100\tau}$

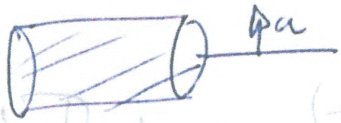
$f \leq f_c = 85\ GHz = 85\ 10^9\ Hz$

K M. G. (2) 16/12

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

c) $\frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}_c\|} \leq \left(\frac{\varepsilon \, 2\pi f}{\sigma_0}\right) = 10^{-8} \ll 1$

$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0(\sigma_0 \vec{E})$

2) 

a) $div\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ · $\vec{j}_c = \sigma_0 \vec{E}$

$\frac{\sigma_0}{\varepsilon}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \to 0$

le milieu est localement neutre $\Rightarrow$

$div\,\vec{E} = 0 \Rightarrow$ ~~Th. G.~~

b) $div\,\vec{B} = 0$; $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (∂ flune)

$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0(\sigma_0 \vec{E})$, $div\,\vec{E} = 0$

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

c) $\vec{E} = \left\{E_0 \exp\left[-\frac{(1+i)(a-r)}{\delta}\right]\right\} e^{i\omega t} \vec{e}_z$

Si $r \gg \delta$. $\hookrightarrow \underline{E}(r)$

$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$ voir 16(3)

Scanned with CamScanner

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\Delta \underline{E} = \left[\frac{d^2 \underline{E}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\underline{E}(r)}{dr}\right] e^{i\omega t}\, \vec{u}_z$$

$$\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = i\omega \underline{E}(r)\, e^{i\omega t}\, \vec{u}_z$$

$$\frac{d^2 \underline{E}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\underline{E}(r)}{dr} - \mu_0 \sigma_0 i\omega \underline{E}(r) = 0$$

Bessel

$$\underline{E}(r) = E_0 \exp\left[-\frac{(1+i)(a-r)}{\delta}\right]$$

$$\frac{d\underline{E}(r)}{dr} = \frac{(1+i)}{\delta}\underline{E}(r)$$

$$\frac{d^2 \underline{E}(r)}{dr^2} = \frac{(1+i)^2}{\delta^2}\underline{E}(r) = \frac{2i}{\delta^2}\underline{E}(r)$$

$$\frac{2i}{\delta^2} + \frac{(1+i)}{\delta r} = i\mu_0 \sigma_0 \omega$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$$

$\frac{1}{\delta r} \ll 1$

$\frac{1}{m^2} \ll 1$ V/m

16/12(4)

Scanned with CamScanner

$$\frac{2i}{\delta^2}\left[1+\frac{(1+i)}{\delta r}\frac{\delta^2}{2i}\right] = i\mu_0\sigma_0\omega$$

$$\frac{2i}{\delta^2}\left[1+\frac{\delta}{2r}(1-i)\right] = i\mu_0\sigma_0\omega$$

↳ si $\delta \ll r$

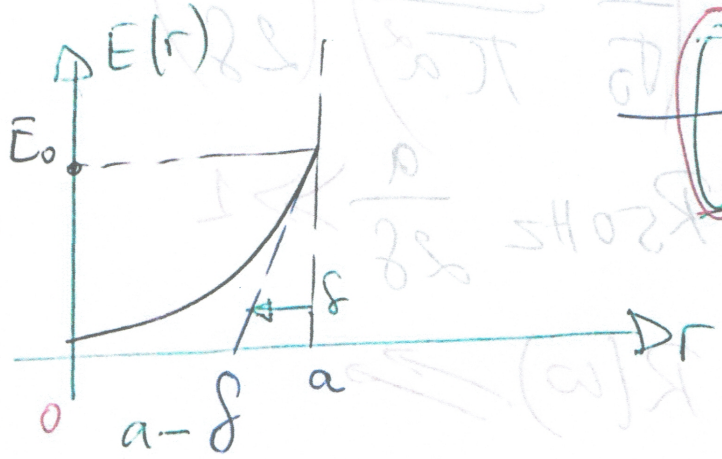
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma_0\omega}}$$

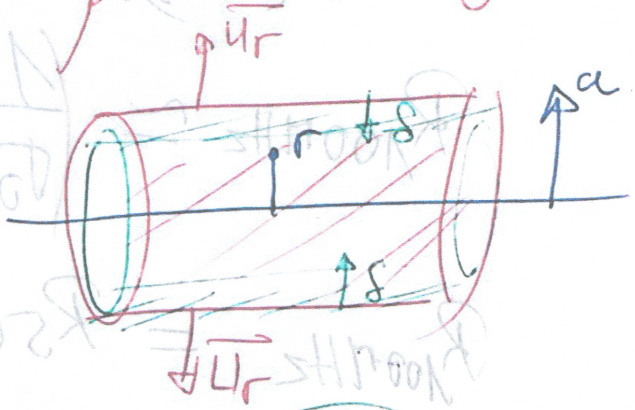
d) $\underline{\vec{E}} = \left(E_0 \exp\left[-\frac{(a-r)}{\delta}\right]\right)\exp i\left(\omega t - \frac{(a-r)}{\delta}\right)\vec{e}_z$

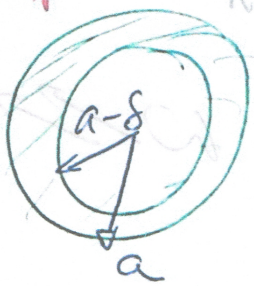
onde monochr; progressive, radiale $(-\vec{u}_r)$

atténué radialement

pensée rectifiée (oc)







MP2 : 2006

15/12 (5)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.