

$$I^2 = Re(I^2) \neq [Re(I)]^2$$

COMPOTEMENT FREQUENTIEL D'UN FIL CONDUCTEUR

Concoms MP - 2006

2.5.2 Pour expliquer le comportement fréquentiel de la bobine à air, on se propose de modéliser le comportement fréquentiel du fil de cuivre avec lequel elle est réalisée: on supposera dans cette partie que le fil n'est pas enroulé autour d'un cylindre pour former la bobine, mais étendu en ligne droite. Pour ce faire, considérons un conducteur ohmique cylindrique de conductivité σ , de rayon a , illimité suivant son axe de révolution Oz: un point M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Ce conducteur est parcouru par un courant $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ orienté positivement dans le sens Oz croissant. La distribution de courant correspondante est décrite par le vecteur densité volumique de courant $\vec{J}(r, \theta, z, t)$. Pour les applications numériques: $a = 2,50 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $\sigma = 5,80 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$, $\epsilon_0 = (36\pi)^{-1} \times 10^{-9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

1- Montrer que $\vec{J}(r, \theta, z, t)$ ne dépend spécialement que de la variable r . Expliquer qualitativement pourquoi l'on recherche une distribution de courant non uniforme. Dans la suite, on écrira $\vec{J}(r, \theta, z, t) = \vec{J}(r) e^{j\omega t} \hat{u}_z$.

2- La pulsation ω du courant sinusoïdale $I(t)$ alimentant le conducteur étant $< 2,00 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, justifier l'utilisation de l'approximation des régimes quasi-stationnaires dans la suite des questions de cette partie.

3- En précisant clairement les étapes de votre raisonnement, établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $\vec{J}(r)$. En posant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\lambda \mu_0 \sigma \omega}}$, $\lambda_r = \frac{r}{\delta}$ et $\lambda_a = \frac{a}{\delta}$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la

fonction $\underline{G} = \vec{J} / \vec{J}(0)$ de la variable λ_r . Calculer la valeur maximale de λ_a^2 pour des ω variant de 0 à $2,00 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Dans la suite du problème, on suppose que $\lambda_r^2 \ll 1$ dès que $r \leq a$.

4- On fait l'hypothèse que $\underline{G}(\lambda_r)$ est une fonction paire. On admet que la solution cherchée de l'équation différentielle de la question précédente se met sous la forme $\underline{G}(\lambda_r) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n \lambda_r^{2n}$ $g_0 = 1$.

Donner la relation liant g_n et g_{n-2} pour tout $n \geq 2$. En déduire: $\vec{J}(\lambda_r) = \vec{J}(0) \cdot \left[1 + \frac{j}{2} \lambda_r^2 - \frac{1}{16} \lambda_r^4 - \frac{j}{288} \lambda_r^6 + o(\lambda_r^6) \right]$.

5- En supposant dans toute la suite du problème que $\vec{J}(0)$ soit en fait une quantité J_0 réelle, déduire de la question précédente l'expression à l'ordre 4 en λ_r du champ électrique $\vec{E}(r, \theta, z, t)$ à l'intérieur du conducteur.

6- Montrer que la valeur moyenne temporelle de $I^2(t)$ s'écrit: $\langle I^2(t) \rangle = \frac{1}{2} (J_0 \pi a^2)^2 [1 + k \lambda_a^4 + o(\lambda_a^4)]$. Où k est un facteur numérique que l'on précisera.

7- Préciser, en la justifiant, la direction et la dépendance vis-à-vis des variables d'espaces du champ magnétique $\vec{B}(r, \theta, z, t)$. Déterminer, à l'intérieur du conducteur, l'expression de la quantité $\frac{2}{\mu_0 J_0 r} \vec{B}(r, \theta, z, t)$ à l'ordre 4 en λ_r (on pourra supposer que le module du champ magnétique reste borné en $r = 0$). En déduire celles de $\vec{B}(r, \theta, z, t)$ et de $\vec{B}(r, \theta, z, t)$.

8- Que représente la quantité $\vec{J} \cdot \vec{E}$? Quelle est son unité? Définir par une intégrale (que l'on ne cherchera pas à calculer) la puissance $P_\ell(t)$ cédée par le champ électromagnétique à une portion de longueur ℓ selon Oz du conducteur ohmique. Pour la suite du problème, on admet que la valeur moyenne temporelle de $P_\ell(t)$ s'écrit

$$\langle P_\ell(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\pi a^2 \ell J_0^2}{\sigma} \left[1 + \frac{1}{24} \lambda_a^4 + o(\lambda_a^4) \right]$$

9- On définit la résistance R_ℓ d'une portion de longueur ℓ selon Oz du conducteur ohmique par:

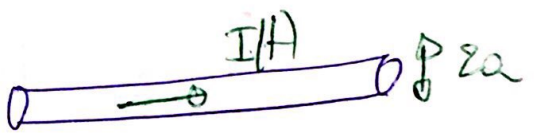
$$R_\ell = \frac{\langle P_\ell(t) \rangle}{\langle I^2(t) \rangle}$$

Important d'un fil

$$Q(t+dt) - Q(t) = \iiint [\rho(r, t+dt) - \rho(r, t)] d\tau$$

$$\frac{dQ}{dt} = \left(\iiint \frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t} d\tau \right) = - \iiint \nabla \cdot \vec{J} d\tau = - \iiint \text{div } \vec{J} d\tau$$

$$\boxed{\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

longue bobine $l_b =$ 

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{E} \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

$$\vec{J}(r, \theta, z, t) \stackrel{??}{=} \vec{J}(r, t)$$

seule rotation + transp (oz)

$$I(t) \longrightarrow \vec{B}(t) \longrightarrow \vec{E}(r, t)$$

$$\nabla \times \vec{E}(r, t) = - \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \neq \vec{0}$$

$$\text{si } \vec{E}(t) \longrightarrow \nabla \times \vec{E}(t) = \vec{0} \quad ??$$

$$\Rightarrow \vec{J}(r,t) = \sigma \vec{E}(r,t)$$

$$2) \omega \leq \omega_{\max} = 210^4 \text{ rad/s.}$$

$$\frac{2\pi C}{\lambda} \leq \frac{2\pi C}{\lambda_{\min}} \Rightarrow \lambda \geq \lambda_{\min}$$

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi C}{\omega_{\max}} = \frac{2 \times \pi \times 310^8}{2 \times 10^4} \approx 10^5 \text{ m}$$

$$\lambda_{\min} \approx 100 \text{ km}$$

$$l_{\text{bob}} \approx 100 \text{ m} \ll \lambda_{\min}$$

AR Q.S

$$3) \cdot \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\rho(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow 0.$$

$$\sigma \frac{\rho}{\epsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad /$$

$$\cdot \frac{\|\vec{J}\|}{\|\vec{C}\|} = \frac{\left| \frac{\sigma \partial \vec{E}}{\partial t} \right|}{\left| \sigma \vec{E} \right|} = \left| \frac{\epsilon \omega}{\sigma} \right| \leq \frac{\epsilon \omega_{\max}}{\sigma} \leq \dots \ll 1$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E}$$

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$\Delta \vec{J}(r,t) - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{J}(r,t)}{\partial t} = 0$$

$$\left[\Delta \vec{J}(r) - \mu_0 \sigma i\omega \vec{J}(r) \right] e^{i\omega t} = 0$$

$$\frac{d^2 \vec{J}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vec{J}(r)}{dr} - i\omega \mu_0 \sigma \vec{J}(r) = 0$$

$$\lambda_r = \frac{r}{\delta};$$

$$\star \frac{d\vec{J}}{d\lambda_r} = \frac{d\vec{J}}{d\lambda_r} \cdot \frac{d\lambda_r}{dr} = \frac{1}{\delta} \frac{d\vec{J}}{d\lambda_r}$$

$$\star \frac{d^2 \vec{J}}{dr^2} = \frac{1}{\delta^2} \frac{d^2 \vec{J}}{d\lambda_r^2}$$

$$\frac{1}{\delta^2} \frac{d^2 \vec{J}}{d\lambda_r^2} + \frac{1}{\delta \lambda_r} \frac{d\vec{J}}{d\lambda_r} - i\mu_0 \sigma \omega \vec{J} = 0$$

$$G = \frac{J(\lambda_r)}{J(0)}$$

$$\frac{d^2 G}{d\lambda_r^2} + \frac{1}{\lambda_r} \frac{dG(\lambda_r)}{d\lambda_r} - i/\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \delta^2 G(\lambda_r) = 0$$

$$\text{or } \delta = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 \mu_0 \omega}} \quad \text{diff}$$

$$\frac{d^2 G(\lambda_r)}{d\lambda_r^2} + \frac{1}{\lambda_r} \frac{dG(\lambda_r)}{d\lambda_r} - \epsilon_i G(\lambda_r) = 0$$

Bessel

$$\lambda_r \ll 1$$

$$4) \quad G(\lambda_r) = \sum_0^\infty g_n \lambda_r^n$$

$$\frac{dG(\lambda_r)}{d\lambda_r} = \sum_1^\infty g_n n \lambda_r^{n-1}$$

$$\frac{d^2 G(\lambda_r)}{d\lambda_r^2} = \sum_2^\infty n(n-1) g_n \lambda_r^{n-2}$$

$$\sum_2^\infty n(n-1) g_n \lambda_r^{n-2} + \sum_2^\infty g_n n \lambda_r^{n-2} = \epsilon_i \sum_0^\infty g_n \lambda_r^n$$

$$\sum_2^\infty n^2 g_n \lambda_r^{n-2} = \epsilon_i \sum_2^\infty g_{n-2} \lambda_r^{n-2}$$

$$g_n = \frac{2i}{n^2} g_{n-2}$$

$$g_0 = 1; \quad g_2 = \frac{2i}{2^2} g_0 = \frac{i}{2} g_0$$

$$g_4 = \frac{2i}{16} g_2 = \frac{2i}{16} \frac{i}{2} = -\frac{1}{16}$$

$$G(\lambda_r) = \left[1 + \frac{i}{2} \lambda_r^2 - \frac{\lambda_r^4}{16} + \frac{i}{288} \lambda_r^6 + \dots \right]$$

à l'ordre 4

Pq: $n = 2p$

$$g_{2p} = \frac{2i}{(2p)^2} g_{2p-2},$$

$$g_{2p-2} = \frac{2i}{(2(p-1))^2} g_{2p-4}$$

$$g_{2p} = \frac{i}{2p^2} \frac{i}{2(p-1)^2} \frac{i}{2(p-2)^2} \dots$$

$$g_{2p} = \frac{(i)^p}{2^p (p!)^2}$$

$$\underline{J}(\lambda_r) = \underline{J}(0) \left[\left(1 - \frac{\lambda_r^4}{16}\right) + i \frac{\lambda_r^2}{2} \right]$$

$$\underline{\vec{J}}(r, t) = \underline{J}(0) \left[\left(1 - \frac{\lambda_r^4}{16}\right) + i \frac{\lambda_r^2}{2} \right] e^{i\omega t - \frac{u_z}{u_z}}$$

$$\begin{aligned} \vec{J}(r, t) &= J(0) \left[\left(1 - \frac{\lambda_r^4}{16}\right) \cos(\omega t) - \frac{\lambda_r^2}{2} \sin(\omega t) \right] \\ &= \text{Re}(\underline{\vec{J}}(r, t)) = \sigma \vec{E}(r, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } I(t) &= \iint \vec{J}(r, t) \cdot d\vec{S} \\ &= 2 J_0 \pi \int_0^a \left[\left(1 - \frac{\lambda_r^4}{16}\right) \cos(\omega t) - \frac{\lambda_r^2}{2} \sin(\omega t) \right] r dr \end{aligned}$$

$$= 2\pi J_0 \left[\left(\frac{\lambda_a^2}{2} - \frac{\lambda_a^6}{6 \times 16} \right) \cos(\omega t) - \frac{\lambda_a^4}{4 \times 2} \sin(\omega t) \right]$$

$$= \underbrace{(\pi J_0 \delta^2)}_{a^2} \lambda_a^2 \left[\left(1 - \frac{\lambda_a^4}{3 \times 16}\right) \cos(\omega t) - \frac{\lambda_a^2}{4} \sin(\omega t) \right]$$

$$\langle I^2(t) \rangle = \frac{(\pi J_0 a^2)^2}{2} \left[\left(1 - \frac{\lambda_a^4}{48} \right)^2 + \frac{\lambda_a^4}{16} \right]$$

$$= \frac{(\pi J_0 a^2)^2}{2} \left[1 - \frac{2}{48} \lambda_a^4 + \frac{\lambda_a^4}{16} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (\pi J_0 a^2)^2 \left[1 + \frac{1}{48} \lambda_a^4 \right]$$

$$k = \frac{1}{48}$$

$$\underline{\bar{E}}(r, t) = \frac{J_0}{\sigma} \left(\left(1 - \frac{\lambda_r^4}{16} \right) + i \frac{\lambda_r^2}{2} \right) e^{i\omega t} \underline{\bar{u}}_z$$

$$\underline{\bar{r}} \otimes \underline{\bar{B}} = \mu \sigma \underline{\bar{E}} = \mu \sigma E(r, t) \underline{\bar{u}}_z$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{\bar{B}}(r, t)) = \mu \sigma \underline{\bar{E}}(r, t); \quad \lambda_r = \frac{r}{\delta}$$

$$\int \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{\bar{B}}(r, t)) dr = \int \mu \sigma J_0 \left[\left(1 - \frac{\lambda_r^4}{16} \right) + i \frac{\lambda_r^2}{2} \right] e^{i\omega t} d\lambda_r$$

$$r \rightarrow 0, \quad \frac{C_1}{r} \rightarrow \infty, \quad C_1 = 0.$$

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\text{Re}(\vec{E}) \wedge \text{Re}(\vec{B})}{\mu_0}$$

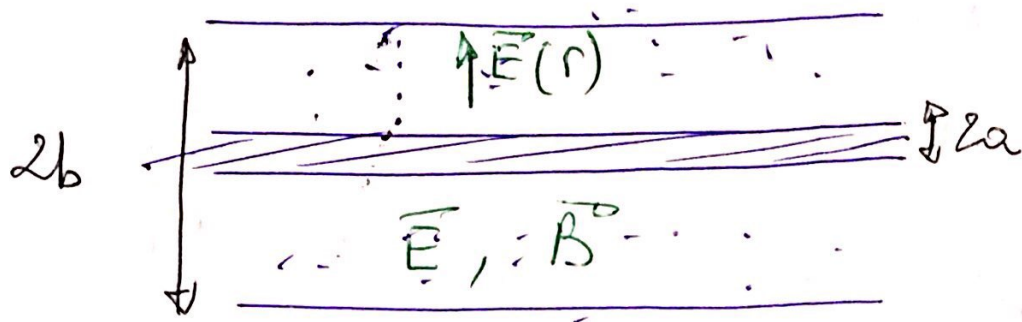
$$\begin{aligned} \langle \vec{\pi} \rangle &= \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left[\vec{E} \wedge \vec{B}^* \right] \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left[\vec{E}^* \wedge \vec{B} \right] \end{aligned}$$

$$\langle I_{\text{moy}} \rangle = R(\omega) \langle I^2(t) \rangle$$

$$R(\omega) = R_0 [1 + \alpha \omega^4]$$

dispersif.

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}; \text{ Cauchy}$$

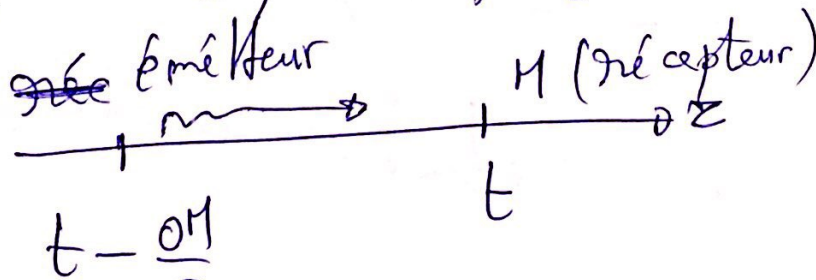


conducteur parfait : $\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{B} = \vec{0}$
 $\vec{J} = \vec{0}$, $\rho = 0$, $\langle \vec{J} \rangle = 0$

$$\vec{E} = E(r) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r$$

$$\vec{B} = B_0(r) \cos(\omega t - kz)$$

$f(t - \frac{z}{c})$ onde progressive (oz)⁺



1) $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Vide : $\rho = 0$)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E(r) \cos(\omega t - kz)) = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r E(r)) = 0 \quad (13)$$

$$r E(r) = ds = a E(a) = a E_a$$

$$E(r) = \frac{a E_a}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{a E_a}{r} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_r$$

$$2) \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\left[+ \frac{\partial E(r, z, t)}{\partial z} \right] \vec{u}_\theta = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E(r, z, t)}{\partial z} \vec{u}_\theta = + \vec{B}_0(r) \omega \sin(\omega t - kz)$$

$$\vec{B}_0(r) = \frac{k}{\omega} E(r) \vec{u}_\theta$$

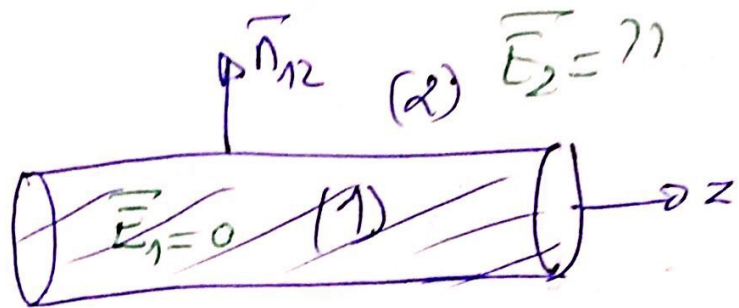
$$k = \frac{\omega}{c} \text{ , relation de dispersion}$$

$$\vec{B}_0(r) = \frac{E(r)}{c} \vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{B}_0(r) = \frac{a E_a}{rc} \vec{u}_\theta}$$

(14)

3) a) $r = a$



$$\star \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma_a}{\epsilon} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}(r=a^+, z, t) - \vec{0} = \frac{\sigma_a}{\epsilon} \vec{u}_r$$

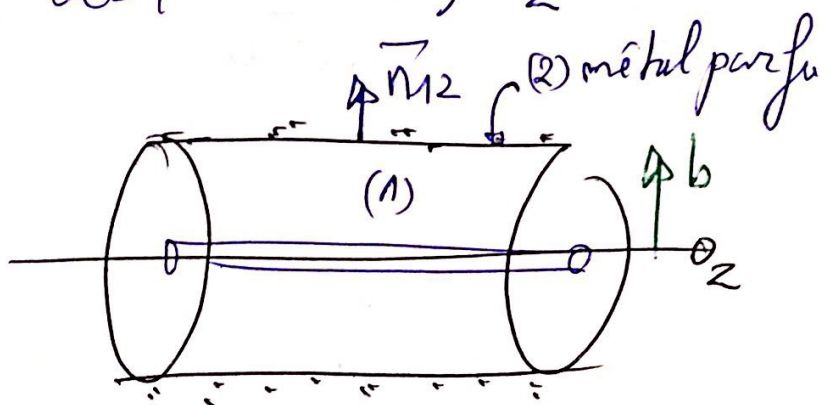
$$\sigma_a(z, t) = \epsilon E_a \cos(\omega t - kz)$$

$$\star \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_{sa}$$

$$\vec{j}_{sa} = \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{u}_r \wedge \left(\frac{E_a}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_\theta \right) \right]$$

$$\vec{j}_{sa} = \frac{+ E_a}{\mu_0 c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

$\star$ $r = b$



$$\vec{0} - \frac{a}{b} E_a \cos(\omega t - kz) \vec{u}_r = \frac{\sigma_b}{\epsilon} \vec{u}_r \quad (15)$$

$$\sigma_b = - \frac{\epsilon_0 E_a a}{b} \cos(\omega t - kz)$$

$$Q_a = \iint \sigma_a(z, t) dS_{\text{lat}} = \int_0^{2\pi} \int_{-a}^a \sigma_a(z, t) dz d\theta$$

$$\delta Q_a = 2\pi a \int_z^{z+\delta z} \sigma_a(z, t) dz ; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$$

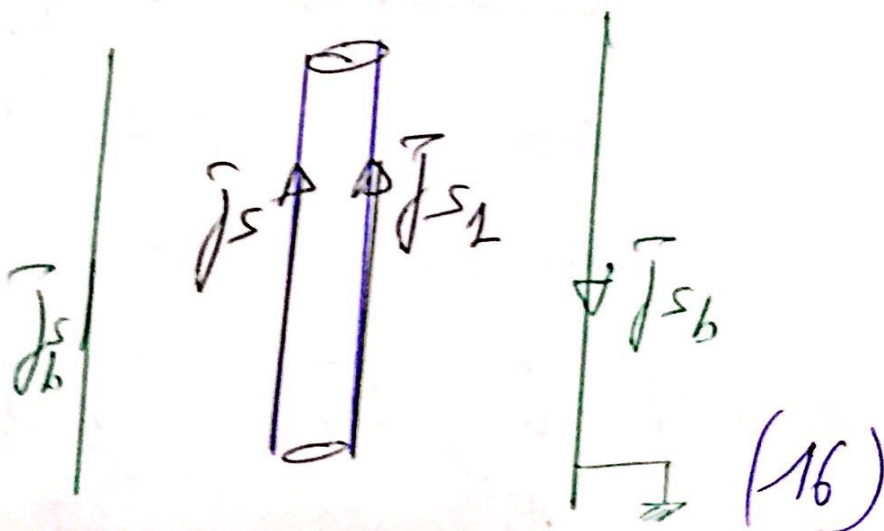
$$\delta q_a \simeq \left[2\pi a \sigma_a(z, t) \right] \delta z \quad C/m^2$$

$$\delta q_a = \lambda_a(z, t) \delta z$$

$\hookrightarrow C/m : \underline{\text{linéique}}$

$$\delta q_b = \lambda_b(z, t) \delta z = - \delta q_a$$

$$\vec{J}_s = - \frac{\epsilon_0 a}{\mu_0 c b} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_z \quad /$$



$$\frac{\partial j_{sa}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_a}{\partial t} = 0$$

équation locale de conservation de charge.

$$\frac{\partial i}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 \quad \text{équation linéaire}$$

$$5) Z_c = \frac{\text{impédance caractéristique}}{I} = \frac{U}{I}$$

$$I = \int \vec{j}_{sa} \cdot d\vec{l} \cdot \vec{n}^*, \quad I = \iint \vec{j}_V \cdot d\vec{S}$$

$$I = j_{sa} \cdot \int_0^{2\pi} a \, d\theta = 2\pi a j_{sa}$$

$$I = \frac{2\pi a E_a}{\mu_0 c} \cos(\omega t - kz)$$

$$U = V_a - V_b = ? ; E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\int_a^b \frac{\partial V}{\partial r} dr = - \int_a^b \frac{a E_a}{r} \cos(\omega t - kz) dr$$

$$V_a - V_b = a E_a \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cos(\omega t - kz)$$

$$Z_c = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E B}{\mu_0} \vec{u}_z$$

$$\vec{T} = \frac{E(r)}{\mu_0} \frac{E(r)}{c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

$$\vec{T} = \frac{(a E_a)^2}{\mu_0 c r^2} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

$$\langle I \rangle = \int_a^b \frac{a^2 E_a^2}{\mu_0 c r^2} \frac{1}{2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{a^2 E_a^2}{2 \mu_0 c} 2\pi \ln\left(\frac{b}{a}\right) = Z_c \langle I^2 \rangle$$

$$\frac{\langle P \rangle}{\langle I^2 \rangle} = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = Z_c$$