Dr Kchaou borhen

Section PT2-MP2-PC2

PHYSIQUE DES ONDES
ELECTROMAGNETIQUE
(EFFET DE PEAU)
SERIE N°2

Exercice 1 : Effet de peau dans un conducteur métallique. Calculs de E, B, A, i

Un métal (cuivre) de conductivité $\gamma = 5{,}9.10^7\ \Omega^{-1}m^{-1}$, caractérisé par les constantes ε_0 et μ_0 du vide, occupe le demi-espace $x > 0$. On notera $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ la base orthonormée du référentiel Oxyz.

On envoie une onde électromagnétique plane de pulsation $\omega = 2\pi f$ dans le vide ($x < 0$) normalement à l'interface (plan x = 0) vide-métal. Le champ électrique est, sur l'interface (x = 0) : $\vec{E} = E_0\, e^{j\omega t}\, \vec{u}_y$. On donne, $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\,\pi\, 10^9}$; célérité de la lumière dans le vide $c = 3.10^8$ m/s

1- Jusqu'a quelle fréquence f_0 le courant de déplacement est-il négligeable par rapport a la densité de courant de conduction dans ce conducteur, a 10^{-3} prés ? Conclure. On se placera dans la suite à des fréquences d'ondes $f < f_0$.

2- Etablir les équations différentielles vérifiées respectivement par le champ $\vec{E}(x,y,z,t)$ puis par le champ $\vec{B}(x,y,z,t)$ a l'intérieur du métal en M(x, y, z).

3- La géométrie du système impose des solutions de la forme

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_1(x)\, \exp j(\omega t)\, \vec{u}_y$$ indépendantes de y et z.

a- Montrer que le champ électrique dans le métal est de la forme, en notations réelles

$$\vec{E}(x,t) = E_0\, \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left[\omega t - \frac{x}{\delta}\right] \vec{u}_y$$

On exprimera la longueur caractéristique δ en fonction de μ_0, γ et ω.

b- En déduire, en notations réelles, le champ magnétique $\vec{B}(x,t)$.

4- La fréquence de l'onde est **f = 3 GHz**. Calculer, dans le vide puis dans le conducteur, le rapport des modules des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, leur déphasage (φ), le module k du vecteur d'onde, La vitesse de phase et la vitesse de groupe.

5- a- Exprimer, en notation réelle, le vecteur densité de courant $\vec{j}(x,t)$ dans le métal. Mettre en évidence l'effet de peau et donner un sens physique à la grandeur δ.

b- Exprimer l'intensité **I(t)** du courant qui traverse la surface définie par $0 < x < \infty$ et $0 < z < z_0$, ainsi que l'intensité efficace I_{eff} en fonction de E_0, γ, z_0 et δ.

c- Calculer la puissance moyenne dissipée par effet Joule à l'intérieur du volume parallélépipédique du conducteur, définie par $0 < x < \infty$, $0 < z < z_0$, $0 < y < y_0$

d- En déduire la résistance équivalente r de ce volume de conducteur ; Conclure.

6- a- Exprimer l'énergie magnétique moyenne par unité de volume du conducteur

b- En déduire l'inductance propre ce conducteur équivalent L du volume de conducteur

c- dans le cas : $z_0 = y_0$ exprimer en fonction de γ et δ l'impédance complexe Zs équivalente, appelé impédance de surface

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Exercice 2 : Réflexion et transmission d'une onde plane dans un métal réel

L'espace est rapporté au référentiel orthonormé $Oxyz$ de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Un métal homogène, de conductivité $\gamma = 6\,10^7\ \Omega^{-1}m^{-1}$, occupe le demi-espace $z \geq 0$ et le vide occupe le demi-espace $z < 0$.

Une onde plane monochromatique de fréquence ν *polarisée rectilignement suivant Ox, se propage* dans le vide *vers les z croissants,* son champ électrique est : $\vec{E_i}(x,t) = E_{0i} \exp j[\omega t - k_1 z]\,\vec{u}_x$ avec E_{oi} réel .

Cette onde incidente qui tombe en $z = 0$ sur le métal engendre une onde réfléchie et une onde transmise. Le champ électrique de l'onde transmise dans le métal est de la forme : $\vec{E_t}(x,t) = E_{0t} \exp j[\omega t - k_2 z]\,\vec{u}_x$

. Le champ électrique de l'onde réfléchie dans le métal est de la forme : $\vec{E_r}(x,t) = E_{0r} \exp j[\omega t + k_1 z]\,\vec{u}_x$

On donne dans le vide , $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\,\pi\,10^9}$; célérité de la lumière dans le vide $c = 310^8 m/s$

1- Établir la relation de dispersion qui lie dans le métal le nombre d'onde k' à la pulsation ω de l'onde.

2- Montrer que pour les ondes de fréquence $\nu < 10^{+16}$ **Hz** regroupant les ondes hertziennes, les infrarouges la lumière visible et les ultraviolets, on a $\gamma/\varepsilon_0\omega >> 1$ et la relation de dispersion se réduit à $k_2 = \dfrac{1-j}{\delta}$.

Exprimer δ en fonction de ω et des données ε_0, c, γ ; donner la signification physique de δ.

On se placera dans toute la suite du problème dans les conditions de cette 2eme question.

3- Calculer le rapport $\alpha = v_\varphi/c$ entre les vitesses de phase de l'onde dans le métal et dans le vide, en fonction de ε_0, ω et γ.

4- Exprimer le champ magnétique $\vec{B}_t$, de l'onde transmise. Déterminer, en tout point de cote z du métal :

* Le déphasage entre les champs E et B,
* Le rapport des amplitudes des champs E et B en fonction de α et c.

5- Déterminer, en fonction de α, les coefficients complexes de transmission $\tau = \dfrac{E_{ot}}{E_{oi}}$ et de réflexion $\rho = \dfrac{E_{or}}{E_{oi}}$ en amplitude.

6- a- Exprimer, en fonction de α les facteurs de réflexion **R** et de transmission **T** définis respectivement comme les proportions de puissances réfléchie et transmise moyennes. **Cas où α << 1.**

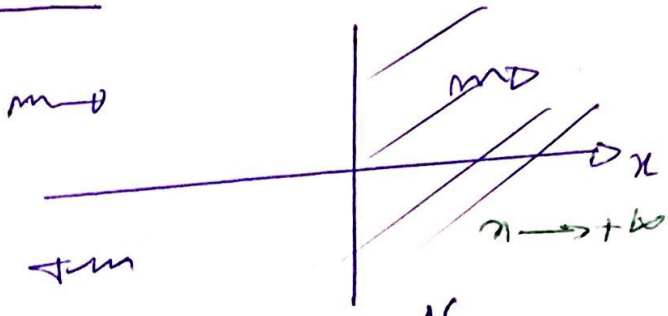
b- *Application numérique* : Calculer pour les ondes de fréquences respectives $\nu_1 = 100$ Hz et $\nu_2 = 10$ GHz, la longueur d'onde λ et les coefficients δ, α et T

7- Calculer la puissance dissipée par effet Joule dans la portion de métal de section unité, en fonction de ε_0, c, γ, ω et E_0.

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Electromag rayonnement série 5.

Problème 1



1) $\frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}_c\|} < 10^{-3} = 1‰ \Rightarrow f \leq f_0 = 10^{16}\,Hz$

$f \leq f_0 = \frac{\gamma\, 10^{-3}}{2\pi\varepsilon}$

Hertziennes, IR ; visible ; UV proches.

$f > f_0$: UV lointain ; RX ; Rγ

2) $\Delta\vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$

3) $\vec{E} = \underline{E_1}(n)\, e^{i\omega t}\, \vec{u_y}$

$e^{i\omega t}\left(\frac{d^2\underline{E_1}}{dn^2} - i\mu_0\gamma\omega\,\underline{E_1}(n)\right) = 0$

$r^2 = i\mu_0\gamma\omega$

$r^2 = \frac{(1+i)^2}{2}\mu_0\gamma\omega$ | $r = \pm\frac{(1+i)}{\delta}$

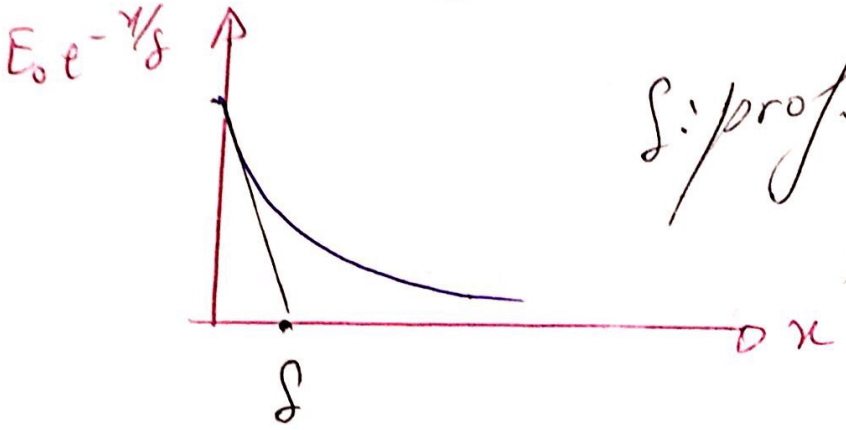
$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$

(13) ودسمبر 9

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp\left[-(1+i)\frac{x}{\delta}\right] e^{i\omega t}\,\vec{u}_y$$

$$\underline{\vec{E}} = \left[E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\right] \exp i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\vec{u}_y$$



δ : profondeur de pénétration

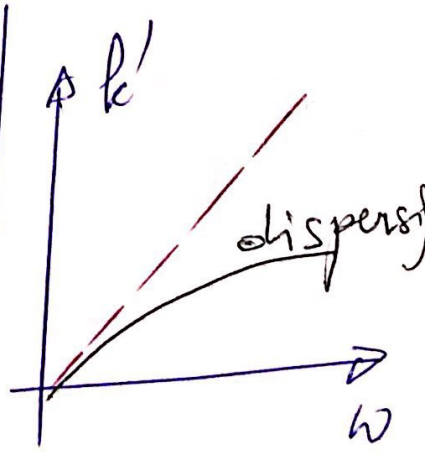
b) $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\underline{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$; , $\underline{k} = \dfrac{1-i}{\delta} = \dfrac{\sqrt{2}}{\delta} e^{-i\pi/4}$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega}\left(E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\right) \exp i\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_z$$

4) $f = 3\,GHz = 3\,10^9\,Hz$

$$\|\vec{B}\| = \|\vec{E}\|\frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} \neq \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

$$k' = k'' = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu\gamma\omega}{2}}$$



9 ديسمبر (14)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \omega\delta = \omega\sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma}}$$

$v_\varphi(\omega) =$ dispersif

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} ; \quad k' = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma}{2}}\sqrt{\omega}$$

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk'}{d\omega} = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma}{2}}\frac{1}{2\sqrt{\omega}}$$

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0\gamma}{2\omega}} = \frac{1}{2v_\varphi}$$

$$\boxed{v_g = 2v_\varphi}$$; $v_g \cdot v_\varphi \neq c^2$

~~opaque~~ opaque

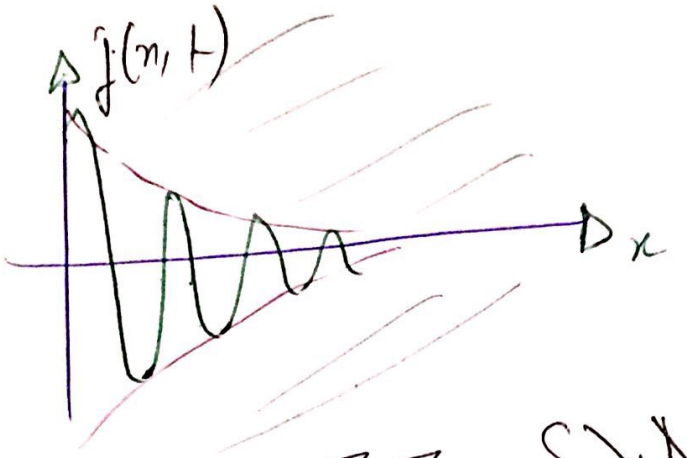
5) a) $\vec{j} = \gamma\vec{E}$

$$\vec{j} = \gamma E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\vec{u}_y$$

progressive ; atténuée

9 décembre (15)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.



$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \gamma \omega}}$$

Si $\omega \nearrow\nearrow$; $\delta \searrow\searrow$ on parle d'effet de peau ou effet pelliculaire.

b) $I(t) = \iint \vec{J} \, d\vec{S} = \iint \gamma \vec{E} \, d\vec{S}$

$$= \gamma E_0 \int_0^{\infty} e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) dx \int_0^{z_0} dz$$

$$= \gamma E_0 z_0 \int_0^{\infty} \text{Réel}\left[e^{i(\omega t)} \, e^{-\left((1+i)\frac{x}{\delta}\right)} dx \right]$$

$$= \gamma E_0 z_0 \; \text{Réel}\left(e^{i\omega t}\right) \int_0^{\infty} \exp\left(-(1+i)\frac{x}{\delta}\right) dx$$

$$= \gamma E_0 z_0 \, \text{Réel}\left(\frac{\delta}{(1+i)} \, e^{i\omega t} \right)$$

$$(1+i) = \sqrt{2} \, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\gamma E_0 z_0 \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

9 ديسمبر (16)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Ex2 $\quad \underline{\vec{E}_i} = \underline{E_{0i}} \exp i(\omega t - k_1 z)\vec{u}_x$

$\underline{\vec{E}_r} = \underline{E_{0r}} \exp i(\omega t + k_1 z)\vec{u}_x$

$\underline{\vec{E}_t} = E_{0t} \exp(i\omega t - \underline{k_2} z)\vec{u}_x$

1) $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu\left(\gamma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

$\Delta\vec{E} - \mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

$\left(-\underline{k_2}^2 - \mu\gamma i\omega + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{\vec{E}_t} = \vec{0}$

$$\boxed{\underline{k_2}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu\gamma\omega}$$

$$\underline{k_2}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{i\gamma}{\varepsilon_0\omega}\right]$$

$$\underline{k_2} = k_2' - i k_2''$$

$$\underline{k_2}^2 = (k_2'^2 - k_2''^2) - i 2k_2' k_2''$$

9 ديسمبر (17)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$2k_2'k_2'' = \mu_0 \gamma \omega > 0$$

$$k_2'^2 - k_2''^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$|\underline{k}_2|^2 = k_2'^2 + k_2''^2 = |\underline{k}_2^2|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)^2 + (\mu_0 \gamma \omega)^2}$$

$$2k_2'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \sqrt{\frac{\omega^4}{c^4} + (\mu_0 \gamma \omega)^2}$$

$$2k_2''^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + \sqrt{\frac{\omega^4}{c^4} + (\mu_0 \gamma \omega)^2}$$

2) $\nu < 10^{16}\,Hz$; $\quad \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 2\pi\nu}$

$$\geq \frac{\gamma}{\varepsilon_0 2\pi \nu_{max}} = 108 \gg 1$$

$$\frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega} \gg 1$$

9 ديسمبر (18)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\underline{k}_2^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}\left[-i\frac{\gamma}{\xi\omega}\right] = -i\frac{\gamma\omega\mu_0}{\cdot}$$

$$\underline{k}_2^2 = \frac{(1-i)^2}{\left(\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}\right)} \Rightarrow \underline{k}_2 = +\left(\frac{1-i}{\delta}\right)$$

$$\underline{k}_2 = -\left(\frac{1-i}{\delta}\right) \quad \text{: impossible}$$

$$\underline{\vec{E}}_t = \underline{E}_{0t}\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\exp i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{u}_x$$

3) $$\alpha = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega\delta}{c} = \frac{\omega}{c}\cdot\sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$$

$$\alpha = \frac{\left(2\xi\omega\right)^{1/2}}{\gamma} \ll 1 \qquad \alpha \ll 1$$

4) $$\underline{\vec{B}} = \frac{(1-i)}{\delta\omega}\underline{E}\,\vec{u}_y$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega}e^{-i\frac{\pi}{4}}\underline{E}\,\vec{u}_y$$

9 ديسمبر (19/20)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\underline{\vec{B}}_t = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega}\,\underline{E}_{0t}\,\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\exp i\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_y$$

5) $\underline{r} = \dfrac{\underline{E}_{0r}}{E_{0i}}$; $\underline{t} = \dfrac{\underline{E}_{0t}}{E_{0i}}$

$$\begin{cases} \underline{E}_i + \underline{E}_r = \underline{E}_t \\ \underline{B}_i + \underline{B}_r = \underline{B}_t \end{cases} \qquad \vec{J}_s = \vec{0} \quad \text{en } z = 0.$$

$$E_{0i} + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_{0t}$$

$$\frac{E_{0i}}{c} - \frac{\underline{E}_{0r}}{c} = \frac{\underline{E}_{0t}\sqrt{2}}{\delta\omega}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ 1 - \underline{r} = \underline{t}\,\dfrac{c}{\delta\omega}\,\sqrt{2}\,\dfrac{(1-i)}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ 1 - \underline{r} = \dfrac{\underline{t}\,(1-i)}{\alpha} \end{cases} ; \quad \alpha = \frac{\delta\omega}{c}$$

$$2 = \underline{t}\left(1 + \frac{(1-i)}{\alpha}\right) ; \quad \underline{t} = \frac{2\alpha}{\alpha + 1 - i}$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\underline{r} = \underline{t} - 1 = \frac{2\alpha}{(\alpha+1) - i} - 1$$

$$\underline{r} = \frac{2\alpha - (\alpha+1) + i}{(\alpha+1) - i}$$

$$\underline{r} = \frac{(\alpha-1) + i}{(\alpha+1) - i}$$

Rq : $\alpha = \frac{\delta\omega}{c}$

$$\underline{t} = \frac{2\alpha}{\alpha + (1-i)} = \frac{2\frac{\omega}{c}}{\frac{\omega}{c} + \frac{(1-i)}{\delta}}$$

$$\boxed{\underline{t} = \frac{2k_1}{k_1 + \underline{k_2}}} \quad ; \quad \underline{r} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)$$

voir DT2 : 2018 Pb2

$$R = \frac{\langle \| \overline{\Pi_r} \| \rangle}{\langle \| \overline{\Pi_i} \| \rangle} = |\underline{r}|^2 = \left|\frac{\underline{E_{0r}}}{E_{0i}}\right|^2$$

$$\langle \overline{\Pi_i} \rangle = \frac{E_{0i}^2}{2\mu c} \vec{u}_x \; ; \quad \langle \overline{\Pi_r} \rangle = \frac{-|\underline{E_{0r}}|^2}{2\mu c}$$ (en direction $-\vec{u}_x$)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$T = \frac{|\underline{t}|^2}{\alpha} = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2 \pm 1}$$

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{1}{2\mu} Rél\left[\underline{\vec{E}}_t \wedge \underline{\vec{B}}_t^*\right]$$

$$= \frac{1}{2\mu} Rél\left[\underline{E}_{0t}\, e^{-\frac{z}{\delta}}\, e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{2}\,\underline{E}_{0t}^*}{\delta\omega}\, e^{-\frac{z}{\delta}}\, e^{-i(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4})}\right]$$

$$= \frac{|\underline{E}_{0t}|^2}{2\delta\omega\mu_0} \sqrt{2}\, \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) Rél\left[e^{i\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{|\underline{E}_{0t}|^2}{2\mu_0 \delta\omega} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) \vec{u}_z$$

$$T = \frac{\langle \|\vec{\Pi}_t\|_{z=0} \rangle}{\langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle} = \frac{|\underline{E}_{0t}|^2}{E_{0i}^2} \frac{c}{\delta\omega}$$

$$R + T = 1$$

$$\langle \|\vec{\Pi}_t\| \rangle S = \langle P_{Joule} \rangle = \langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle S - S\langle \|\vec{\Pi}_r\| \rangle$$

$$= S \langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle \left[1 - R\right] = S\left(\frac{\varepsilon_0 c E_{0i}^2}{2}\right)(1 - R)$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.