D' Kchaou borhen

Propagation d'une OPPM dans un diélectrique en présence de B

Dans tout le problème, l'espace sera rapporté à un repère cartésien de base orthonormé directe $(\vec{u}_x\ \vec{u}_y\ \vec{u}_z)$

On considère un milieu diélectrique linéaire, homogène, isotrope, de permittivité électrique ε et de permittivité magnétique μ_0. Du point de vue macroscopique ce milieu est dépourvu de charges et de courants libres.

Partie I : Le milieu est soumis à l'action d'une onde électromagnétique plane sinusoïdale, de pulsation ω et de vecteur d'onde k. Le champ électrique associé à cette onde s'écrit : $\vec{E}(M) = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

L'équation de mouvement d'un électron de masse m, de charge (-e) de pulsation propre ω_0 s'écrit

$$m\ddot{\vec{s}} = -m\omega_0^2\vec{s} - e\vec{E}$$

1- Interpréter chaque terme de l'équation du mouvement et justifier les approximations utilisées :

2- a- Donner la solution de l'équation de mouvement en régime forcé.

b- Déduire le vecteur de polarisation P du milieu. On désigne par N le nombre d'électron par unité de volume $\vec{P} = N\vec{p}$

c- Déterminer la susceptibilité électrique et la permittivité relative ε_r.

d- Que devient ε_r quand ω tend vers ω_0 ? Comment doit-on modifier le modèle pour obtenir un résultat physiquement acceptable au voisinage de ω_0

3- a- Ecrire les équations de Maxwell dans le milieu

b- Déduire l'équation de dispersion.

c- Pour quelles pulsations l'onde peut-elle se propager dans le milieu diélectrique ?

Partie II : le milieu diélectrique est soumis à un champ magnétique uniforme et indépendant du temps $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_x$ avec $B_0 > 0$.

1- On envoie dans le milieu une onde électromagnétique plane sinusoïdale, de pulsation ω de vecteur d'onde $\vec{k}$ et caractérisé par le champ électrique $\vec{E}_1 = E_0\left[\cos(\omega t - k_1 x)\vec{u}_y + \sin(\omega t - k_1 x)\vec{u}_z\right]$ où E_0 est une constante.

a- Déterminer la polarisation de l'onde.

b- Ecrire l'équation du mouvement d'un électron élastiquement lié.

c- Montrer que $\vec{s}_1$ s'écrit : $\vec{s}_1 = -\dfrac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - \Omega\omega)}\vec{E}_1$.

d- Déduire la permittivité relative $\varepsilon_{r1}(\omega)$.

e- Pour quelles valeurs de ω, l'onde se propage-t-elle dans le milieu ?

f- Quel est l'effet du champ magnétique $\vec{B}_0$ sur l'indice de réfraction du milieu ?

2- On envoie maintenant dans le milieu une onde électromagnétique plane monochromatique de pulsation ω, de nombre d'onde k_2 et dont le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}_2 = E_0\left[\cos(\omega t - k_2 x)\vec{u}_y + \sin(\omega t - k_2 x)\vec{u}_z\right]$$

a- Quel est l'état de polarisation de l'onde.

b- Sachant que dans ce cas la solution de l'équation du mouvement s'écrit : $\vec{s}_2 = -\dfrac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega\omega)}\vec{E}_2$,

déterminer la permittivité diélectrique ε_{r2}

Partie III : le milieu diélectrique occupe la région de l'espace limitée par les plans $x = 0$ et $x = d$, et est placé dans le vide. Dans la partie $x < 0$, se propage l'onde électromagnétique suivante : $\vec{E} = 2E_0\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$

1- Décrire cette onde incidente sur le diélectrique. Vérifier que $\vec{E}$ peut se décomposer en deux ondes polarisées circulairement.

2- Calculer les composantes du champ électrique pour x compris entre 0 et d (on admettra que le coefficient de transmission sur l'interface $x = 0$ vaut 1).

3- Montrer que pour certains domaines de pulsations dont on déterminera les limites, l'onde se propageant dans le diélectrique est polarisée rectilignement.

4- Montrer que la direction de polarisation tourne quant x varie de 0 à d.

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

mahdystudies.tn

Suite Partie I :

4- Déterminer la vitesse de phase v_φ de l'onde dans un tel milieu en fonction de ε_r et c

Dans le cas d'une onde lumineuse, définir l'indice de réfraction **n** en fonction de v_φ puis en fonction de ε_r et enfin en fonction de ω_p, ω_0 et ω

Dans le but de simplifier les calculs dans tout ce qui suit on se placera dorénavant dans le cas particulier où $\omega_p = \omega_0$

5- Montrer que lorsque ω est très inférieur à ω_0, une approximation au premier ordre conduit à écrire l'indice de réfraction sous la forme : $\mathbf{n}(\lambda) = \mathbf{a} + \dfrac{\mathbf{b}}{\lambda^2}$

- Qu'appelle ton la relation obtenue ? quel phénomène physique cette relation met en évidence ?
- Calculer la valeur numérique de ω_p et celle des coefficient a et b, dans le cas d'un verre où $N = 3{,}2\ 10^{28}$ électrons /m^3 et $\varepsilon_0 = 8{,}84\ 10^{-12}$ F.m^{-1}
- Expliquer pourquoi lors de la réfraction, un faisceau de lumière poly-chromatique se décompose en plusieurs faisceaux de lumière monochromatique.

6- Afin d'illustrer ce phénomène, on éclaire un prisme d'angle A et d'indice **n** dépendant de la longueur d'onde λ en lumière blanche parallèle tombant perpendiculairement a sa face d'entrée. Pour une la longueur d'onde λ_0, l'indice correspondant étant nommé n_0 on interpose le faisceau émergent du prisme avec une lentille mince (L) perpendiculaire à ce faisceau lequel converge alors vers le foyer image F'. L'angle de réfraction de ce faisceau en sortie du prisme sera nommée r_0.

Pour *toute autre longueur* d'onde λ le faisceau qui émerge du prisme, *réfracte* sous un angle $r_0 + \theta$ par rapport à l'axe de la lentille, un très petit écart angulaire θ et convergera vers un foyer image secondaire Φ' voisin du foyer image principal F' correspondant à l'indice $n(\lambda)$.

- Exprimer : **sin** r_0 en fonction de n_0 et de A
- Sachant que $\theta << r_0$; faire un développement limité de $\sin(r_0 + \theta)$ au premier ordre en θ , puis exprimer θ en fonction de n, n_0 et A.

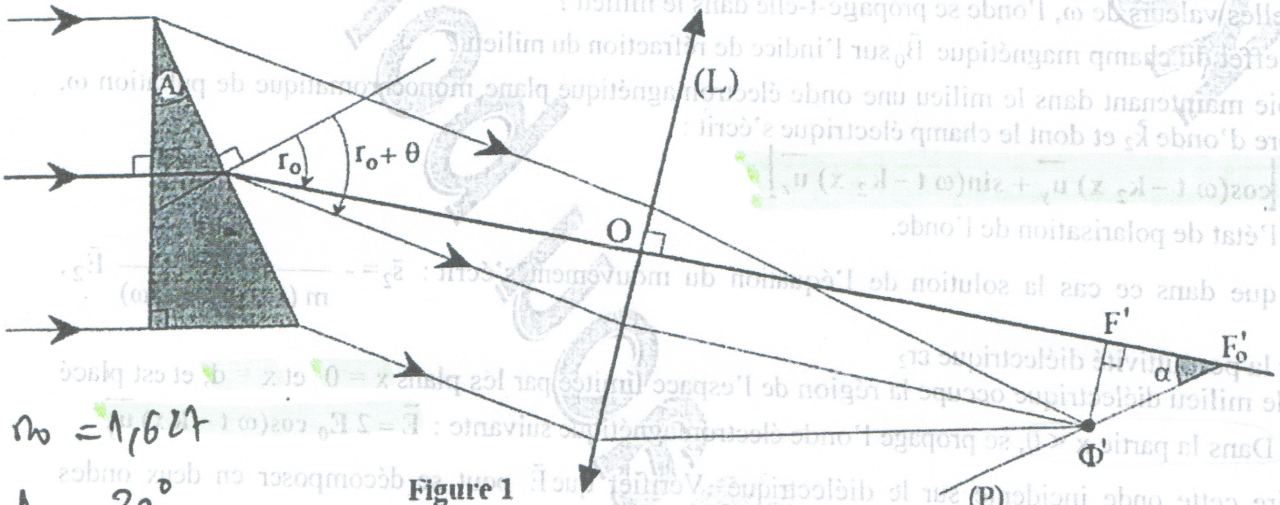


Figure 1

$n_0 = 1{,}627$

$A = 30°$

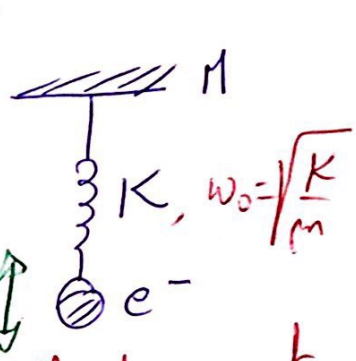
$\lambda = 0{,}75\ \mu m$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Propagation d'une onde dans un diélectrique

I)

1) $m\ddot{\vec{S}} = (-m\omega_0^2 \vec{S}) - e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\dot{\vec{S}}$



- $-m\omega_0^2 \vec{S}$ = force de rappel
- $-e\vec{E}$ = force électrique.
- $\ddot{\vec{S}}$: accélération de l'e⁻
  - $m\|\vec{g}\| \ll \|\vec{F}_e\|$; $\|\vec{F}_{mg}\| \ll \|\vec{F}_e\|$

    $\|\vec{F}_{vis}\| \ll \|\vec{F}_e\|$

2) a) $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \vec{k}\vec{r})$

$$-m\omega^2 \underline{\vec{S}} = -m\omega_0^2 \underline{\vec{S}} - e\underline{\vec{E}} - \frac{i\omega}{\tau} m \underline{\vec{S}}$$

$$\underline{\vec{S}} = -\frac{e}{m} \frac{\underline{\vec{E}}}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{i\omega}{\tau}\right]}$$

b) $\underline{\vec{P}} = N\underline{\vec{p}} = -Ne\underline{\vec{S}}$

(1)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\underline{P} = \frac{N e^2}{m} \frac{\underline{E}}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{i\omega}{\tau}\right]}$$

N : nbs d'e⁻ par unité de volume.

$$\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \underline{\chi}(\omega) \underline{\vec{E}}$$

↳ susceptibilité électrique

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

$$\Rightarrow \underline{\chi}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}} = \varepsilon_r(\omega) - 1$$

$$\underline{\varepsilon_r}(\omega) = 1 + \underline{\chi}(\omega)$$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \left(\frac{i\omega}{\tau}\right)}$$

d) $$\varepsilon_r(\omega) = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} + 1$$

dispersif : propriétés électrique dépend de ω. (2)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$\lim \varepsilon_r(\omega) = \pm\infty$ diverge

$\omega = \omega_0$

pour corriger le modèle, il faut tenir compte des forces de viscosités.

3) a) $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left[\vec{0} + \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]$

$$\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

onde Plane $\quad -k^2\underline{E} - \frac{\varepsilon_r}{c^2}(-\omega^2)\underline{E} = \vec{0}$

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\varepsilon_r} = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right]$$

onde se propage $k^2 > 0$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\left[\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2\right]}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

		ω_0		$\omega_0^2+\omega_p^2$
$\omega_0^2-\omega^2$	+	‖	−	−
$\omega_0^2+\omega_p^2-\omega^2$	+	‖	+	−
k^2	+	‖	−	+

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$k^2 > 0$

$\omega \in]0 , \omega_0 [\cup] \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2} ; +\infty [$

4) $v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}}} = \frac{c}{n}$

$\underline{k^2 < 0}$: $\underline{k} = i k''$ évanescente

$\underline{k} = \frac{\omega}{c} \underline{n}$ $\quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r$

$\boxed{\underline{n}^2 = \underline{\varepsilon_r}}$; $(n' - i n'')^2 = \varepsilon_r' - i \varepsilon_r''$

Dans notre cas

$$n = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

* $\omega < \omega_0$; $(\omega_0^2 - \omega^2) > 0$

$n > 1$

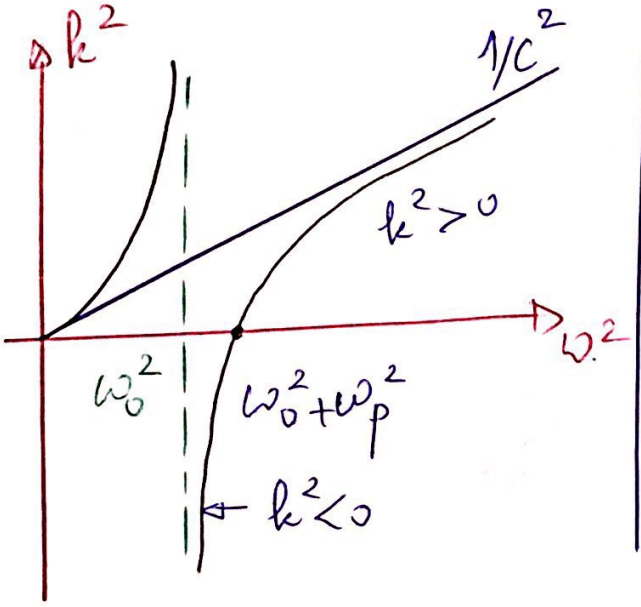
(4)

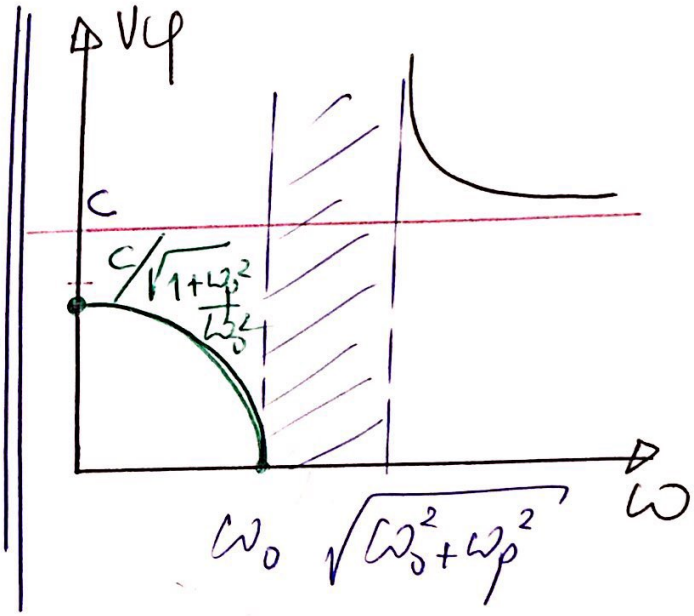
© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$\omega > \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2} \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2) < -\omega_p^2 < 0$

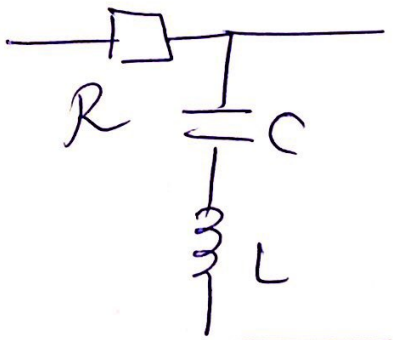
$\Rightarrow \underline{n < 1}$

Tracer $k^2 = f(\omega^2)$ et $v_\varphi = f(\omega)$





filtre <u>coupe-bande</u>



5) $n = \left[1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right]^{1/2}$

$\omega_p = \omega_0$ et $\omega \ll \omega_0$

Hq : $n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$ (5)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$n = \left[1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}\right]^{1/2}$$

$$n = \left[1 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1}\right]^{1/2}$$

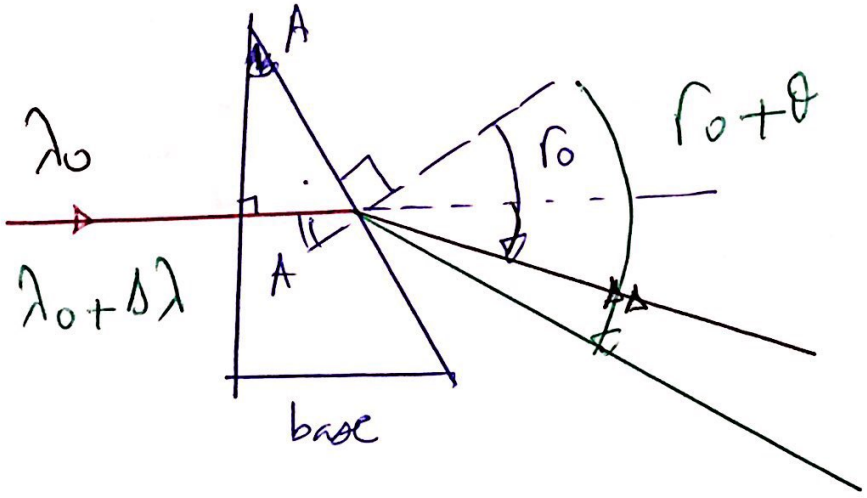
$$n = \left(1 + 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2}$$

$$n = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2\times 2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$$

$$n = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\,\lambda_0^2}{4\lambda^2} = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

Formule de Cauchy



$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

$$n_0(\lambda_0) = a + \frac{b}{\lambda_0^2}$$

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

(6)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$n_0 \sin A = \sin r_0$$

$$n(\lambda) \sin A = \sin(r_0 + \theta) \quad ; \qquad \theta \ll r_0$$

$$n(\lambda) \sin A = \sin r_0 \cos\theta + \sin\theta \cos r_0$$

$$n(\lambda) \sin A \simeq \sin r_0 + \theta \cos r_0$$

$$\theta = \frac{n(\lambda) \sin A - \sin r_0}{\cos r_0}$$

$$\theta = \frac{\left(n(\lambda) - n_0\right) \sin A}{\sqrt{1 - n_0^2 \sin^2 A}} = 23'$$

$1^\circ \longrightarrow 60'$

$1' \longrightarrow 60''$

Rq : $\left(n'^2 - n''^2\right) - i\, 2n'n'' = \xi' - i\xi''$

$$\begin{cases} n'^2 - n''^2 = \xi' \\ 2n'n'' = \xi'' \end{cases} \qquad |\underline{n}|^2 = n'^2 + n''^2$$

$$|\underline{n}^2| = \sqrt{\xi'^2 + \xi''^2}$$

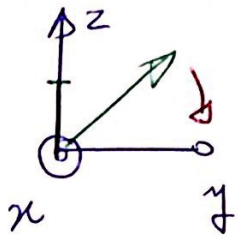
© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Partie II

$$\vec{E}_1 = E_0\left(\cos(\omega t - k_1 x)\,\vec{e}_y - \sin(\omega t - k_1 x)\,\vec{e}_z\right)$$

1)

a) $\left(\frac{E_y}{E_0}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_0}\right)^2 = 1$



$\left.\frac{dE_z}{dt}\right|_{\substack{x=0 \\ t=0}} = -\omega E_0 < 0$, droite

$E_z(t) \searrow$

$\vec{k}\cdot\left[\vec{E}\wedge\frac{d\vec{E}}{dt}\right] = S < 0.$

---

b) $m\ddot{\vec{s}}_1 = -e\vec{E}_1 - m\omega_0^2\vec{s}_1 - e\left(\dot{\vec{s}}_1\wedge\vec{B}_0\right)$

$\vec{s}_1 = s_0\left[\cos(\omega t - k_1 x)\,\vec{e}_y - \sin(\omega t - k_1 x)\,\vec{e}_z\right]$

$\dot{\vec{s}}_1 = s_0\left[-\omega\left(\sin(\quad)\,\vec{e}_y - \cos(\quad)\,\vec{e}_z\right)\right]$

$-e\,\dot{\vec{s}}_1\wedge\vec{B}_0 = +e B_0\,\omega\,\vec{s}_1$

(γ)

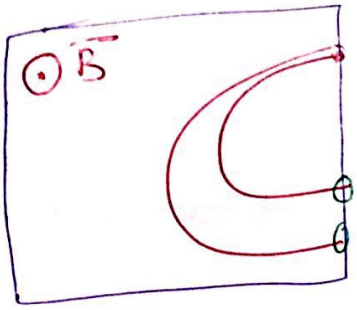
© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$-\omega^2 \vec{S}_1 = \frac{-e}{m}\vec{E}_1 - \omega_0^2 \vec{S}_1 + \frac{eB_0}{m}\omega \vec{S}_1$$

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{eB_0}{m}\omega\right]\vec{S}_1 = -\frac{e}{m}\vec{E}_1$$

$$\vec{S}_1 = -\frac{e\ \vec{E}_1}{m\left[(\omega_0^2 - \omega^2) - \Omega\omega\right]}$$

$\Omega = \frac{eB_0}{m}$ = pulsation du cyclotron



^1_1H ^2_1H

$$\vec{P} = -Ne\vec{S}_1 = +\frac{Ne^2}{m}\frac{\vec{E}_1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - \Omega\omega}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_1(\omega)\vec{E}_1 = \varepsilon_0(\varepsilon_{r1} - 1)\vec{E}_1$$

$$\varepsilon_{r1}(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - \Omega\omega}$$

$\varepsilon_r(\omega) > 0$

(9)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Partie II

$$\vec{E}_2 = E_0 \left(\cos(\omega t - k_2 x)\, \vec{e}_y + \sin(\omega t - k_2 x)\, \vec{e}_z\right)$$

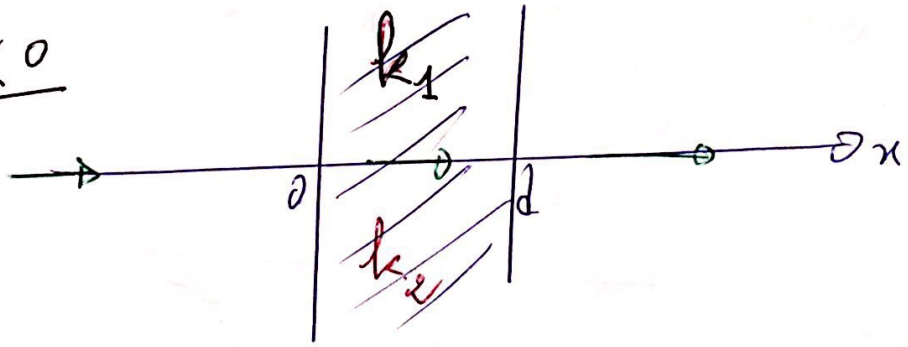
circulaire gauche

$$\varepsilon_2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\omega}$$

Partie III

$$\vec{E} = 2E_0 \cos(\omega t - kx)\, \vec{e}_y$$

$x < 0$



$$\vec{E} = \vec{E}_0 \begin{vmatrix} 0 \\ \cos(\omega t - kx) \\ \sin(\omega t - kx) \end{vmatrix} + \vec{E}_0 \begin{vmatrix} 0 \\ \cos(\omega t - kx) \\ -\sin(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

CG k_2 CD k_1

(10)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$x \in [0, d]$

$$\vec{E} = E_0 \begin{vmatrix} 0 \\ 2\cos\left(\omega t - \left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x\right) & \cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x\right) \\ 2\cos\left(\omega t - \left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x\right) & \sin\left(\frac{k_1-k_2}{2}x\right) \end{vmatrix}$$

$$\left(\frac{E_z}{E_y}\right) = \tan\left(\frac{k_1-k_2}{2}x\right) = \tan\theta$$

$$\theta = \frac{k_1-k_2}{2}x$$

$\theta \simeq 6^\circ$, $B_0 \simeq 10^{-5}\,T$

$d = \underline{8\,km}$.

(11)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.