

$$\vec{v}_{\text{electron}} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

D' Kchaou borhen

Champ B
↑
extérieur

Dans le milieu est anisotrope ;

la loi d'ohm locale $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ est fautive

$$\Rightarrow [\vec{j}] = [\sigma] [\vec{E}] \leftarrow \text{écriture matricielle}$$

Section MP2-PT2-PC2

Effet Faraday dans un plasma

Un plasma est un gaz ionisé, constitué par des ions positifs (charge $+e$, masse M) et des électrons (charge $-e$, masse m). Ce gaz est "dilué": ainsi toutes les interactions entre charges sont négligées (elles sont libres en l'absence de tout champ). Le champ de pesanteur est négligé. Le plasma est "froid", c'est-à-dire qu'on ignore toute agitation thermique des particules. En l'absence de champ, il y a N ions et N électrons par unité de volume. Le plasma est à présent plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}_0$ parallèle à Oz et dirigé dans le sens de propagation de l'onde ($\vec{B}_0$ longitudinal).

Le champ électrique de l'onde est toujours de la forme : $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - kz))$

Avec a priori trois composantes E_x, E_y, E_z et E_0 complexe pour n'inclure aucun type de polarisation

$\vec{B}_0$ est suffisamment intense pour en tenir compte dans la force de Lorentz.

Notations : $\omega_c = eB_0/m$; $\omega_p = \sqrt{Ne^2/\epsilon_0 m}$

1- a- A l'aide du P.F.D, donner en régime sinusoïdal permanent, les composantes cartésiennes de la vitesse $\vec{v}$ des électrons, puis en déduire celle du courant $\vec{j}$ en fonction de celles de E_0, ω_p, ω_c et ω (relation (1)).

b- Une autre méthode ; A l'aide du P.F.D, démontrer la relation vectorielle suivante :

$$\vec{j} = \frac{i \epsilon_0 \omega_p^2}{\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) \omega} \left[\vec{E} + \frac{i \omega_c}{\omega} (\vec{u}_z \wedge \vec{E}) \right]$$

on admet dans cette question que $E_z = 0$

$\vec{j} = \rho \vec{v}$ densité de charge

2-a - A l'aide d'une équation de Maxwell et de la loi de conservation de la charge, calculer la densité volumique de charge ρ et en déduire la composante longitudinale E_z du champ électrique. Justifier ce résultat.

b- Donner dans ce cas une relation vectorielle entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$ à partir des autres équations de Maxwell (Re (2))

3- a- Montrer que la condition de compatibilité des deux systèmes d'équations (1) et (2) amène à l'équation de dispersion.

$$\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right] = \left(\frac{\omega_p^2 \omega_c}{c^2 \omega} \right)^2$$

b- Résoudre cette équation et montrer qu'elle admet deux solutions notées k^- et $k^+ > k^-$. A quelles conditions sur ω , les grandeurs k^- et k^+ sont elles réelles.

$$k_+^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)} \right]$$

$$k_-^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_c)} \right]$$

Vecteurs d'ondes dans le plasma + $\vec{B}_{ext}$

AN : pour $N = 10^{12}$ électrons/m³ et $B_0 = 10^{-5}$ T.

4- La pulsation ω est telle que les valeurs de k^- et k^+ sont réelles positives.

a- quelles sont les polarisations des ondes planes correspondant aux solutions k^- et k^+ ? Écrire explicitement les champs $\vec{E}^-$ et $\vec{E}^+$ correspondants.

b- une onde de fréquence suffisante arrive sur le plasma en $z=0$ en étant polarisée rectilignement avec un champ $\vec{E}(z=0)$ suivant Ox . $\omega > \omega_p$

Montrer qu'elle est la superposition de deux ondes du type de celle obtenues à la question (4-a)

c- déduire qu'après la distance de propagation $z > 0$, l'onde initiale est toujours polarisée rectilignement,

mais que sa direction de polarisation a tourné autour de Oz d'un angle θ ; $\tan \theta = \frac{k_+ - k_-}{2} z$

d- on a d'après les valeurs numériques $\omega \gg \omega_p$; faire un développement limité de k_+ et k_- à l'ordre 1 et

montrer l'expression suivante : $k_+ - k_- = \frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega^2 c}$ (effet Faraday)

AN : calculer θ pour $N = 10^{12}$ électrons/m³ et $B_0 = 10^{-5}$ T. $z = 1$ km, $f = 100$ MHz.

Effet Faraday.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e (\vec{E} + (\vec{v} \wedge \vec{B}_0)) = -i\omega \vec{v} m$$

$$i\omega \vec{v} = +\frac{e}{m} (\vec{E} + (\vec{v} \wedge \vec{B}_0))$$

$$* \vec{v} \wedge \vec{B}_0 = \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_0 v_y \\ -B_0 v_x \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$i\omega v_x = \frac{e}{m} (E_x + B_0 v_y)$$

$$i\omega v_y = \frac{e}{m} (E_y - B_0 v_x)$$

$$i\omega v_z = \frac{e}{m} (E_z - 0)$$

$$\left\{ \begin{aligned} v_x &= -\frac{ie}{m\omega} (E_x + \frac{B_0}{\omega} v_y) = -\frac{ie E_x}{m\omega} - \frac{i\omega_c}{\omega} v_y \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} v_y &= -\frac{ie}{m\omega} (E_y - B_0 v_x) = -\frac{ie E_y}{m\omega} + \frac{i\omega_c}{\omega} v_x \end{aligned} \right.$$

$$v_z = -\frac{ie}{m\omega} E_z$$

(15)

$$\begin{cases} \underline{v}_x + \frac{i\omega_c}{\omega} \underline{v}_y = -\frac{ie}{m\omega} \underline{E}_x & (1) \\ \underline{v}_y - \frac{i\omega_c}{\omega} \underline{v}_x = -\frac{ie}{m\omega} \underline{E}_y & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \left(\frac{-i\omega_c}{\omega} \right)$$

$$\underline{v}_x \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) = -\frac{ie}{m\omega} \left(\underline{E}_x - \frac{i\omega_c}{\omega} \underline{E}_y \right)$$

$$(1) \times \left(\frac{i\omega_c}{\omega} \right) + (2)$$

$$\underline{v}_y \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) = -\frac{ie}{m\omega} \left(\underline{E}_y + \frac{i\omega_c}{\omega} \underline{E}_x \right)$$

$$\underline{j} = -Ne \underline{v}$$

$$\underline{j}_x = \frac{i\epsilon_0 \omega p^2}{\omega} \left(\frac{\underline{E}_x - \frac{i\omega_c}{\omega} \underline{E}_y}{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \right)$$

$$\underline{j}_y = \frac{i\epsilon_0 \omega p^2}{\omega} \left(\frac{\underline{E}_y + \frac{i\omega_c}{\omega} \underline{E}_x}{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \right)$$

$$\underline{j}_z = \frac{i\epsilon_0 \omega p^2}{\omega} \underline{E}_z \quad (16)$$

$$\underline{J} = [\underline{\sigma}(\omega)] \underline{E} \quad \underline{\text{Anisotrope}}$$

$$\omega_c = \frac{e B_0}{m}$$

$$b) + i\omega \vec{v} = +\frac{e}{m} (\vec{E} + (\vec{v} \wedge \vec{B}_0))$$

$$i\omega \vec{u}_z \wedge \vec{v} = \frac{e}{m} \left[\vec{u}_z \wedge \vec{E} + \vec{u}_z \wedge (\vec{v} \wedge B_0 \vec{u}_z) \right]$$

$$\text{or } \vec{u}_z \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u}_z) = \vec{v} (\vec{u}_z \cdot \vec{u}_z) - \vec{u}_z (\vec{u}_z \cdot \vec{v}) = \vec{v}$$

$$i\omega (\vec{u}_z \wedge \vec{v}) = \frac{e}{m} \left[(\vec{u}_z \wedge \vec{E}) + \vec{v} B_0 \right]$$

or IFD

$$i\omega \vec{v} = \frac{e}{m} \left[\vec{E} + (\vec{v} \wedge B_0 \vec{u}_z) \right]$$

$$i\omega \vec{v} = \frac{e}{m} \left[\vec{E} + \frac{B_0}{(-i\omega)} \left(\frac{e}{m} (\vec{u}_z \wedge \vec{E}) + (B_0 \vec{v}) \right) \right]$$

(17)

$$2) a) \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = +i k \cdot \vec{E} = i k E_z$$

$$\rho = k i \epsilon_0 E_z$$

$$\cdot \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = i k \cdot \vec{j} - i \omega \rho = 0.$$

$$\rho = \frac{k}{\omega} j_z = i \epsilon_0 \frac{\omega_p^2 E_z}{\omega^2} k$$

or $\omega \neq \omega_p \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow E_z = 0$
on a ne oncle $(\vec{I} \cdot \vec{E})$

$$b) \Delta \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\left(-k^2 \vec{E} + \mu_0 i \omega \vec{j} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \right) = \vec{0}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{-i \mu_0 \omega} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{E}$$

$$\vec{j} = \frac{+i}{\mu_0 \omega} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{E}$$

(4) (18)

$$3) a) \frac{1}{\epsilon_0 \omega} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \underline{E}_x = \frac{i \epsilon_0 \omega p^2}{\omega} \left[\frac{\underline{E}_x - \frac{i \omega_c \underline{E}_y}{\omega}}{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \right]$$

$$\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega p^2}{c^2} \right] \underline{E}_x = - \frac{i \omega_c \omega^2 \underline{E}_y}{\omega c^2}$$

de m

$$\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega p^2}{c^2} \right] \underline{E}_y = + i \frac{\omega_c \omega p^2}{\omega c^2} \underline{E}_x$$

$$\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega p^2}{c^2} \right]^2 = \left(\frac{\omega_c \omega p^2}{\omega c^2} \right)^2$$

$$3) b) \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega p^2}{c^2} \right] = \pm \left(\frac{\omega_c \omega p^2}{\omega c^2} \right)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega p^2}{\omega^2} \frac{\left(1 \pm \frac{\omega_c}{\omega} \right)}{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \right] \quad (19)$$

$$k_{\oplus}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{\left(1 \oplus \frac{\omega_c}{\omega}\right)} \right]$$

$$k_{\ominus}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{\left(1 \ominus \frac{\omega_c}{\omega}\right)} \right]$$

4) a) $k = k_+$

$$\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_+^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right] E_y^+ = \left(\frac{i \omega_c \omega_p^2}{\omega c^2} \right) E_x^+$$

$$- \left(\frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega c^2} \right) E_y^+ = i \left(\frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega c^2} \right) E_x^+$$

$$E_y^+ = -i E_x^+$$

Circulaire

$$E_y^- = +i E_x^-$$

(20)

$$\vec{E}^+ = E_0 e^{i(k^+ z - \omega t)} \begin{vmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{?}$$

$$\vec{E}^- = E_0 e^{i(k^- z - \omega t)} \begin{vmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \end{vmatrix}$$

b)

$$\vec{E} = 2E_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x$$

$$= E_0 e^{i(k^+ z - \omega t)} \begin{vmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{vmatrix} + E_0 e^{i(k^- z - \omega t)} \begin{vmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\begin{matrix} \downarrow \\ k^+ \end{matrix} \qquad \qquad \begin{matrix} \downarrow \\ k^- \end{matrix}$

$$\vec{E} = E_0 e^{-i\omega t} \begin{vmatrix} (e^{ik^+ z} + e^{ik^- z}) \\ -i(e^{ik^+ z} - e^{ik^- z}) \\ 0 \end{vmatrix}$$

(21)

$$\left(\frac{\bar{E}_y}{E_x} \right) = \tan \left(\frac{k^+ - k^-}{2} z \right) \Rightarrow \theta = \frac{k^+ - k^-}{2} z$$

$$\omega \gg \omega_p; \quad \omega \gg \omega_c \quad \omega_c < \omega_p$$

$$k_+ = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_c}{\omega} \right) \right]^{1/2}$$

$$k_+ = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_c}{\omega} \right) \right]$$

$$k_- = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_c}{\omega} \right) \right]$$

$$\theta = \left(\frac{k_+ - k_-}{2} \right) z = \frac{\omega}{2c} \left[\left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega_c}{\omega} \right) \right]$$

$$\theta = \frac{k_+ - k_-}{2} = \frac{\omega_c \omega_p^2}{2\omega^2 c} \approx \text{faible}$$

$$\langle U_{em} \rangle = \langle U_e \rangle + \langle U_m \rangle \Rightarrow \frac{1}{2} \text{Rél} \left[\frac{\underline{\epsilon} \underline{E} \underline{E}^*}{2} \right]$$

(22)