D^r Kchaou borhen

SERIE N°1
TRANSFERT THERMIQUE

Problème N°1 :

1- Bilan des flux à travers le mur extérieur du studio :

Un studio est situé dans immeuble. L'un des murs, qui comporte une fenêtre, sépare le studio de l'extérieur. Les autres parois ainsi que le plancher et le plafond séparent le studio des appartements voisins. Les conductivités thermiques de quelques matériaux sont précisées : verre : $\lambda_v = 1{,}2$ S.I ; béton : $\lambda_b = 0{,}9$ S.I ; air : $\lambda_a = 0{,}025$ S.I ; Isolant (laine-verre) : $\lambda_L = 0{,}04$ S.I. pour le coefficient thermique de surface h il convient de distinguer le côté intérieur de la paroi du studio ($h_1 = 10$ S.I) et le côté extérieur ($h_2 = 20$ S.I)

a- Calculer la résistance thermique Rv correspondant au transfert thermique à travers une simple vitre d'épaisseur $e_v = 2{,}4$ mm et de surface $S_v = 1\,m^2$, depuis l'air intérieur à la température supposée uniforme T_I jusqu'à l'extérieur à la température T_E.

b- Un double vitrage est constitué par deux vitres d'épaisseur e_v séparées par une couche d'air $e_A = 5$ mm. Pour l'air emprisonné entre les vitres, on néglige les phénomènes de convection pour ne considère qu'un transfert purement conductif. Calculer la résistance thermique R_{DV} correspondant au transfert thermique à travers le double vitrage de même surface S_v. Commentaire.

c- Le mur extérieur du studio comporte également une surface $S_B = 12{,}5\ m^2$ de béton doublée d'une couche d'isolant. L'épaisseur du béton $e_B = 9$cm et celle de l'isolant et $e_L = 4$cm. Calculer la résistance thermique R_M pour le transfert thermique à travers ce mur.

d- En déduire la résistance thermique R_E de la paroi extérieure constitué par le mur (béton plus isolant) de surface $S_B = 12{,}5 m^2$ et un double vitrage de surface $S'_v = 3{,}5\ m^2$. Exprimer en KWh l'énergie quotidienne transférée à travers une telle paroi lorsque $T_I = 20$ °C et $T_E = 0$°C. Commenter ce modèle.

2- Evolution de la température en l'absence de chauffage :

Les appartements voisins sont maintenus à une température $T_v = 18$°C. Les échanges de chaleur entre le studio et les appartements voisins sont caractérisés par une conductance thermique $G_v = 100\ W.K^{-1}$. La température extérieure est $T_E = 0$°C ; indépendante du temps. Les échanges de chaleur entre le studio et l'extérieur sont caractérisés par la résistance thermique R_E précédente. La capacité thermique du studio est $C = 610^5\ J.K^{-1}$. A l'instant t = 0s, le chauffage est coupé dans le studio, et on étudie l'évolution de sa température T_I qui était initialement égale à T_v en faisant l'approximation d'une évolution quasi-stationnaire pour laquelle les résistances thermiques définies précédemment restent valables.

a- Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $T_I(t)$ et donner le schéma équivalent électrique.

b- Quelle est la constante de temps τ de l'évolution de la température ? Quelle est la température finale T_{If}. Application numérique.

Problème N°2

1- régime transitoire :

Dans un cylindre plein en aluminium, de conductivité thermique λ, de chaleur massique c, de masse volumique ρ ; de rayon a, de hauteur H grande (H >> a) et de résistance électrique R, circule un courant électrique d'intensité I, de direction axiale, uniformément réparti dans ce cylindre.

a- Montrer que le flux thermique surfacique $j_{th}(M)$ en un point M du cylindre ne dépend que de la distance r de M à l'axe du cylindre.

b- Etablir, par un bilan thermique, l'équation différentielle à la quelle obéit la température absolue T(r,t) en M à l'instant t.

2- régime permanent:

Au bout d'un certain temps, un régime thermique permanent s'établit, établir la loi de réparation de la température T (r) en régime permanent dans ce cylindre. On notera T_0 la température sur l'axe du cylindre.

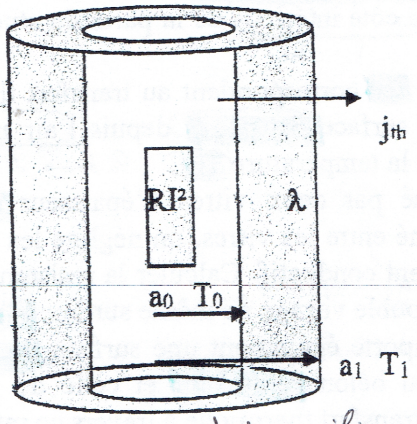
3- Mesure de la conductivité thermique λ, avec effet Joule :

a- *1^er mesure* : dans le dispositif étudié aux question 1 et 2, de résistance R = 2Ω et de hauteur H = 0,30 m, parcouru par le courant d'intensité I = 30A quand le régime permanent est établi, un

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

thermocouple mesure les température $T_0 = 21,5°C$ sur l'axe du cylindre et $T_1 = 19,5\ °C$ sur sa périphérie. En déduire la conductivité λ de l'aluminium.

b- 2ème mesure : on considère maintenant un cylindre en aluminium creux, de hauteur $H = 0,3m$, de rayons intérieur $a_0 = 3mm$ et extérieur $a_1 = 21mm$, plongé dans un fluide maintenu à la température uniforme $T_1 = 20°C$. une résistance chauffante, placée dans le creux du cylindre qui n'est pas en contact direct avec le fluide, libère une puissance calorifique constante $P = 1000$ Watts. Un thermocouple, implanté dans la zone creuse du cylindre, mesure une température finale qui se stabilise à $T_0 = 24,4°C$ au bout d'un temps assez long. *En déduire la conductivité λ de l'aluminium.*



Remarque: la température n'est pas continue si on met deux milieux différents en contact (sinon la conduction et toujours nulle). Mais le flux thermique est toujours continue (milieu insérie donc même flux).

Problème N°3 : Refroidissement d'une lame à face parallèle plongé dans un liquide

Une lame métallique d'épaisseur 2ℓ, de température T_i uniforme, de masse volumique ρ, de chaleur massique c et de conductivité thermique λ, limitée par deux plans considérés comme infinis d'abscisses $x = -\ell$ et $x = +\ell$, est plongée à l'instant $t = 0$ dans un liquide de température T_0 ($T_0 < T_i$). Maintenue constante. La lame se refroidit et on note $T(x,t)$ le champ de température à l'instant $t \geq 0$ au point M de coordonnées x, y, z du métal. On désignera $a = \lambda / \rho c$ la diffusivité thermique du métal.

Les échanges thermiques sur les interfaces métal- liquide sont de nature convective: la quantité de chaleur instantanée reçu par le liquide sur une surface S de l'interface métal- liquide pendant la durée dt est : $h\,[T(\pm\ell, t) - T_0].S.dt$; où h est le coefficient d'échange conducto-convectif.

1- Etablir l'équation aux dérivées partielles satisfaite par l'écart de température $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0$.

2- On recherche des solutions de l'équation établie à la question **1** sous la forme $T(x, t) = T_0 + f(x)\, g(t)$.

a- Montrer que la fonction du temps g(t) satisfaite à l'équation différentielle de la forme. $\frac{1}{g(t)}\frac{dg(t)}{dt} = Cste$; Où la constante de signe négatif sera posée $Cste = -a.k^2 / \ell^2$ avec k = constante réelle positive. Exprimer la fonction $g(t)$.

b- en déduire les expressions de $f(x)$ et du champ de température $T(x,t)$.

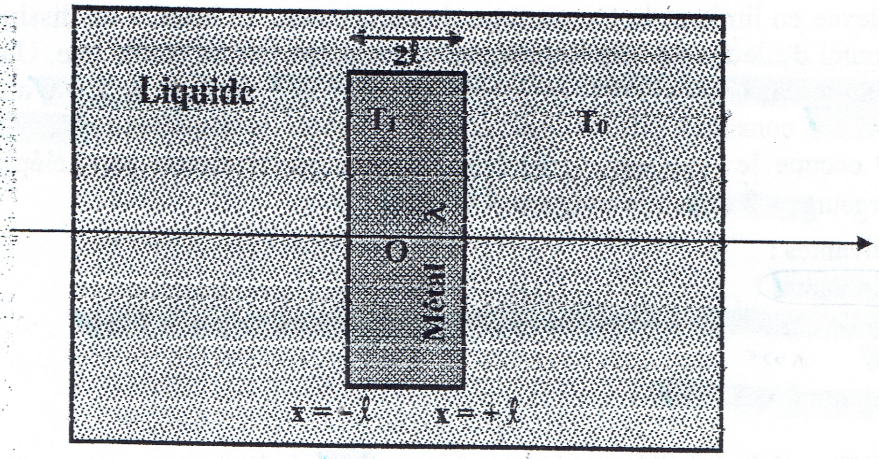
3- Etablir l'équation caractéristique qui lie les coefficients k, λ, h et la demi–épaisseur ℓ de la lame métallique. Comment peut-on obtenir graphiquement les valeurs possibles de la constante k ?

4- On donne: $\lambda = 400 W.m^{-1}K^{-1}$; $h = 1000 W.m^{-2}.K^{-1}$; $\rho = 8,9\ 10^3\ kg.m^{-3}$; $c = 395\ J.kg^{-1}.K^{-1}$; $2\ell = 20$ mm. On admet qu'on est dans les conditions où la solution T(x,t) se confond avec la solution particulière correspond à la valeur possible de k la plus faible.

a- Calculer la constante réelle positive **k** ;

b- Montrer alors que la température dans le métal est pratiquement uniforme et décroit exponentiellement avec une constante de temps τ qu'on calculera.

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.



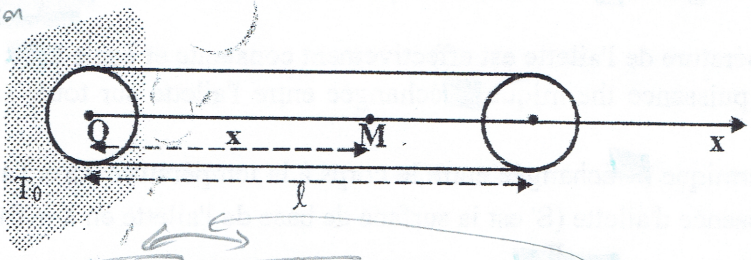
Problème N° 4 : Une ailette de refroidissement

Ques l'énergie thermique dans l'ailette au point d'abscisse x est divisée une partie qui se propage dans l'ailette et une autre évacuée dans l'air.

A- *Ailette cylindrique*

Une ailette de refroidissement, de forme cylindrique d'axe Ox, de rayon **a** et de longueur ℓ ($\ell >> a$) est fixée à une paroi de température T_0 et baigne dans l'air de température T_{air}. On considère la conductivité thermique λ de l'ailette, sa masse volumique ρ et sa chaleur massique c.

transfert par conduction



L'échange thermique entre l'ailette et l'air ambiant se fait par convection : la puissance cédée à l'air par l'unité de surface latérale de l'ailette de température $T_{ailellette}$ est : $h\,(T_{ailette} - T_{air})$, où h désigne le coefficient de transfert conducto-convectif.

1- Etablir, grâce à un bilan thermique, l'équation différentielle du second ordre à la quelle obéit le champ de température T(x) au point M d'abscisse x de l'ailette, en régime stationnaire. $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

2- a- En déduire la loi T(x) des températures dans l'ailette qu'on exprimera à l'aide des données T_0, T_{uir}, ℓ et des paramètres $A = \sqrt{\frac{2h}{a\lambda}}$ et $m = \frac{\lambda A - h}{\lambda A + h}$

b- Que devient la loi de réparation T(x) pour une ailette de longueur infinie ?

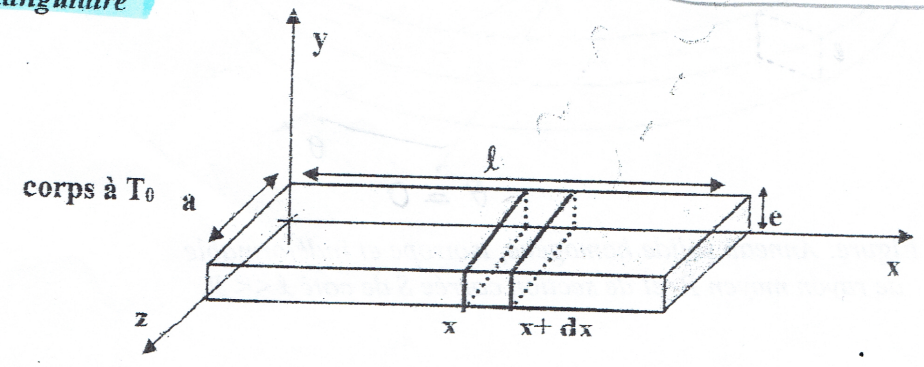
3- a- Calculer la puissance thermique P évacuée par l'ailette cylindrique.

b- Calculer en fonction de A, h, ℓ, λ et m, l'efficacité thermique et de l'ailette définie comme le rapport P/P_0, où P_0 est la puissance thermique évacuée par la paroi sans ailette.

c- Exprimer l'efficacité e_∞ d'une ailette de longueur infinie en fonction de a, h et λ.

4- Calculer, en fonction de T_0, T_{air}, λ, A et m, la température T_1 à l'extrémité libre de l'ailette.

B- *Ailette rectangulaire*



© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

La performance des puces électroniques utilisées dans les ordinateurs décroît avec leur température. Afin de dissiper une puissance élevée en limitant la température du composant, on installe un dissipateur de chaleur. Ce dissipateur est muni d'ailettes de refroidissement en parallèle. On en étudie une. Une ailette de refroidissement en aluminium de conductivité thermique 200 $W.m^{-1}.K^{-1}$ est fixée en $x = 0$ à un corps dont la température est $T_0 = 70°C$ constante. Elle baigne dans l'air ambiant de température $T_a = 20°C$. Le corps à la température T_0 occupe le demi-espace $x < 0$. L'ailette est de forme parallélépipédique, d'épaisseur $e = 2$ mm, de largeur $a = 2$ cm et de longueur $\ell = 3$ cm.

On émet les hypothèses suivantes :

- le régime étudié est stationnaire.
- la température d'un point de l'ailette n'est fonction que de x : elle sera donc notée T (x),
- a est très grand devant e. $a >> e$
- h est un coefficient constant : $h = 150$ *SI*.

a. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ de l'ailette peut se mettre sous la forme $\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{T(x) - Ta}{L^2} = 0$; où L est une longueur caractéristique à exprimer en fonction de λ, h et e.

b. Calculer la valeur numérique de L.

c. Ecrire les deux conditions aux limites suivantes vérifiées par $T(x)$; En déduire la loi $T(x)$

d. Montrer que compte tenu de la longueur de l'ailette ($\ell = 2$ cm), la température de l'ailette est approximativement constante et égale à T_0 : on montrera que la valeur absolue de $\frac{T(\ell) - T_0}{T_0}$ est voisine de 2%. On considère que la température de l'ailette est effectivement constante et égale à T_0.

e. Calculer l'expression de la puissance thermique $\mathcal{P}$ échangée entre l'ailette sur toute sa surface et l'air ambiant.

f. Déterminer la puissance thermique $\mathcal{P}'$ échangée entre le corps à la température T_0 et l'air ambiant par la surface d'aire $S' = a\,e$ en l'absence d'ailette (S' est la surface de base de l'ailette en $x = 0$).

g. En déduire l'expression de l'efficacité $\eta = \frac{P}{P'}$: Calculer sa valeur.

C- *Ailette torique :*

Un des dispositifs utilises par J. FOURIER était constitué d'un anneau solide indéformable en fer homogène et isotrope représenté figure 2, ayant la forme d'un tore d'axe Oz, de rayon R et de section carrée de coté ℓ, avec ℓ très inférieur à R. Plusieurs petites loges de dimensions négligeables, remplies de mercure et dans lesquelles plongent des thermomètres, sont percées en divers endroits de l'anneau.

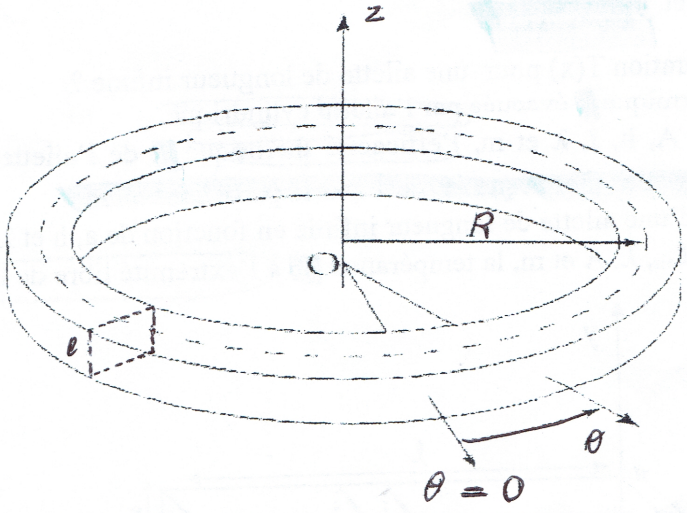


Figure: Anneau solide homogène, isotrope et indéformable de rayon moyen R et de section carrée S de coté $\ell << R$.

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Dans une section droite de l'anneau prise pour origine des angles ($\theta = 0$), on place un dispositif de chauffage constitué d'une plaque d'épaisseur négligeable et de même section S que l'anneau. On considère que la température est uniforme sur toute section droite du barreau et ne dépend que de l'angle θ et du temps t. Dans toute la suite du problème, et sauf mention explicite du contraire, on limitera l'angle θ à l'intervalle $[0 , 2\pi]$.

Pour les applications numériques, on prendra $R = 16{,}0$ cm et $\ell = 3{,}3$ cm.

Equation de la chaleur avec fuites thermiques :

L'anneau est placé dans l'air ambiant de température T_e, uniforme et indépendante du temps.

Selon la loi de NEWTON, le flux thermique conducto-convectif sortant par l'élément de surface latérale dS_{lat} de l'anneau et donc cédé à l'air ambiant, vaut $\delta\varphi = h\,(T - T_e)\,dS_{lat}$, où h est le coefficient de transfert conducto-convectif entre le métal et l'air, que l'on suppose constant, et T la température de la portion d'anneau considérée à l'instant t.

1- Quel est l'intérêt pratique de remplir les loges par du mercure ?

2- En effectuant un bilan énergétique pour la partie d'anneau située entre les sections repérées par les angles θ et $\theta + d\theta$, montrer que la température $T(\theta;t)$ en tout point de l'anneau est solution de l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\rho c}{\lambda}\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \dfrac{4h}{\lambda \ell}(T_e - T)$

On se place désormais en régime stationnaire.

3- Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la température $T(\theta)$ dans l'anneau et en donner la solution générale. On introduira la grandeur $a = \sqrt{\dfrac{\ell\lambda}{4h}}$ dont on précisera la dimension.

4- On suppose que le dispositif de chauffage impose une température constante $T = T_c$ dans la tranche infiniment mince de l'anneau repérée par l'angle $\theta = 0$. En exploitant les conditions aux limites en $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$, déterminer toutes les constantes d'intégration introduites dans la question précédente et donner l'expression de la température $T(\theta)$ au sein de l'anneau.

Problème N° 5:

L'espace compris entre deux armatures sphériques concentriques, de centre O et de rayons r_1 et r_2 ($r_2 > r_1$) est rempli d'un matériau homogène et isotrope de conductivité thermique λ supposé indépendante de la température.

L'armature de rayon r_1 est maintenue à la température T_1 et l'armature de rayon r_2 est maintenue à la température extérieure T_2 ($T_1 > T_2$). (Régime stationnaire, sans source interne)

1-Déterminer en fonction des données :

a- Le flux de chaleur Φ à travers une surface quelconque du matériau.

b-La résistance thermique de ce matériau. On justifiera cette définition par analogie avec celle de la résistance électrique.

2- Exprimer, à l'aide de r_1, r_2, T_1 et T_2 :

a- La loi de température $T(r)$ dans le matériau, à la distance r de O.

b- Le *vecteur densité de flux de chaleur* au voisinage immédiat de l'armature externe.

3- On entoure l'armature sphérique de rayon r_2, par une gaine métallique d'épaisseur constante e, de conductibilité thermique λ' constante. L'armature interne est maintenue à la température T_1 et la surface extérieure est maintenue à la température extérieure T_2.

a- Déterminer, en régime permanant, la température T_0 sur la surface sphérique commune aux matériaux de conductibilité thermique λ et λ'.

b- AN : $r_1 = 3$cm ; $r_2 = 5$ cm ; $e = 1$cm ; $\lambda = 400$ W.K^{-1}m^{-1}, $\lambda' = 80$ W.K^{-1}m^{-1}, $T_1 = 273$ K ; $T_2 = 300$ K.

Calculer la température T_0 *et la puissance thermique qui traverse*, ce système en régime permanent.

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Problème N° 6: Conduction thermique dans le sol

Le sol terrestre est localement assimilé à un demi-espace ($x > 0$) homogène de masse volumique $\rho = 3{,}1.10^3\ kg.m^{-3}$, de chaleur massique $c = 870\ J.kg^{-1}.K^{-1}$ et de conductivité thermique $\lambda = 1{,}8\ W.m^{-1}.K^{-1}$.

On note $T(x,t)$ la température dans le sol à la date t et à la profondeur x. On suppose que la température à la surface du sol ($x = 0$) évolue au cours de l'année suivant la loi :

$T(0,t) = T_0 + a\cos(\omega t)$ (a : constante et $T' = 2\pi/\omega = 1$ an).

et l'on admet que, à grande profondeur, la température du sol tend vers la moyenne annuelle : $T(\infty,t) = T_0$.

a) En posant $u(x,t) = \frac{T(x,t) - T_0}{a}$, chercher une solution de l'équation de la chaleur sous forme complexe : $\underline{u}(x,t) = \exp(\alpha x + \beta t)$ (régime forcé).

Exprimer les constantes complexes α et β en fonction de ρ, c, λ et ω.

b) On pose $\delta = 2\pi\sqrt{\frac{2k}{\rho c\omega}}$. Exprimer u(x,t) en fonction de $\frac{x}{\delta}$ et de $\frac{t}{T'}$. Commentaire.

A.N: Calculer λ (pour $T' = 1$ an).

c) La température de la surface du sol passe vers le 1er janvier par un minimum égal à -10° C et vers le 1er juillet par un maximum égal à + 30°C. Vers quelle date la température est-elle minimale à la profondeur x = 2m et quelle est cette valeur minimale ?

d) Pourquoi les variations de la température au sol qui correspondent à l'alternance des nuits et des jours sont-elles pratiquement sans influence sur la température du sol à la profondeur x = 2m? (pour cela, calculer $\delta = \frac{b}{2\pi}$ pour l'année et la journée et les termes $\exp(-\frac{x}{\delta})$ correspondants pour x = 2m).

e) Déterminer la profondeur **X** à partir de laquelle la variation annuelle de température est ≤ à 2°C.

Problème N° 7: Fusible

Un fusible est constitué par un fil conducteur cylindrique homogène, de section droite d'aire S, de longueur utile L, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c. Il possède une conductivité électrique γ et une conductivité thermique K. Il est traversé par un courant électrique continu d'intensité I. Ce fil est enfermé dans une capsule remplie d'une substance assurant une isolation thermique et électrique parfaite. Les températures en x = 0 et x = L sont imposées et égales à la température T_0 du milieu ambiant.

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes, données dans le système international d'unités (SI) : $K = 65$ SI ; $\gamma = 1,2 \times 10^6$ SI ; $c = 460$ SI ; $2,7 \times 10^3\ kg.m^{-3}$; $T_0 = 290$ K; $L = 2,5$ cm.

On rappelle que la résistance R d'un conducteur cylindrique de conductivité γ, de longueur h, de section S, parcouru par un courant I uniformément réparti et parallèle à son axe, est : $\mathbf{R = \frac{h}{\gamma S}}$. On se place en régime permanent.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la température T. Donner l'expression littérale de $T(x)$ et représenter graphiquement T en fonction de x.

2. Le matériau constituant le fil fond à $T_F = 390$ K. On veut fabriquer un fusible qui admet une intensité maximale $I_{max} = 16$ A.

Préciser l'endroit de la rupture en cas de dépassement de I_{max}. Déterminer l'expression littérale de l'aire S à prévoir. Faire l'application numérique.

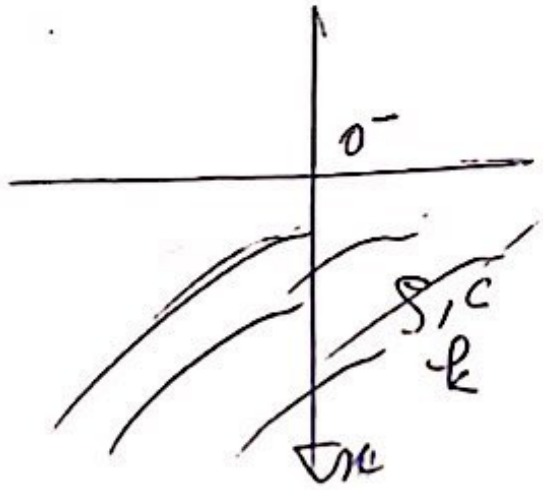
3. On fixe I = 10 A. Le fil a la section S trouvée à la question précédente. Évaluer littéralement puis numériquement la puissance thermique $P_{th}(0)$ transférée par conduction en $x = 0$. Préciser si cette puissance est reçue ou fournie par le fil. Même question pour la puissance thermique $P_{th}(L)$ transférée en x = L. Quelle relation a-t-on entre $P_{th}(0)$, $P_{th}(L)$ et la puissance électrique Pe fournie à l'ensemble du fil ? Commenter.

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Ex6 JPC2 : 2022

$\vec{j}_{th} = -k \vec{\text{grad}} T$

$j_{th} = -k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \vec{u}_x$



$\frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

$T(0,t) = T_0 + a\cos(\omega t)$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$u(x,t) = \frac{T(x,t) - T_0}{a}$

$\frac{\rho c}{k} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\underline{u} = e^{(\alpha x + \beta t)}$

$\boxed{\frac{\rho c}{k} \beta = \alpha^2} \Rightarrow$ or $\underline{u}(0,t) = e^{\beta t} = e^{i\omega t}$

$u(0,t) = \frac{T(0,t) - T_0}{a} = \cos\omega t$ → $e^{i\omega t}$

$\alpha^2 = i\omega \frac{\rho c}{k}$

$\alpha^2 = \frac{(1+i)^2}{\delta^2} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{(1+i)}{\delta}$; $\delta = \sqrt{\frac{2k}{\rho c \omega}}$

$T(x,t) = T_0 + a\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$

$\alpha = -\left(\frac{1}{\delta} + i\frac{1}{\delta}\right)$

$K = \frac{1}{\delta} - i\frac{1}{\delta} = K' - iK''$

17 mai

(1)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

b) $\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{2k}{\rho c \omega}} = 2\pi\delta$

$T(x,t) = T_0 + a\exp\left(-\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T'} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$

$\lambda = 16\ m \qquad \omega = \frac{2\pi}{T'_{année}}$

$T'_{année} = 365 \times 24 \times 3600$

c)

$T(2m,t) = T_0 + a\exp\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T'} - \frac{1}{8}\right)\right]$

$T(0, 1^{er}\ Janv) = -10°C$

$T(0, 1\ Juillet) = +30°C.$

$\cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T'} - \frac{1}{8}\right)\right) = +1 \; ; \; a = -20°C$

$T(0,t) = T_0 + a\cos\left(\frac{2\pi t}{T'}\right)$

$T(0,0) = T_0 + a = -10°C$

$T\left(0, \frac{T'}{2}\right) = T_0 - a = +30°C$

$a = -20°C, \; T_0 = 10°C$

1 Juillet

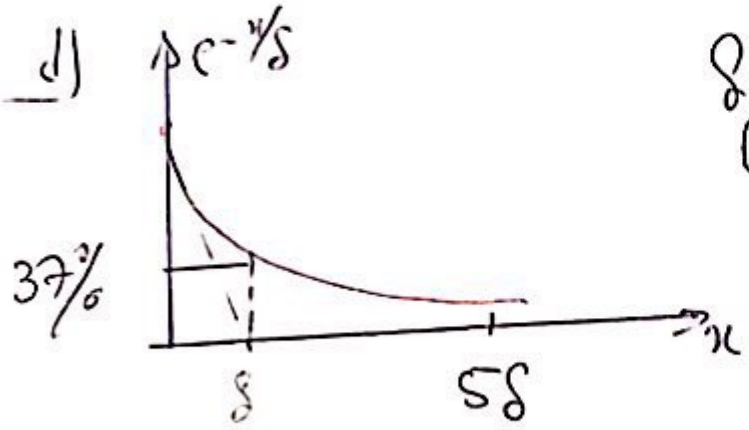
(2)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\frac{t}{T'} = \frac{1}{8} \Rightarrow t = \frac{T'}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5 \text{ mois}$$

t = 14 Février.

d)



$$\delta_{journée} = \sqrt{\frac{2k}{\omega_j}}$$

$$\omega_j = \frac{2\pi}{T_j}$$

δ_{jour} = 13 cm

$\delta_{année}$ = 2,6 m

$$T(x,t)_{Max} = T_0 + a \exp\left(-\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \times (-1)$$

$$T_{Min}(x,t) = T_0 + a \exp\left(-\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \times (1)$$

$$T_{Max} - T_{Min} = -2a \exp\left(-\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \leq 2°C$$

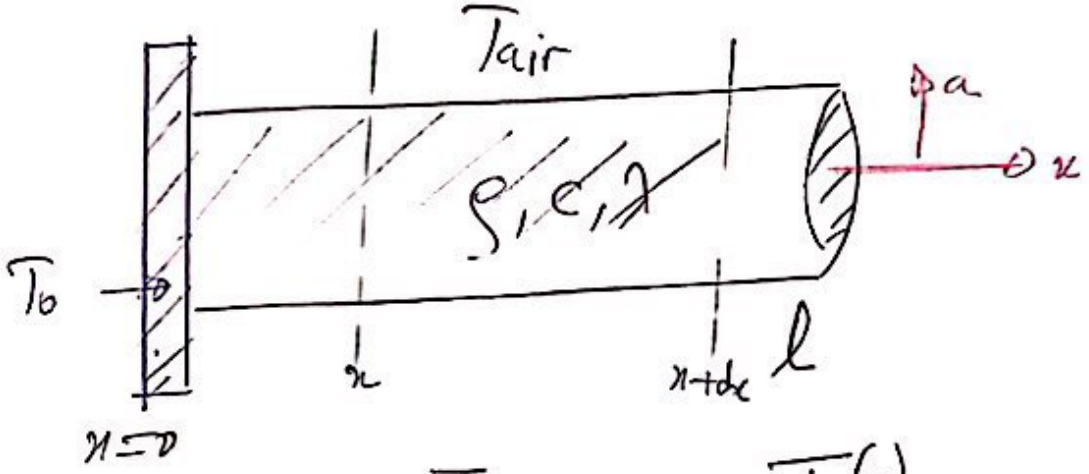
$x \geq$ 7,6 m.

Rq : $\underline{u} = e^{i(\omega t - \underline{k} x)}$

17 mai (3)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Pb 4 : Ailette de refroidissement



Stationnaire $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ $\quad T(x)$

$$j(x)\,\pi a^2 = j(x+dx)\,\pi a^2 + (2\pi a\,dx)\,h\,(T(x) - T_{air})$$

$$-\frac{dj(x)}{dx}\,\pi a^2 = (2\pi a)\,h\,(T(x) - T_{air})$$

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a}\,(T(x) - T_{air}) = 0$$

on pose : $\quad T(x) - T_{air} = \theta(x)$

$$\frac{2h}{\lambda a} = A^2$$

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - A^2\,\theta(x) = 0$$

$$r^2 - A^2 = 0$$

17 mars (4)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\theta(x) = \alpha e^{-Ax} + \beta e^{Ax}$$

$x=0$ $\quad \theta(0) = T_0 - T_{air} = \alpha + \beta$

$x=l$ $\quad h\left[(T(l) - T_{air})S\right] = -\lambda \left(\frac{dT(x)}{dx}\right)_l S$

$$h\left(\alpha e^{-Al} + \beta e^{Al}\right) = +\lambda A\left(\alpha e^{-Al} - \beta e^{Al}\right)$$

$$\alpha\left((h - \lambda A)e^{-Al}\right) + \beta\left((h + \lambda A)e^{Al}\right) = 0$$

$$\boxed{\alpha\, m\, e^{-Al} - \beta\, e^{Al} = 0}$$

$$\alpha + \beta = (T_0 - T_{air})$$

$$\theta(x) = \frac{(T_0 - T_{air})\left[e^{A(l-x)} + m e^{-A(l-x)}\right]}{e^{Al} + m e^{-Al}}$$

$$\lim_{l \to \infty} \theta(x) = (T_0 - T_{air})\, \frac{e^{Al} e^{-Ax}}{e^{Al}}$$

$$= (T_0 - T_{air})\, e^{-Ax}$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\Phi = -\lambda \left(\frac{dT(x)}{dx}\right)_0 \pi a^2$$

$$\Phi = +\lambda A \frac{\left(e^{Al} - me^{-Al}\right) \pi a^2 (T_0 - T_{air})}{\left(e^{Al} + me^{-Al}\right)}$$

$$\Phi_0 = h \pi a^2 (T_0 - T_{air})$$

$$e_t = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{\lambda A}{h} \left(\frac{e^{Al} - me^{-Al}}{e^{Al} + me^{-Al}}\right) > 1$$

$$l \to \infty \quad e_\infty = \frac{\lambda A}{h}$$

4) $T(x=l) = \theta(l) + T_{air}$

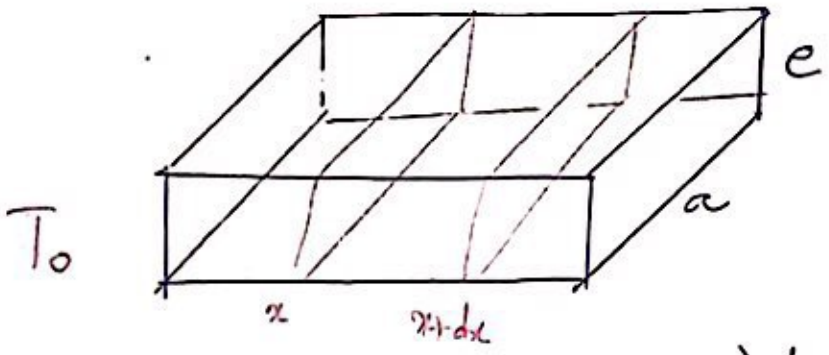
$\neq T_{air}$

Coefficient de Biot :

$$Bi = \frac{h d}{\lambda} \ll 1$$

17mar

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.



$$j(x)\,a\,e = j(x+dx)\,a\,e + \lambda(a+e)\,dx\,(T(x)-T_{air})$$

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda}\frac{(a+e)}{ae}(T(x)-T_{air})=0$$

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - A^2\,\theta(x)=0$$

si $a \gg e$ $\quad A^2 = \frac{2h}{\lambda e}$

$x=0$ $\quad T(0)=T_0$; $\quad x=l \quad T(l)=T_1$

$\theta(0)=\theta_0$ $\quad \theta(l)=\theta_1$

$$\theta(x) = \alpha\,ch(Ax) + \beta\,sh(Ax)$$

$$\alpha = \theta_0$$

$$\theta_0\,ch(Al) + \beta\,sh(Al) = \theta_1$$

Aïd mar

7

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\theta(x) = \theta_0 \operatorname{ch}(Ax) + \left(\frac{\theta_1 - \theta_0 \operatorname{ch}(Al)}{\operatorname{sh}(Al)}\right)\operatorname{sh}(Ax)$$

$$\theta(x) = \frac{\theta_0\left[\operatorname{ch}(Ax)\operatorname{sh}(Al) - \operatorname{ch}(Al)\operatorname{sh}(Ax)\right] + \theta_1 \operatorname{sh}(Ax)}{\operatorname{sh}(Al)}$$

$$\boxed{\theta(x) = \frac{\theta_0 \operatorname{sh} A(l-x) + \theta_1 \operatorname{sh}(Ax)}{\operatorname{sh}(Al)}}$$

Rq $\theta(x=0) = \theta_0$

En $x = l$: adiabatique isolé.

$$\Rightarrow \Phi_{th} = 0 \Rightarrow \left.\frac{d\theta(x)}{dx}\right|_{x=l} = 0$$

$$-\lambda \left.\frac{d\theta(x)}{dx}\right|_{l} S = 0$$

$$\theta(x) = \alpha \operatorname{ch}(Ax) + \beta \operatorname{sh}(Ax)$$

$$\theta'(x) = \alpha A \operatorname{sh}(Ax) + \beta A \operatorname{ch}(Ax)$$

$$\theta'(l) = \alpha A \operatorname{sh}(Al) + \beta A \operatorname{ch}(Al) = 0$$

Ø R ∃∀

Ahmed (S)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Cj : Ailette Torique MP2 : 2023

$\theta = 0, \quad \theta = 2\pi \Rightarrow T(0) = T(2\pi) = T_c$

- $\frac{dU}{dt} = \rho c \left(\ell^2 R d\theta\right) \frac{\partial T(\theta,t)}{\partial t}$

- $\left(\frac{\delta Q}{dt}\right)_{conduct} = \left[j(\theta,t) - j(\theta+d\theta,t)\right] \ell^2$



$\left(\frac{\delta Q_{th}}{dt}\right)_{convect} = 4\left(\ell R d\theta\right) h \left[T(\theta,t) - T_{air}\right]$



$\rho c \frac{\partial T(\theta,t)}{\partial t} = \frac{1}{R}\left[-\frac{\partial j(\theta,t)}{\partial \theta}\right] - \frac{4h}{\ell}\left(T(\theta,t) - T_e\right)$

$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T(\theta,t)}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{\lambda \ell}\left(T(\theta,t) - T_e\right)$

$\vec{j} = -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial T(\theta,t)}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$

17 mm

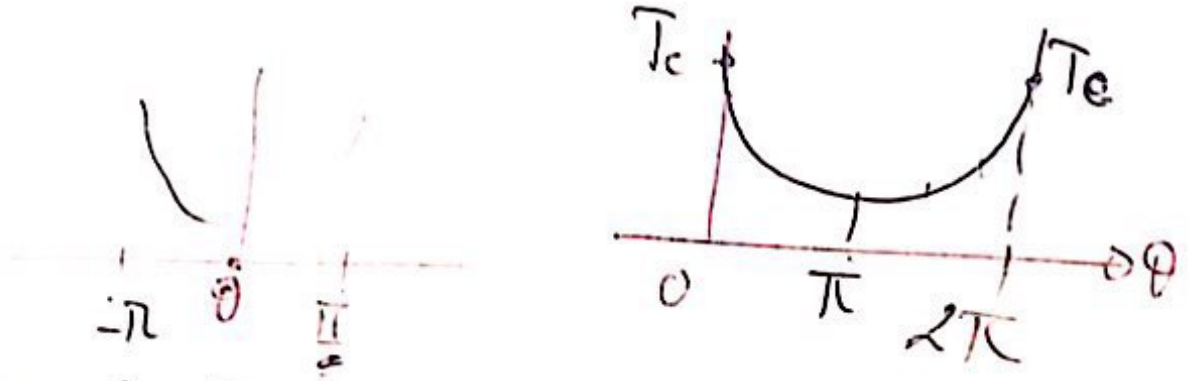
9

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\vec{J} = -\lambda \, \vec{\text{grad}} \, T \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{cases} ; \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

$$\frac{d^2 T(\theta)}{d\theta^2} - \frac{R^2}{a^2}\left(T(\theta) - T_e\right) = 0$$

$$T(\theta) - T_e = \alpha \, ch\left(\frac{R}{a}\theta\right) + \beta \, sh\left(\frac{R}{a}\theta\right)$$

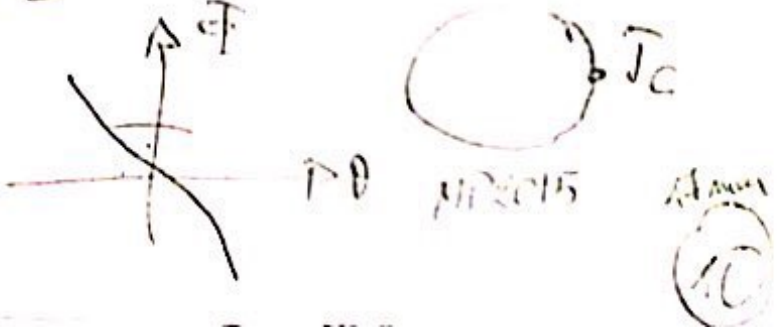


$$T(\theta = 0) = T_c = T_e + \alpha$$

$$T(\theta = 2\pi) = T_c = T_e + \alpha \, ch\left(\frac{R\,2\pi}{a}\right) + \beta \, sh\left(\frac{R\,2\pi}{a}\right)$$

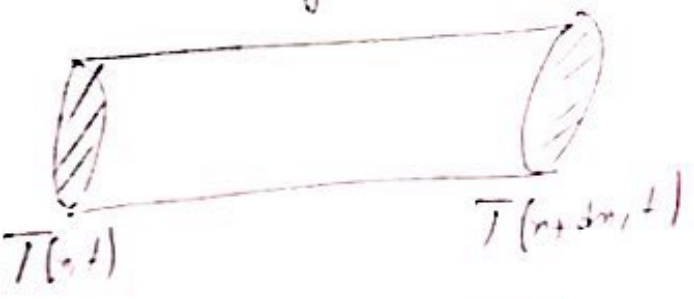
$$sh\,2x = 2\,sh\,x\,ch\,x$$

$$ch(a+b) = \text{---}$$



Bilan entropique (MP2 2004 2015)

$$dS = \delta S_{échange} + \delta S_{créé}$$



$$\delta S_{éch} = \frac{\delta Q_x}{T(x,t)} - \frac{\delta Q_{x+dx}}{T(x+dx,t)}$$

$$= \left\{ \frac{j(x,t)}{T(x,t)} S - \frac{j(x+dx,t) S}{T(x+dx,t)} \right\} dt$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{j(x,t)}{T(x,t)}\right] S\, dx\, dt$$

$$= -\left[j(x,t) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{T}\frac{\partial j(x,t)}{\partial x} \right] S\, dx\, dt$$

$$= -\left[\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(-\frac{1}{T^2}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{1}{T}\left(-\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) \right] S\, dx\, dt$$

* $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{T}\right)\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x}$

$$\delta S_{éch} = \left[-\frac{\lambda}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \frac{\lambda}{T}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) \right] (S\, dx)\, dt$$

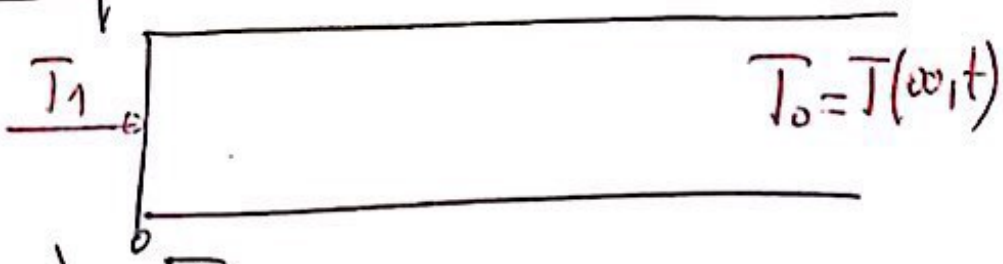
© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$dS = \frac{dU}{T} = \frac{\rho c}{T}(\Sigma dx)\frac{\partial T}{\partial t}dt$$

$$\frac{\delta S_{créé}}{\Sigma dt dx} = \left[\frac{\lambda}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2\right] = \dot{s}_{créé} > 0$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Choc thermique



$T(x=0, t>0) = T_1$

Dém : $T(x,t) = \cancel{A} \int_0^u e^{-v^2} dv + B$

$u = \frac{x}{2\sqrt{at}}$, $a = \frac{\lambda}{\rho c}$

$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. $T(x,t) = f(u)$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial f(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df(u)}{du}\left(-\frac{u}{2t}\right)$$

17 Janvier

12

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{at}} \frac{df(u)}{du}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{4at} \frac{d^2 f(u)}{du^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\left(\frac{-u}{2t}\right)\frac{df(u)}{du} = \frac{1}{4at}\frac{d^2 f(u)}{du^2}$$

$$-2u f'(u) = f''(u)$$

$$g(u) = f'(u) \Rightarrow g'(u) = -2u\, g(u)$$

$$\frac{g'(u)}{g(u)} = -2u \Rightarrow g(u) = \int A e^{-v^2} dv$$

$$f(u) = \int_0^u A e^{-v^2} dv + B \quad ; \text{fonction Erf.}$$

$u = \frac{x}{\sqrt{2at}}$; $x=0 \quad u=0$

$$f(0) = B = T_1$$

$$f(\infty) = \int_0^\infty A e^{-v^2} dv + T_1 = A\frac{\sqrt{\pi}}{2} + T_1 = T_0$$

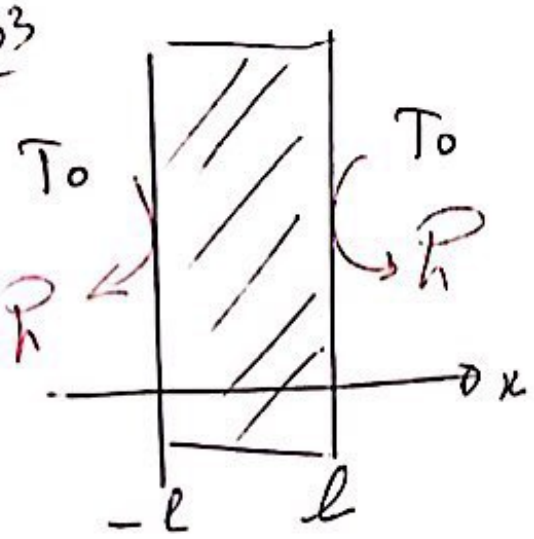
$$A = (T_0 - T_1)\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

1. Exercice

13

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Pb3



$$\delta Q_{h\,conv} = h\, ds\, dt\, (T(l) - T_0)$$

$$\frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T(x,t) - T_0 = \theta(x,t) \Rightarrow \frac{1}{a}\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$a = \frac{\lambda}{\rho c}$ = diffusivité thermique

2) $\theta(x,t) = f(x)\, g(t)$

$$\frac{1}{a}\frac{dg(t)}{dt} f(x) = g(t)\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

$$\frac{1}{g(t)}\frac{dg(t)}{dt} = \frac{a}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = ds = -\frac{ak^2}{l^2}$$

$$g(t) = g_0 \exp\left(-\frac{ak^2}{l^2}t\right)$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{k^2}{l^2} f(x) = 0$$

$$r^2 + \frac{k^2}{l^2} = 0$$

17 mai (11)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$f(x) = f_0 \cos\left(\frac{kx}{l}\right) + f_1 \sin\left(\frac{kx}{l}\right)$$

or $\theta(x,t) = \theta(-x,t) \Rightarrow f_1 = 0$.

$$\theta(x,t) = f_0 g_0 \cos\left(\frac{kx}{l}\right) e^{-t/\tau}$$

$$\theta(0,0) = T(0,0) - T_0 = T_1 - T_0$$

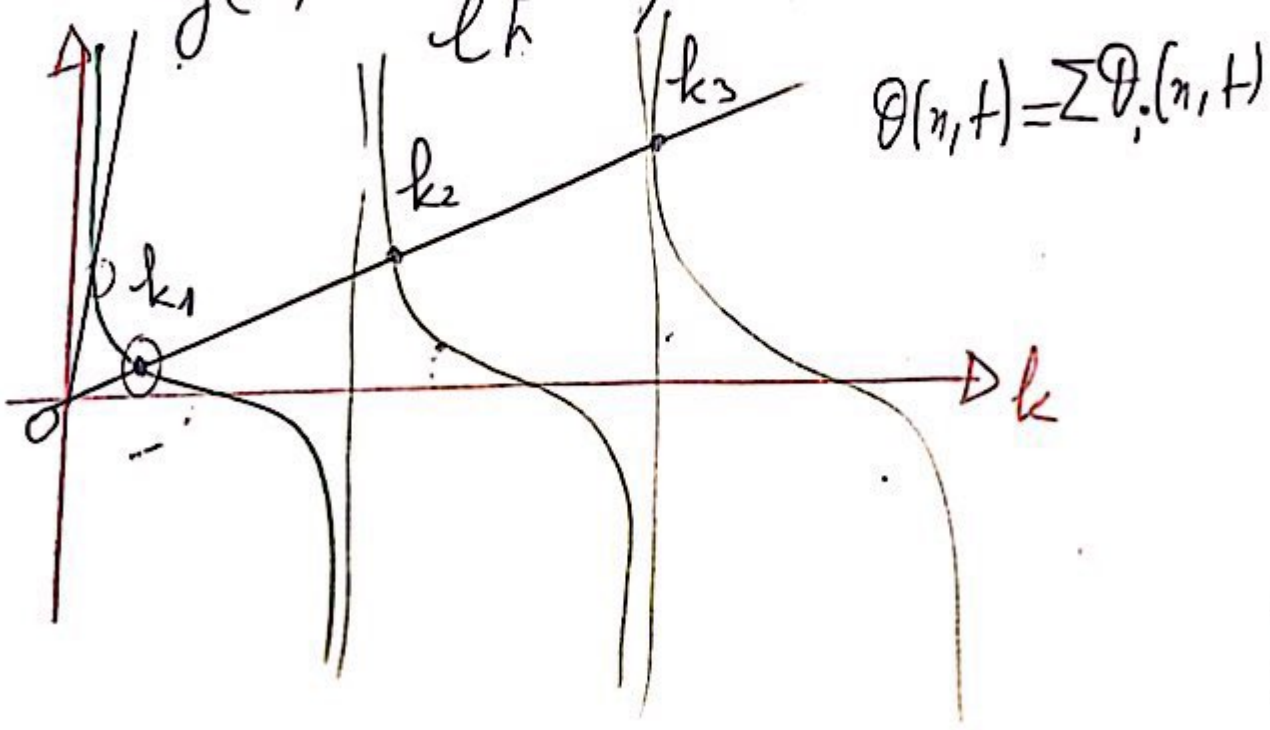
$$\theta(x,t) = (T_1 - T_0) \cos\left(\frac{kx}{l}\right) e^{-t/\tau}$$

3) $\varphi_{th}(x = l^-) = \varphi_{th}(l^+)$ convection

and

$$\varphi - \lambda \left.\frac{d\theta(x)}{dx}\right|_l = h \cdot \theta(x = l)$$

$$\cot g(k) = \frac{\lambda}{lh}(k)$$



$$\theta(x,t) = \sum \theta_i(x,t)$$

15

$$\theta_1(x,t) = (T_1 - T_0)\cos\left(\frac{k_1 x}{l}\right) e^{-t/\tau_1}$$

$$\tau_1 = \frac{l^2}{a \cdot k_1^2}$$

4) $\frac{\lambda}{l^2 T_1} = 40$ donc $k_1 = 40 k_1 \simeq \frac{1}{k_1}$

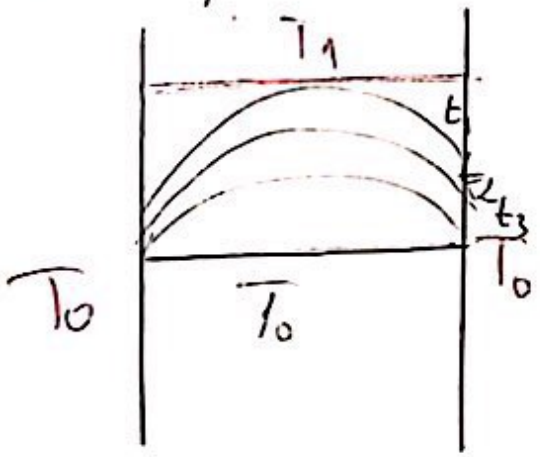
$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{40}}$$

$$\theta_1(x,t) = (T_1 - T_0)\, e^{-t/\tau_1}$$

$$-l \leq x \leq l$$

$$\cos(k_1) \leq \cos\left(\frac{k_1 x}{l}\right) \leq 1$$

$$0{,}98 \leq \cos\left(\frac{k_1 x}{l}\right) \leq 1$$



17 mai

(16)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Cours

$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad} T$ ⟷ $\vec{j}_e = -\gamma \overrightarrow{grad} V$

$\Phi_{th} = \iint \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS}$ ⟷ $I = \iint \vec{j}_e \cdot \vec{dS}$

λ ⟷ γ

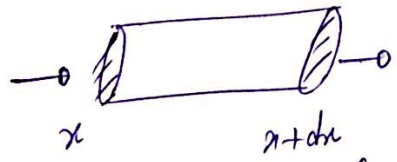
T ⟷ V

$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}$ ⟷ $R_e = \frac{V_1 - V_2}{I}$ (Ω)

$(K/watt)$

Bilan : $\frac{dU}{dt} = \frac{\delta Q_{th}}{dt} + \frac{\delta W}{dt} + dP_{pmd}$

système indéformable $\delta W = 0 = -P_{ext} dV$



$dV = Sdx$

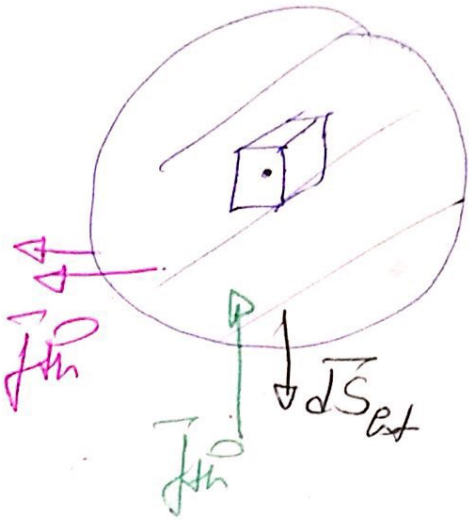
- $dU = dm\, c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dt = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} S\, dx\, dt$
- $dP_{pmd} = p_v\, S dx$
- $\frac{\delta Q_{th}}{dt} = \left[j(x,t) S - j(x+dx,t) S \right] = -\frac{\partial j}{\partial x} S dx$

$= +\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (S dx)$

$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{p_v}{\lambda}$ (1) Fourier

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\frac{dU}{dt} = -\iint \vec{j}\,\vec{dS}_{ext} + \iiint p_v\, d\tau$$



$$\iiint \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\, d\tau = \frac{dU}{dt}$$

$$= -\iiint \operatorname{div} \vec{j}\, d\tau + \iiint p_v\, d\tau$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}_{th} + p_v$$

$$\boxed{\frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{p_v}{\lambda}}$$

$a = D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$ m^2/s

$$\frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{p_v}{\lambda}$$

permanent = stationnaire $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{p_v}{\lambda} = 0 \qquad \text{Poisson}$$

Enoutre $p_v = 0 \Rightarrow \frac{d^2T(x)}{dx^2} = 0$

$R_{th} = \frac{1}{\lambda}\frac{L}{S}$; $\boxed{R_{th}^{conv} = \frac{1}{hS}}$

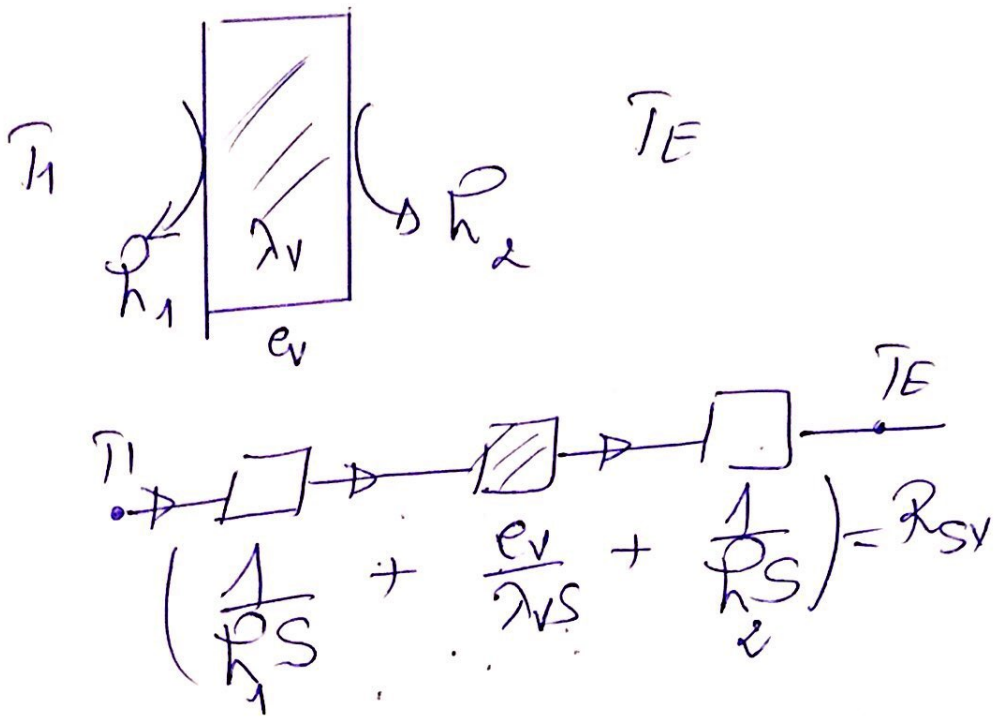
10mars

(2)

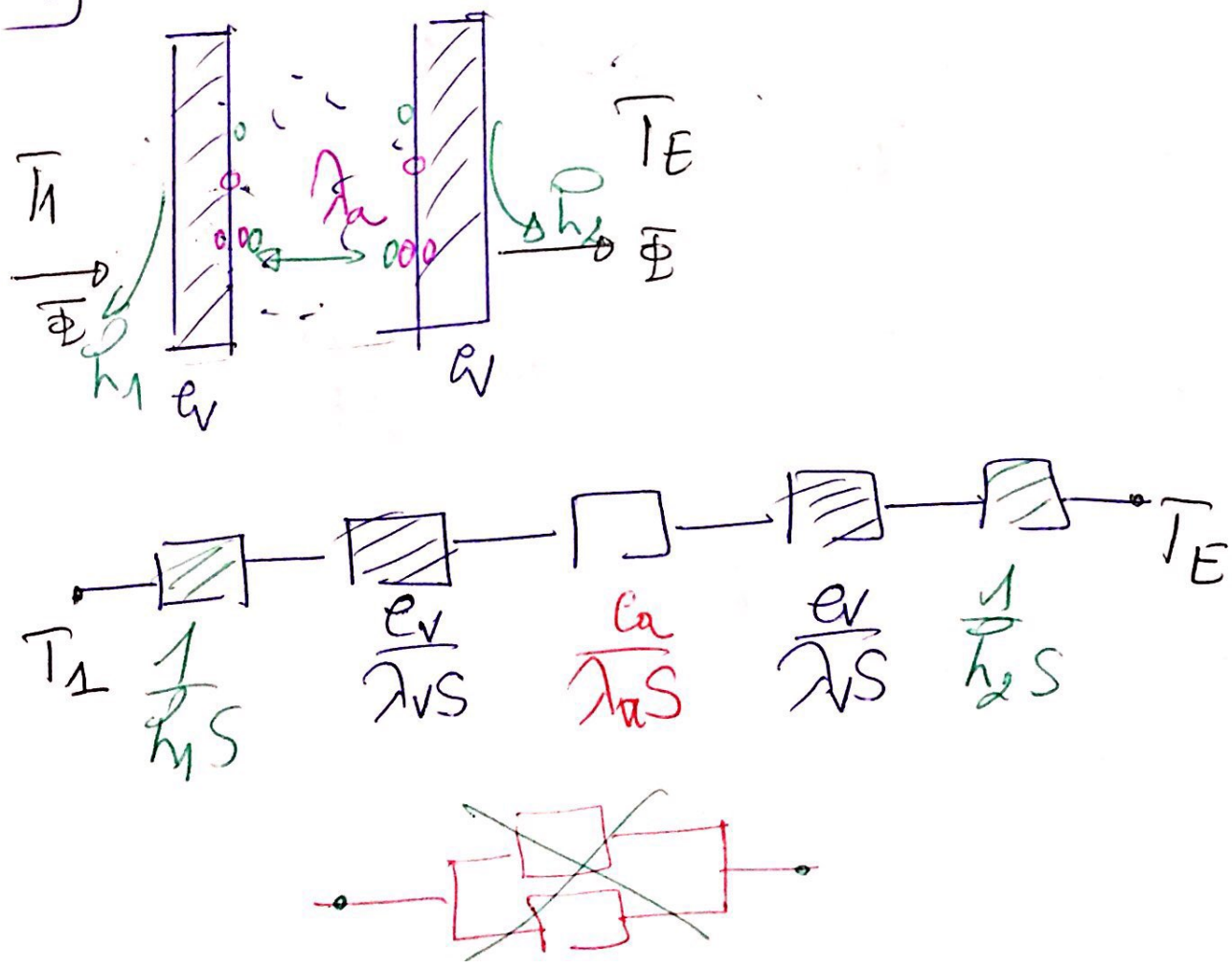
© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Serie N°1

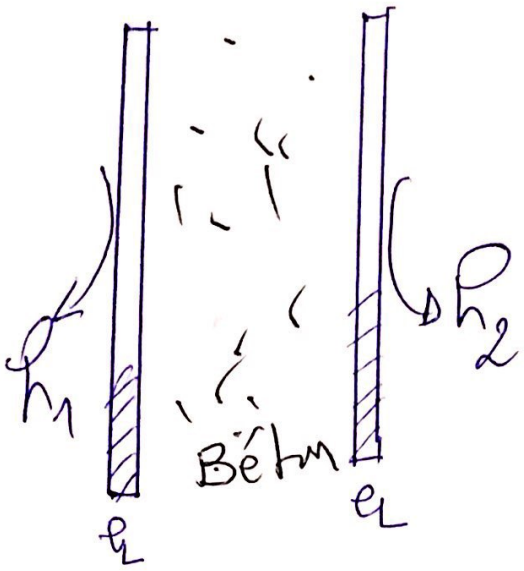
1) a)

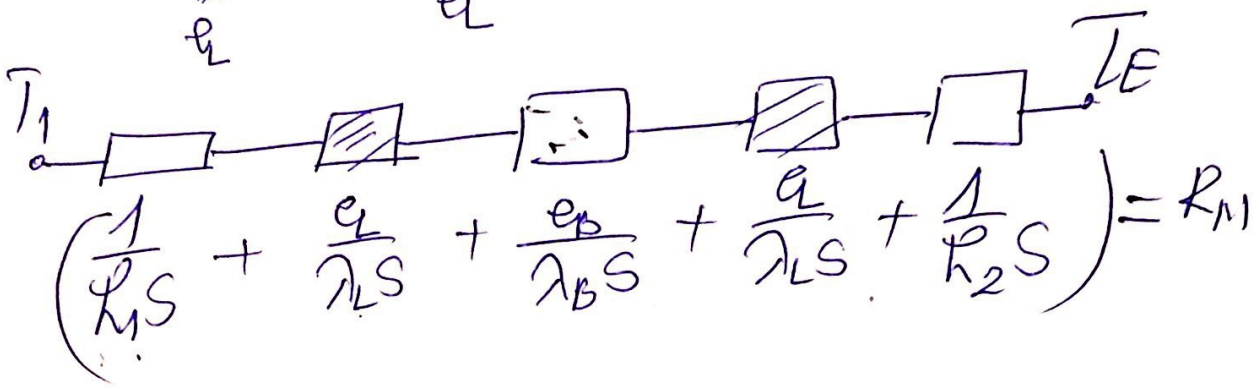


b)

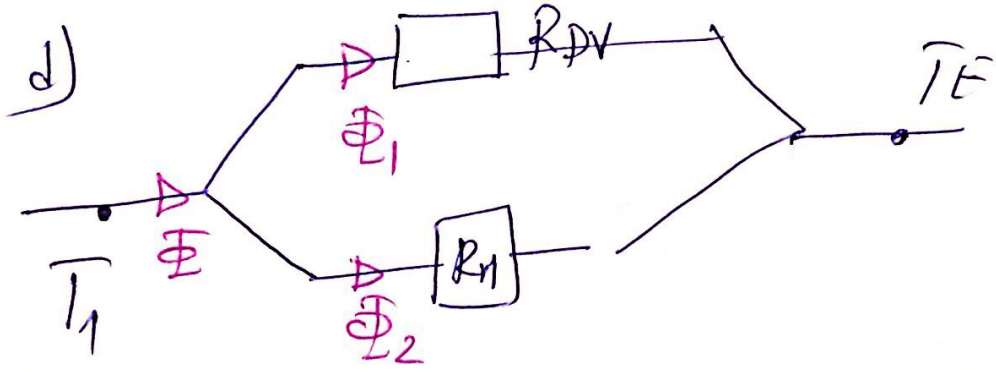


© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.





d)



$$R_E = \frac{R_H R_{DV}}{R_H + R_{DV}} \quad ; \quad P_{th} = \frac{Q_{th}}{\Delta t}$$

$$Q_{th} = \frac{(T_1 - T_E)}{R_E} \Delta t$$

→ 24 heures gaussienne

$$P_{th} = \frac{\delta Q}{dt} = \Phi = \iint \vec{J}_{th} \, d\vec{S}$$

10 mars

4

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

2) Evolution de la température

$$T_1(t=0) = T_V$$

$$\frac{dU}{dt} = \Phi_{entrant} - \Phi_{sortant} + 0$$

$$C\frac{dT_1}{dt} = \Phi_{voisins} - \Phi_{extérieur}$$

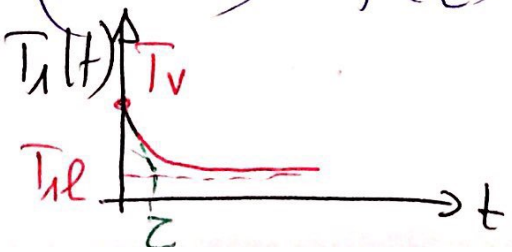
$$C\frac{dT_1}{dt} = G_V(T_V - T_1) - \frac{(T_1 - T_E)}{R_E}$$

$$\frac{dT_1(t)}{dt} + \frac{T_1(t)}{\tau} = \frac{T_{1\ell}}{\tau}$$

$$C\frac{dT_1}{dt} + \left(G_V + \frac{1}{R_E}\right)T_1 = \left(\frac{T_E}{R_E} + G_V T_V\right)$$

$$T_1(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_{limite}$$

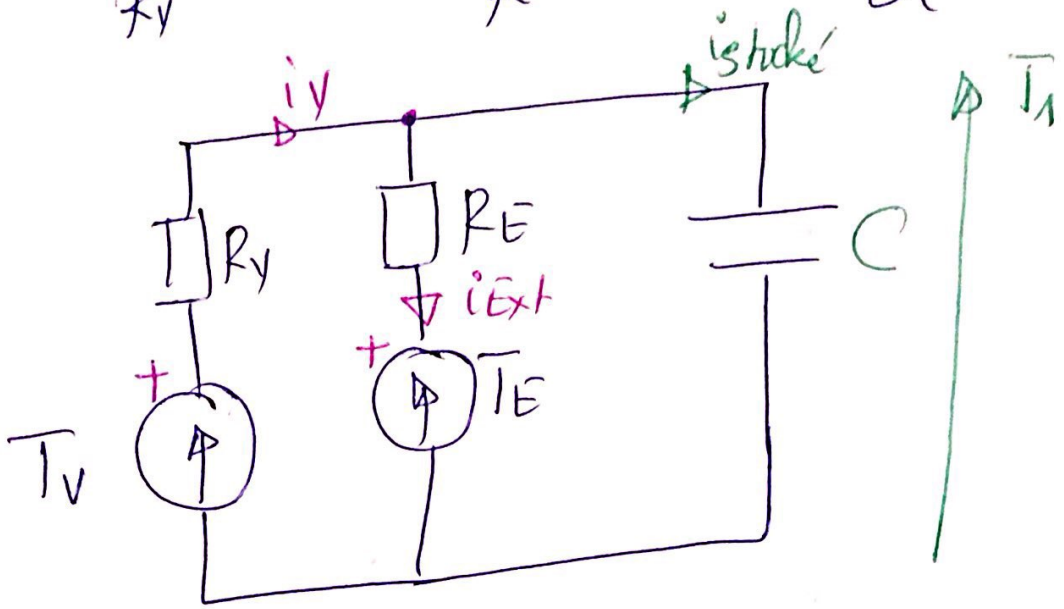
$$T_1(t) = (T_V - T_{1\ell})\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_{1lim.}$$



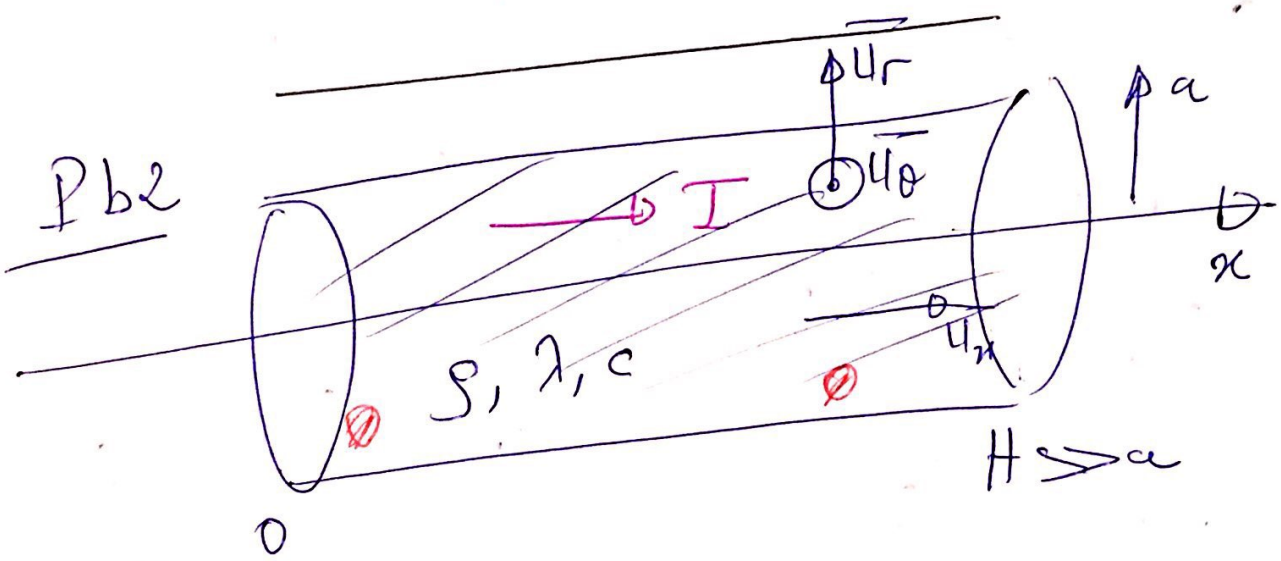
Devoir 5

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\frac{T_V - T_E}{R_V} = \frac{T_1 - T_E}{R} + C\frac{dT_1}{dt}$$



Pb2



$C = mc$ ↳ $J K^{-1} \cdot kg^{-1}$

$J.K^{-1}$

$(M \vec{U_r} \vec{U_x})$ PSP Jth ∈ vrai vecteur

$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{PM}}{(PM)^3}$: pseudo_vecteur

10 mars

6

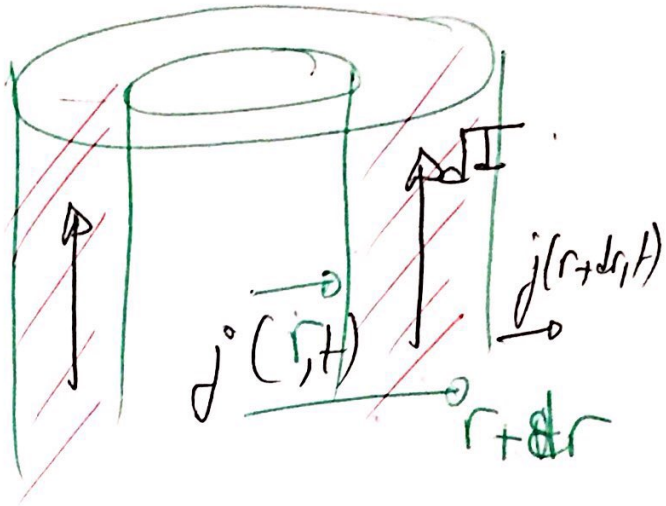
© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$(M\vec{u}_r\vec{u}_\theta)$ PSP $\Rightarrow \vec{j}_{th}(M,t)\in$

$$\vec{j}_{th} = j(r,t)\,\vec{u}_r$$

b) Bilan :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\delta Q_{reçu}}{dt} + dP_{Joule}$$



$$dP_{Joule} = (\vec{j}_e \cdot \vec{E})\, d^3\tau$$

$$p_{Joule} = \frac{dP}{d^3\tau} = \gamma \vec{E}\,\vec{E} = \gamma E^2 = \frac{j_e^2}{\gamma}$$

ou $I = \iint \vec{j}_e \cdot \vec{dS} = j_e\, \pi a^2$

$$p_J = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{I}{\pi a^2}\right)^2$$

$$p_{Joule} = \frac{R I^2}{(\pi a^2 H)} \quad \text{en } W/m^3$$

$$* \frac{\delta Q_{th}}{dt} = 2\pi H\left[r\,j(r,t) - (r+dr)\,j(r+dr,t)\right]$$

$$= 2\pi H\left[-\frac{\partial}{\partial r}(r\,j(r,t))\,dr\right]$$

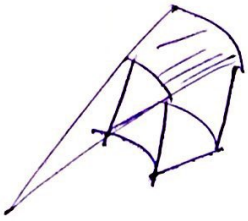
(7)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\frac{dU}{dt} = \rho c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} dV$$

$$dm = \rho dV \quad ; \quad \boxed{dU = dm\, c \frac{\partial T}{\partial t} dt}$$

$$d^3V = r\, dr\, d\theta\, dz \qquad dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{H} dz\; r\, dr$$



$$\boxed{dV = 2\pi H r\, dr}$$

$$\frac{dU}{dt} = \rho c\, 2\pi H r \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) dr$$

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{P_v}{\lambda}$$

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T(r,t) + \frac{P_v}{\lambda}$$

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{R I^2}{\pi a^2 H} \frac{1}{\lambda}$$

2) stationnaire $\quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dT(r)}{dr}\right) + \frac{P_v}{\lambda} = 0$$

10 mars

8

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{r\,p_v}{\lambda}$$

$$r\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{r^2}{2}\frac{p_v}{\lambda} + C_1$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{r}{2}\frac{p_v}{\lambda} + \frac{C_1}{r}$$

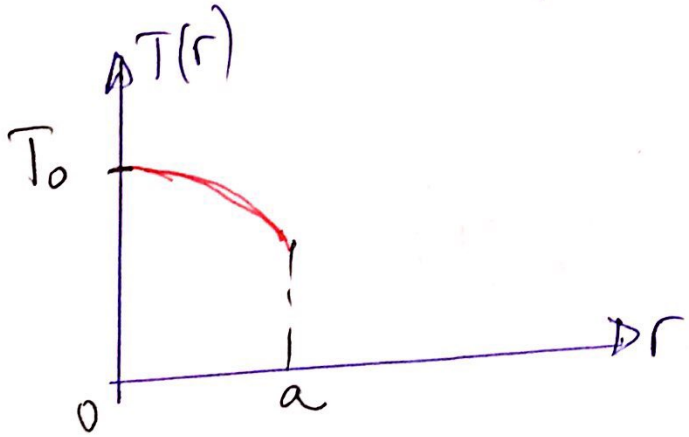
$$T(r) = -\frac{r^2 p_v}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2$$

$\underline{C_1 = 0}$; $r \in [0, a]$

$\underline{\underline{r = 0}}$ $\quad T(0) = T_0 = C_2$

$$T(r) = T_0 - \frac{RI^2}{4\pi a^2 H\lambda} r^2$$

$\cup\, -x^2$, $\cap\, -x^2$



3) a)

$$T_1 = T_0 - \frac{RI^2}{4\pi H\lambda} \quad ; \quad \lambda = \frac{RI^2}{4\pi H(T_0 - T_1)}$$

10 mars

9

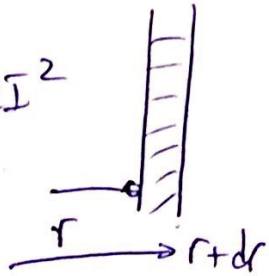
© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$\lambda = 238 \ watt . K^{-1} m^{-1}$

3)b) $\Phi = j(r) S = -\lambda \frac{dT(r)}{dr} 2\pi r H = cte$

$r \in [a_{int} ; a_{ext}]$; $p_v = 0$

$[]RI^2$



temps assez long.

$\Phi = cte = P = 10^3 watts$

$$-\lambda \frac{dT(r)}{dr} = \frac{P}{2\pi H r}$$

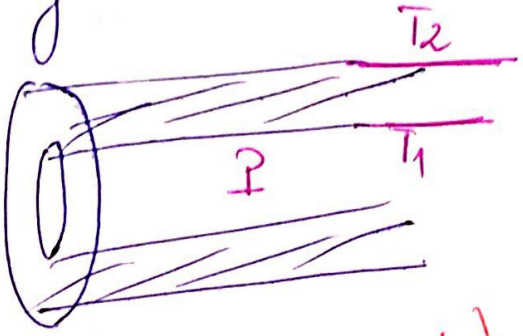
$$\int_{T_{int}}^{T_{ext}} dT(r) = \frac{-P}{2\pi H \lambda} \int_{a_{int}}^{a_{ext}} \frac{dr}{r}$$

$$T_{int} - T_{ext} = \frac{P}{2\pi H \lambda} \ln\left(\frac{a_{ext}}{a_{int}}\right) = P R_{th}$$

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi H \lambda} \ln\left(\frac{a_{ext}}{a_{int}}\right)$$

$$\lambda = \frac{P}{2\pi H (T_0 - T_1)} \ln\left(\frac{a_1}{a_0}\right)$$

Eq: cylindre creux : $r \in [a_{int} ; a_{ext}]$



$p_v = 0$ et $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT(r)}{dr}\right) = 0$$

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad \leftarrow \left(T_{int} - C_1 \ln a_{int}\right)$$

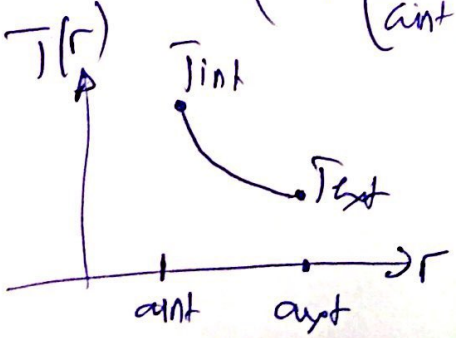
$$T(r = a_{int}) = C_1 \ln a_{int} + C_2 = T_{int}$$

$$T(r = a_{ext}) = C_1 \ln a_{ext} + C_2 = T_{ext}$$

$$T(r) = C_1 \ln\left(\frac{r}{a_{int}}\right) + T_{int}$$

$$T_{ext} = C_1 \ln\left(\frac{a_{ext}}{a_{int}}\right) + T_{int}$$

$$T(r) = \left(\frac{T_{ext} - T_{int}}{\ln\left(\frac{a_{ext}}{a_{int}}\right)}\right) \ln\left(\frac{r}{a_{int}}\right) + T_{int}$$



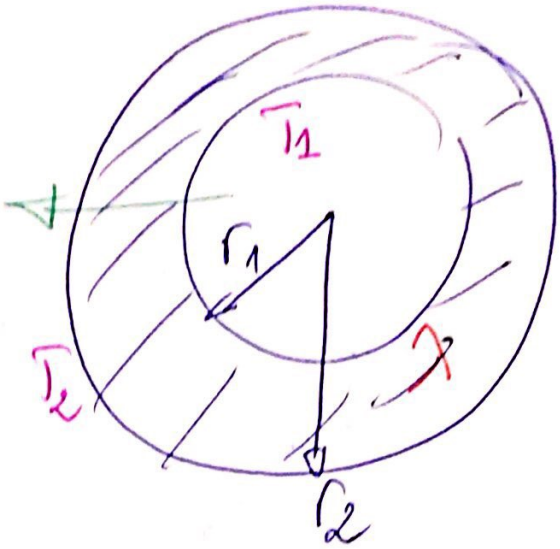
10 mars

11

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Pb5

$T_1 > T_2$



$\Phi = ds \cdot \begin{cases} p_v = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \end{cases}$

$j(r) \cdot 4\pi r^2 = \Phi$

$-\lambda \frac{dT(r)}{dr} \cdot 4\pi r^2 = \Phi$

$$\int_1^2 dT(r) = \int_1^2 \frac{\Phi}{4\pi\lambda r^2} dr$$

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\Phi = \frac{4\pi\lambda r_1 r_2}{(r_2 - r_1)}(T_1 - T_2)$$

b) $R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$

10 mars

12

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

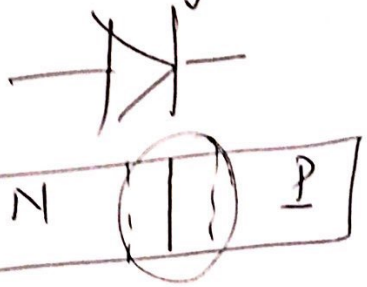
2) $\int_{T_1}^{T(r)} dT(r) = -\frac{\Phi}{4\pi\lambda} \int_{r_1}^{r} \frac{dr'}{r'^2}$; $\int -\frac{dx}{x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)$

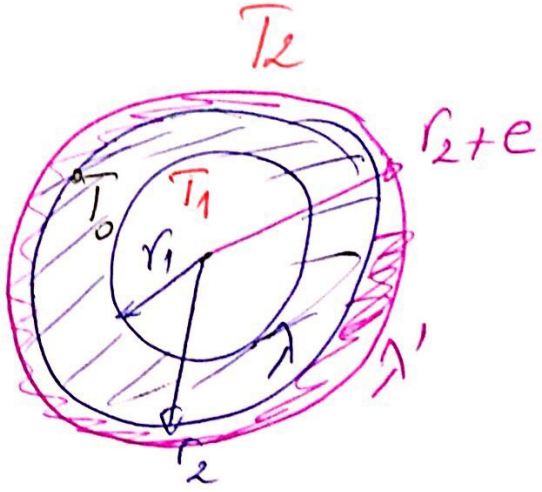
$$T(r) - T_1 = +\frac{\Phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

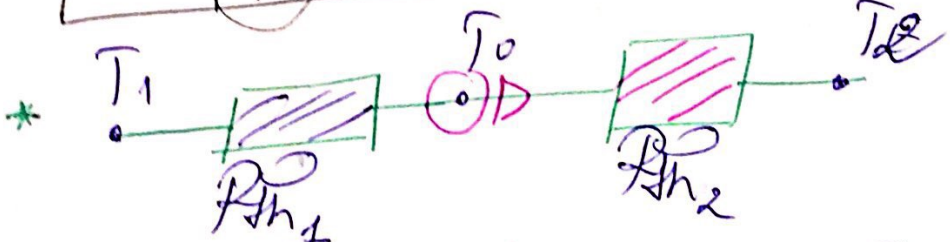
$$T(r) = T_1 + \frac{r_1 r_2}{(r_2 - r_1)}(T_1 - T_2)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

b) $j(r) = -\lambda \frac{dT(r)}{dr}\Big|_{r=r_2}$

3) Diode à jonction







$$R_{th_1} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$

$$R_{th_2} = \frac{1}{4\pi\lambda'}\frac{e}{r_2(r_2+e)}$$

$$T_0 = \frac{T_1 G_{th_1} + T_2 G_{th_2}}{G_{th_1} + G_{th_2}}$$

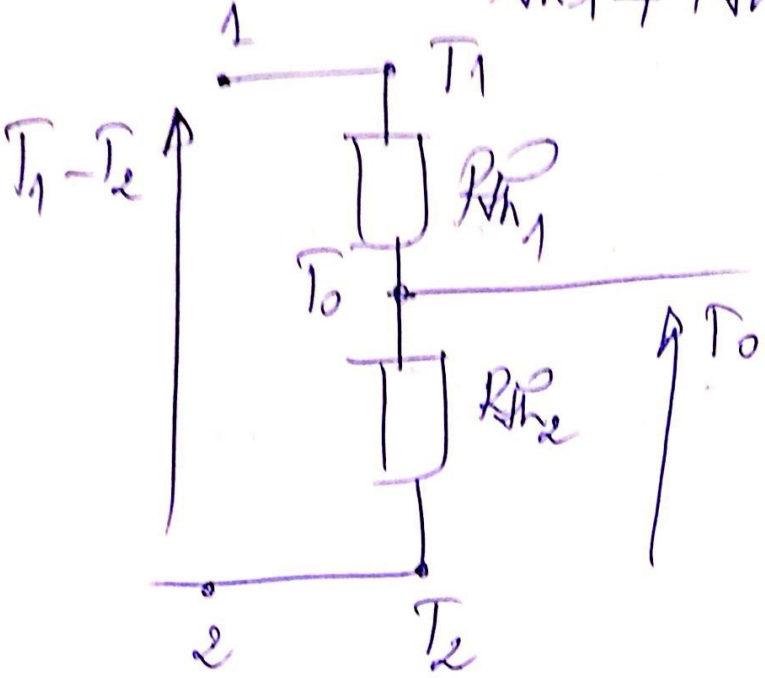
Millman

10mar

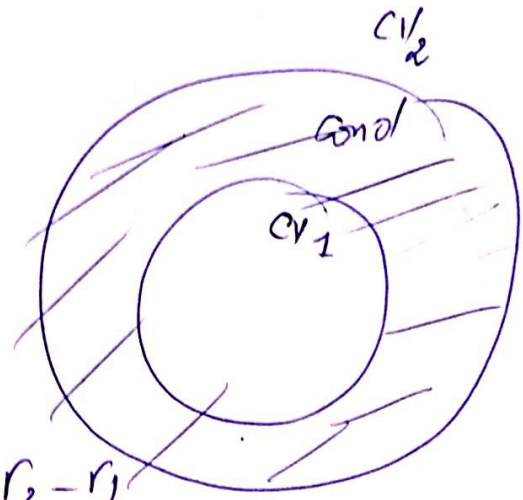
(13)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$T_1 - T_0 = \frac{R_{th_1}}{R_{th_1} + R_{th_2}} (T_1 - T_2)$$



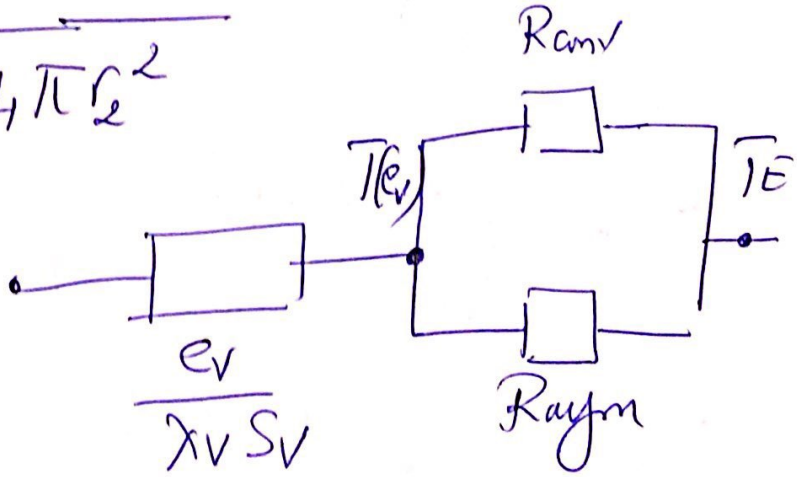
Rq



$$R_{th_{tot}} = \frac{1}{h_1 4\pi r_1^2} + \frac{1}{4\pi\lambda} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$+ \frac{1}{h_2 4\pi r_2^2}$$

Rq. Jonction



10 mars

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Exercice 3 : Energie volumique du rayonnement thermique

La densité spectrale d'énergie :

$$u_\nu = \frac{du}{d\nu} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

1) L'énergie volumique du rayonnement associé aux photons dont les fréquences sont comprises dans l'intervalle spectral $(\nu ; \nu + d\nu)$ et, à la température T donnée : $du = u_\nu \, d\nu$

L'énergie volumique totale du rayonnement dans l'enceinte est donc :

$$u = \int_0^\infty u_\nu(\nu) \, d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3 \, d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad ; \text{ soit, en posant : } \quad x = \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow$$

$$\nu = \frac{k_B T}{h} x \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T}{h} dx$$

donc $u = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 \, dx}{e^x - 1} = \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3 \, dx}{e^x - 1}$

or $\int_0^\infty \frac{x^3 \, dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$ donc $\boxed{u = \frac{8\pi^5 k_B^4 T^4}{15 h^3 c^3}}$ (1)

L'énergie volumique moyenne dans l'enceinte est donc proportionnelle à la puissance quatrième de la température du rayonnement en équilibre.

2) La puissance rayonnée par unité de surface (ou exitance) à la température T : $M(T) = c \frac{u(T)}{4}$

d'après (1) $\Rightarrow M = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} T^4 = \sigma T^4 \Rightarrow$ Stefan Boltzmann

$$\boxed{\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \, W.m^{-2} K^{-4}}$$

(1)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

3) Posons $x = \frac{h\nu}{k_B T}$; la densité spectrale d'énergie :

$$u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{8\pi k_B^3 T^3}{c^3 h^2}\frac{x^3}{e^x - 1}$$

sera maximale pour les photons d'énergie $h\nu$ telle que :

$$\frac{du_\nu}{d\nu} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{e^x - 1}\right) = 0 \text{ ou } \frac{3x^2(e^x - 1) - x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2\left[3e^x - 3 - xe^x\right] = 0 \Rightarrow e^x(3 - x) = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{-x} = 1 - \frac{x}{3}} \quad (2)$$

La solution x de cette équation est légèrement inférieure à 3, soit $3 - \varepsilon = x$ avec $(\varepsilon \ll 3)$

$$e^{-(3-\varepsilon)} = e^{(\varepsilon - 3)} \approx 1 - \frac{3 - \varepsilon}{3} \approx \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow e^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon e^3}{3}$$

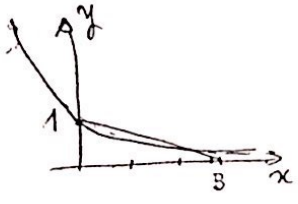
d.l. $e^{\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{\varepsilon e^3}{3} = 6{,}7\varepsilon$

$$\Rightarrow \varepsilon^2 - 11{,}4\varepsilon + 2 = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0{,}18 \text{ seule acceptable}$$

$x = \frac{h\nu}{k_B T} = 2{,}82$; dont la fréquence des photons associés à la densité spectrale d'énergie maximale est :

$$\nu_0 = \frac{2{,}82\, k_B T}{h} \text{ et la longueur d'onde } \lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_0 = \frac{ch}{2{,}82\, k_B T} \sim 2{,}8\,\mu m} \text{ (domaine infra-rouge)}$$



4) $u_\lambda = \left|\frac{du}{d\lambda}\right| = \left|\frac{du}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\lambda}\right| = \left|u_\nu \cdot \frac{d(c/\lambda)}{d\lambda}\right|$ K.B

$$= \left|u_\nu \cdot \left(-\frac{c}{\lambda^2}\right)\right| = \frac{c}{\lambda^2} u_\nu = \frac{\nu^2}{c} u_\nu$$

$$\boxed{u_\lambda = \frac{8\pi h}{c^4}\frac{\nu^5}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}} \quad (3)$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$M_\lambda = \frac{dM}{d\lambda} = \frac{c\,u_\lambda}{4}$

a)

$$M_\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} = \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1}$$

$C_1 = 2\pi h c^2 = 3{,}75\,10^{-16}\ W\,m^2$

$C_2 = \frac{hc}{k_B} = 1{,}44\,10^{-3}\ m.K.$

b) si on pose $y = \frac{hc}{\lambda k_B T}$; $M_\lambda = cte\ \frac{y^5}{e^y - 1}$; $cte = \frac{2\pi k^5 T^5}{c^3 h^4}$

M_λ passe donc par un maximum pour $\lambda = \lambda_{max}$ /

$\frac{dM_\lambda}{dy} = 0$ soit : $5y^4(e^y - 1) - y^5 e^y = 0$ ou $e^{-y} = 1 - \frac{y}{5}$

$y = 5 - \varepsilon$; $(\varepsilon \ll 1)$ solut° : K. B

$e^{-(5-\varepsilon)} = e^{-5} e^{\varepsilon} = 1 - \frac{5-\varepsilon}{5} = \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow e^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{5} e^5$

$e^{\varepsilon} \simeq 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{\varepsilon e^5}{5} \Rightarrow \varepsilon^2 - 57{,}36\,\varepsilon + 2 = 0$

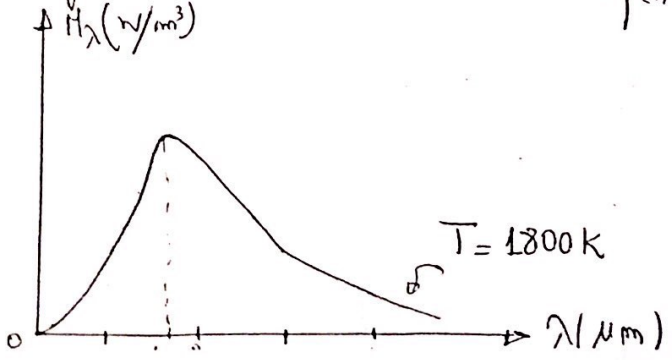
La solut° acceptable est $\varepsilon = 0{,}0035 \Rightarrow y = \frac{hc}{\lambda kT} = 4{,}9965$

$\lambda_m = \frac{hc}{4{,}965\,kT} = 1{,}60\ \mu m$ (I.R).

Ou $\lambda_m \cdot T = \frac{hc}{4{,}965\,k} = 2900\ \mu m.K$ (loi de Wien)

c) L'exitance spectrale maximale vaut, à la température T, d'après (3)

$(M_\lambda)_{max} = M_\lambda(y = 4{,}965) = \frac{2\pi k^5 T^5}{c^3 h^4} \frac{(4{,}965)^5}{\exp(4{,}965) - 1} = 2{,}41\,10^{11}\ W/m^3$



page (3)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

6) $T \ll \frac{h\nu}{k}$ → $h\nu \gg kT$, $\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \approx \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$

7) $u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$

$u_\lambda = \left|\frac{du}{d\lambda}\right| = \frac{c}{\lambda^2} u_\nu$, $M_\lambda = \frac{c\, u_\lambda}{4} = \frac{c^2}{4\lambda^2} u_\nu$, $\nu = \frac{c}{\lambda}$

$M_\lambda = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \frac{c^2}{4\lambda^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$

$$\boxed{M_\lambda = 2\pi h c^2 \cdot \frac{1}{\lambda^5} \cdot \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right)}$$ K. Bohe

b) $\frac{dM_\lambda}{d\lambda} = 0 \Rightarrow 2\pi h c^2 \left[-\frac{5}{\lambda_m^6} + \frac{hc}{kT}\frac{1}{\lambda_m^7}\right] e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} = 0$

$\Rightarrow \lambda_m T = \frac{hc}{5k} = cte = 2880\ \mu m\, K$

c) L'approximation de Wien à basse température n'est acceptable que si $\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) > 100$ pour pouvoir négliger 1 devant l'exp.

$\frac{h\nu}{kT} = \frac{hc}{\lambda kT} > \ln 100 = 4{,}6 \Rightarrow \lambda < \lambda'_m = \frac{hc}{4{,}6kT} = 8{,}4\ \mu m.$

7) Hautes températures $h\nu \ll kT$; $\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \approx 1 + \left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 = \frac{h\nu}{kT}$

$u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \frac{kT}{h\nu} = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2$

$M_\lambda = \frac{c^2}{4\lambda^2} u_\nu = \frac{2\pi kT \nu^2}{c\lambda^2}$ avec $\nu = \frac{c}{\lambda}$

$$\boxed{M_\lambda = 2\pi c \frac{kT}{\lambda^4}}$$ (loi de Jeans–Rayleigh)

$h\nu \ll kT$.

page (4)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.