$h = 6,626 \cdot 10^{-34}\ m^2 kg\ s^{-1}$ $ev = 1,6 \cdot 10^{-19}\ J$ $k_b = 1,38 \cdot 10^{-23}\ m^2 kg\ s^{-2} K^{-1}$

$m_{molécule} \simeq 10^{-27}\ kg$

Dr Kchaou borhen

Section MP2–PT2-PC2

PHYSIQUE QUANTIQUE

Série N° 1

Introduction à la mécanique quantique

Exercice 1 : Longueur d'onde de De Broglie

1. Calculer la longueur d'onde de De Broglie pour :
   - Un électron, d'énergie cinétique égale à 10 eV.
   - Une personne, de masse m = 70 kg, se déplaçant à une vitesse de l'ordre du mètre par seconde.

   Commenter les ordres de grandeur obtenus.
2. À ce jour, les fullerènes C_{60} sont les molécules les plus grosses pour lesquelles des phénomènes ondulatoires ont été observés. Dans les expériences correspondantes, les molécules ont une vitesse moyenne de $220 m.s^{-1}$. Calculer la longueur d'onde de Broglie de ces molécules.
   Comment se compare-t-elle aux dimensions de la molécule (de l'ordre du nanomètre) ?

Exercice 2 : Quantique ou classique

Dites si l'étude des systèmes suivants vous semblent relever du domaine de la physique quantique ou classique.

1. Un oscillateur électrique LC portant une charge $q = 5,0 \times 10^{-7}$ C avec $L = 40$ mH et $C = 1,0 \times 10^{-7}$ F.
2. Pour une personne de masse m = 70 kg, est-il envisageable de mettre en évidence un régime de chute libre quantique dans le champ de pesanteur terrestre? Même question pour un neutron de masse $m = 1,7 \times 10^{-27}$ kg.
3. Un vase rempli d'hélium superfluide est mis en rotation. On observe que l'hélium reste au repos hormis à l'intérieur de tourbillons filiformes parallèles à l'axe de rotation du vase.
   Chaque tourbillon est caractérisé par un diamètre de l'ordre du dixième de millimètre et une fréquence de rotation de l'ordre de 10 Hz. Évaluer numériquement l'action caractéristique d'un atome d'hélium dans le tourbillon. Conclure.
4. On considère de l'hélium gazeux à température ambiante et à la pression atmosphérique.

L'énergie cinétique moyenne d'un atome d'hélium est égale à $E = \frac{3}{2} k_B T$ où k_B est la constante de Boltzmann.

a. Déterminer et évaluer numériquement la vitesse quadratique moyenne d'un atome d'hélium.
b. Calculer la longueur d'onde de De Broglie correspondante. La comparer à la distance moyenne entre atomes d'hélium.
c. On s'attend à ce que les effets quantiques puissent jouer un rôle lorsque la longueur d'onde de Broglie est de l'ordre de grandeur ou plus grande que la distance moyenne interatomique. Expliquer pourquoi et dites si l'étude de ce gaz d'hélium vous semble relever ou pas de la mécanique quantique.

Exercice 3 *Superfluidité de l'hélium*

À la pression normale, l'hélium se liquéfie à la très basse température de T = 4,2°K. Il subit à la température plus basse 2,18°K une transition de phase de sorte qu'au dessus de cette température, l'hélium qui est baptisé "hélium II" est superfluid et s'écoule avec une viscosité nulle. Il possède en outre dans cette phase une conductivité thermique anormalement élevée.

1- Montrer qu'une action associée à ce phénomène est : $A = M^{5/6} (k_B T)^{1/2} \rho^{-1/3}$ où M est la masse d'un atome d'hélium, ρ la densité volumique de l'hélium et k_B la constante de Boltzmann.

2- Ce phénomène est-il de nature quantique? Justifier la réponse.

On donne : $M = 6.67 \times 10^{-27}$ kg, $\rho = 1.46 \times 10^{2}$ kg m^{-3}

$[A]^2 = [E][m][L]^2$

$\rho = \frac{m}{L^3} \Rightarrow L = \left(\frac{m}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow L^2 = \left(\frac{m}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}}$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

mahdystudies.tn

Mise en évidence du caractère corpusculaire du photon

Au début du 20ème siècle, le rayonnement du corps noir, l'effet photoélectrique et l'effet Compton ont été considérés comme des preuves du comportement corpusculaire de la lumière. Cette partie étudie ces trois phénomènes, leurs explications traditionnelles en terme de photon.

Exercice 4: Le corps noir et la catastrophe ultraviolette

La théorie classique du corps noir, élaborée à la fin du 19ème siècle, s'appuie essentiellement sur les équations de Maxwell. Kirchhoff avait établi que la densité volumique d'énergie $u_\nu(T,\nu)$ par unité de fréquence devait titre une fonction universelle de la fréquence ν de l'onde émise et de la température T du corps. L'énergie électromagnétique par unité de volume, dans la bande de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$, est : $du = u_\nu(T,\nu)\, d\nu$

1. Déterminer l'équation aux dimensions de $u_\nu(T,\nu)$.

2. L'étude menée par Rayleigh et Jeans les a conduit à une relation entre la densité $u_\nu^{RJ}(T,\nu)$ d'un corps noir à la température T et la fréquence ν de l'onde émise. On rappelle qu'en thermodynamique classique, à tout degré de liberté d'un système à la température T correspond une énergie moyenne de l'ordre de $k_B T$ où k_B est la constante de Boltzmann. Montrer par une analyse dimensionnelle, que u_ν^{RJ} est nécessairement de la forme $u_\nu^{RJ} = A\, c^\alpha\, \nu^\beta (k_B T)^\gamma$, où c est la vitesse de la lumière et A une constante numérique inconnue. Calculer les exposants α, β, et γ.

« La catastrophe ultraviolette est flagrante mise en évidence pour les courtes longueurs d'onde dans la loi de Rayleigh du modèle classique donnant l'énergie émise par un corps noir idéal. »

3. Montrer que l'expression précédente donnant u_ν^{RJ} est physiquement absurde en évaluant l'énergie volumique totale : $u_J = \int_0^\infty u_\nu^{RJ}\, d\nu$. La difficulté provient-elle des hautes ou des basses fréquences ?

4. La loi de Rayleigh et Jeans a conduit Ehrenfest à parler de «catastrophe ultraviolette». En quoi consiste cette « catastrophe » ?

5. En 1896, Wien précisa que $u_\nu(T,\nu)$ devait être de la forme générale $u_\nu(T,\nu) = u_\nu^{RJ}(T,\nu)\, f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ où $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ est une fonction universelle. Cette fonction a pour rôle d'éliminer la difficulté liée à la «catastrophe ultraviolette». Calculer les limites de la fonction $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ à l'origine et à l'infini.

6. Wien proposait une formule approchée d'origine expérimentale :

$u_\nu(T,\nu) = B\,\nu^3 \exp\left(-\frac{a\,\nu}{T}\right)$ où a et B sont des constantes.

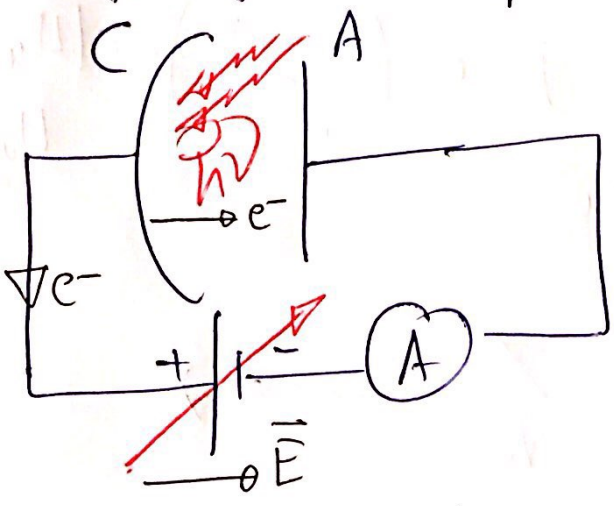
Montrer que ceci implique pour $\nu \to +\infty$ $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ est proportionnelle à $\nu \exp\left(-\frac{a\,\nu}{T}\right)$

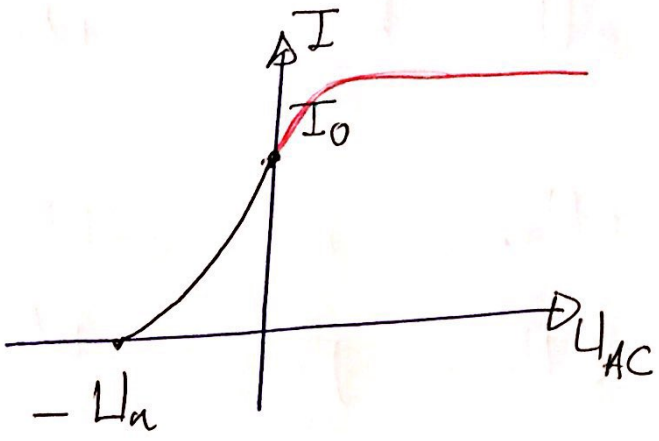
7. En 1900, Max Planck émet l'hypothèse que les ondes électromagnétiques transportent l'énergie par paquets, appelés quanta d'énergie. Il trouva la fonction $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ en cherchant à raccorder les formules de Rayleigh-Jeans et de Wien $f\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{\frac{h\nu}{k_B T}}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$. Montrer qu'on retrouve bien les limites ci-dessus pour les hautes ($\nu >> \nu_q$) et basses ($\nu << \nu_q$) fréquences. Exprimer ν_q.

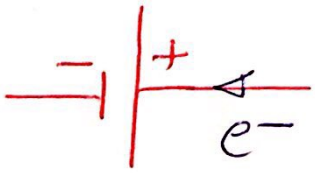
8. En quoi l'hypothèse de Planck est-elle révolutionnaire ?

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

effet photoélectrique.







$\vec{F_e} = q\vec{E} = -e\vec{E}$

U_a le potentiel d'arrêt. $\therefore v_A = 0$

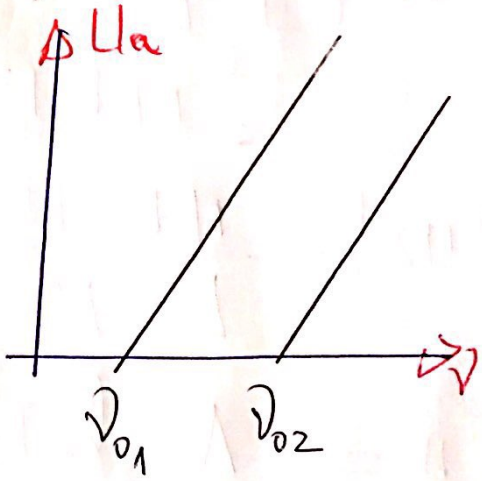
$$\frac{1}{2} m v_C^2 + (q V_C) = \frac{1}{2} m v_A^2 + (q V_A)$$

$$\frac{1}{2} m v_C^2 - e V_C = 0 - e V_A$$

$$\frac{1}{2} m v_C^2 = -e(V_A - V_C) = -e U_{AC} = +e U_a$$

$$e U_a = E_c = \frac{1}{2} m v_C^2$$

$$E = h\nu = W_0 + \frac{1}{2} m v_C^2$$



$$E_c = \frac{1}{2} m v_C^2 = (h\nu - W_0) \geq 0$$

xmas

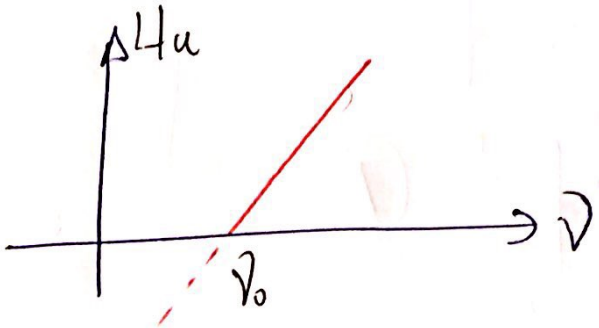
1

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$eU_a = \frac{hc}{\lambda} - W_0 = h\nu - W_0$$

$$eU_{a_1} = \frac{hc}{\lambda_1} - W_0 \Rightarrow hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = e(U_{a_1} - U_{a_2})$$

$$eU_{a_2} = \frac{hc}{\lambda_2} - W_0$$



$$-\frac{W_0}{e}$$

MB2 2020

Ex4

$$[U_\nu(\nu,T)] = \frac{J}{m^3\ Hz} = J.m^{-3}\ S$$

$$[\text{énergie}] = [\text{Force}][\text{distance}]$$

$$= M L^2 T^{-2}$$

$$[U_\nu] = \frac{M L^2 T^{-2}}{L^3\ T} = M.L^{-1}.T^{-1}$$

$$U_\nu = A\ (k_B T)^\gamma\ c^\alpha\ \nu^\beta$$

$$U_\nu(\nu,T) = A\ \frac{(k_B T)\ \nu^2}{c^3}$$

30 mars

2

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$H(T) = \int_0^{\infty} H_\nu(\nu,T)\,d\nu = A\frac{k_B T}{c^3}\int_0^{\infty}\nu^2 d\nu \quad \text{diverge}$$

$$H_\nu^{RJ} = A\frac{k_B T}{c^3}\nu^2$$

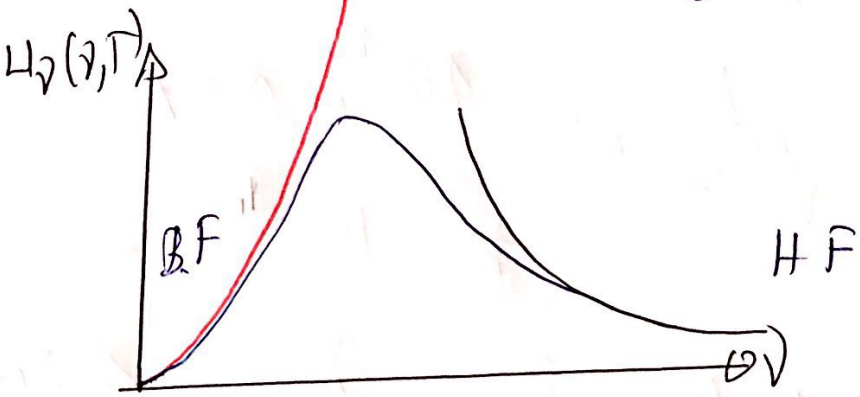


a) Wien : $H_\nu(\nu,T) = H_\nu^{RJ} f\left(\frac{\nu}{T}\right)$

$\lim_{\nu\to 0} f\left(\frac{\nu}{T}\right) = 1$ $\qquad$ $\lim_{\nu\to\infty} f\left(\frac{\nu}{T}\right) \to 0$

b) Wien $\quad H_\nu(\nu,T) = B\nu^3 \exp\left(-\frac{a\nu}{T}\right)$

$$= A\frac{(k_B T)}{c^3}\nu^2 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$$



$E = h\nu$

$$H_\nu(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)-1} = \frac{du}{d\nu}$$

$$f\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{h\nu/k_B T}{\exp\left(\frac{h}{k_B}\frac{\nu}{T}\right)-1}$$

2Cours 3

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Corpuscule photon $\left\{ \begin{array}{l} E = \hbar \cdot \omega \\ \vec{p} = \hbar \vec{k} \end{array} \right.$ ondulatoire

$$p = \frac{\hbar}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda_{DB}} \Rightarrow \boxed{\lambda_{DB} = \frac{\hbar}{p}}$$

$\lambda_{DB} \ll$ dimension système : Classique

$\lambda_{DB} \sim$ Taille système quantique.

Ex1

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} = 10\,eV = 10 \times 1{,}6\,10^{-19}\,J$$

$$\lambda_{DB} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m E_c}} = 10^{-10}\,m \leq \text{Å}$$

$\hbar = 10^{-34}\,J.s$

quantique :

$m = 70\,kg$; $v = 1\,m/s$: $\lambda_{DB} = \frac{\hbar}{mv} = \ll 1\,m$

Classique :

- Action = moment cinétique $\sim \hbar$

quantique

Action $\gg \hbar$; classique

20 mars (4)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$[A] = \frac{[\text{Energie}]}{[\text{Fréquence}]} = E\,T$$

$$[A] = [\text{Force}][\text{distance}][\text{Temps}] = [q_{inv}][L] = p\,L$$

$$= (M L T^{-2})\, L\, T = M L^2 T^{-1}$$

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$[A]^2 = (M L^2 T^{-1})(E\,T) = E\,M\,L^2$$

* $C = 10^{-7}\,F$ — $L = 40\,mH$

$q = 5\,10^{-7}\,C$

$$A = E\,T = \left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) \cdot 2\pi\sqrt{LC} \gg \frac{P}{h}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T_0}$$

• $m = 70\,kg$:

$$[A]^2 = E\,M\,L^2 = (mgH)\, m\, H^2$$

$$= m^2 g H^3 = \frac{P^2}{h}$$

$$H = 10^{-26}\,m$$

30 mars

5

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Ex3 : He_1 ; He_2

$\rho = \frac{m}{L^3}$

4,2K 2,18K

$[A]^2 = E_{\eta} L^2 = (k_B T)\, m \left(\frac{m}{\rho}\right)^{+\frac{2}{3}}$

$[A]^2 = (k_B T)\, m^{+1/3}\, \rho^{+2/3}$

$[A] = (k_B T)^{1/2}\, \eta^{5/6}\, \rho^{-1/3} = 40\,\hbar \sim$ quelque

$E_{cinétique} = \left(\frac{1}{2} k_B T\right).3$ → K

k_B : $J.K^{-1}$

$E_{cinétique}$: J

$PV = \frac{m}{M} RT = \frac{m_a N}{m_a N_A} RT$

$P = \frac{N}{V} \frac{RT}{N_A} = n \frac{R}{N_A} T = n k_B T$

30 mars

6

Serie N°2

Ex1 $\quad -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta\psi) + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

- $|\psi(x,t)|^2 = \rho = \frac{dP}{dx} \longrightarrow$ en m^{-1}

$|\psi(x,t)| \longrightarrow m^{-1/2} \longrightarrow L^{-1/2}$

- libre $\Rightarrow V(x) = 0$.
- état stationnaire d'énergie $E \Rightarrow \varphi(x)$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi$$

$\psi(x,t) = \varphi(x)\cdot f(t)$

$$i\hbar\frac{df(t)}{dt} = E f(t)$$

$$\frac{df(t)}{f(t)} = \frac{E}{i\hbar}dt = \frac{-iE}{\hbar}dt$$

$$f(t) = f_0 e^{-i\omega t}$$

$$\psi(x,t) = \varphi(x)\, e^{-i\omega t}$$

30 mars (7)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + 0 = E\varphi(x)$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)\varphi(x) = 0.$$

$$E = E_c + V(x) = E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(\hbar k)^2}{2m} = E$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\varphi''(x) + k^2\varphi(x) = 0. \qquad r^2 + k^2 = 0 \quad r = \pm ik$$

$$\varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}$$

$\rightarrow (ox)^+$ $\qquad$ $(ox)^-$ $\leftarrow$

2) $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$

a) $E = \frac{\hbar^2k^2}{2m} = \hbar\omega \Rightarrow \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$



dispersif

b) $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$, $v_g = \frac{d\omega}{dk} = 2v_\varphi = \frac{p}{m}$

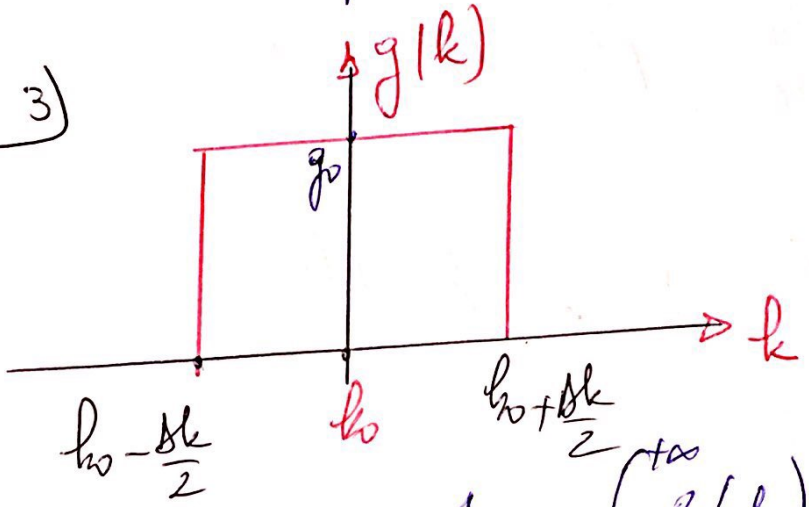
$v_g = v_{particule}$.

c) 3(mark) (8)

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = 1$ condition de normalisation

$\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 dx =$ <u>diverge</u> ∴ une onde monochrom ne représente pas physiquement la particule

3)



a) $\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\, e^{ikx}\, dk$

$= \frac{g_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} e^{ikx}\, dk = \frac{g_0}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ik_0x}\, \frac{\left(e^{i\frac{\Delta k x}{2}} - e^{-i\frac{\Delta k x}{2}}\right)}{ix}$

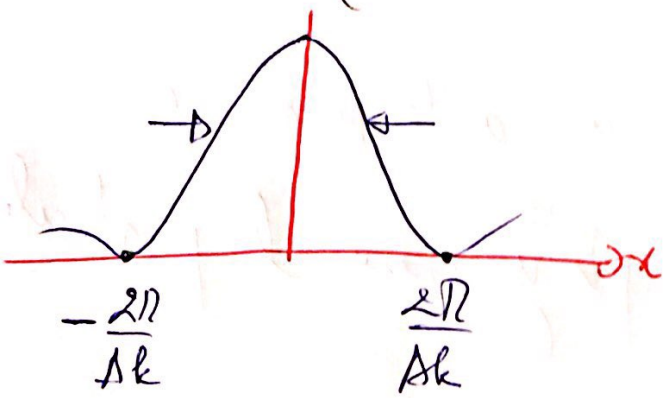
$= \frac{g_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{2i \sin\left(\frac{\Delta k x}{2}\right)}{ix\,\frac{\Delta k}{2}}\, e^{ik_0x}\, \Delta k$

$\psi(x,0) = \frac{g_0(\Delta k)}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{Sinc}\left(\frac{\Delta k x}{2}\right) e^{ik_0x}$

30 mars (9)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$|\psi(x,0)|^2 = \left(\frac{g_0^2}{2\pi}\right)(\Delta k)\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Delta k\, x}{2}\right) = S(x,0)$$



$$u = \left(\frac{\Delta k\, x}{2}\right)$$

c) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_0^2(\Delta k)^2}{2\pi}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Delta k\, x}{2}\right) dx = 1$$

$$\left(\frac{g_0^2}{2\pi}\right)(\Delta k)^2\,\pi\left(\frac{2}{\Delta k}\right) = 1 = g_0^2(\Delta k)$$

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{\Delta k}}$$

$$\psi(x,0) = \sqrt{\left(\frac{\Delta k}{2\pi}\right)}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Delta k\, x}{2}\right)\, e^{(i k_0 x)}$$

d) $$\Delta x = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{\text{base}}{2} \Rightarrow \Delta x\,\Delta k = 2\pi > \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{\Delta x\,\Delta p}_{\text{Achim}} = 2\pi\hbar > \frac{\hbar}{2}$$

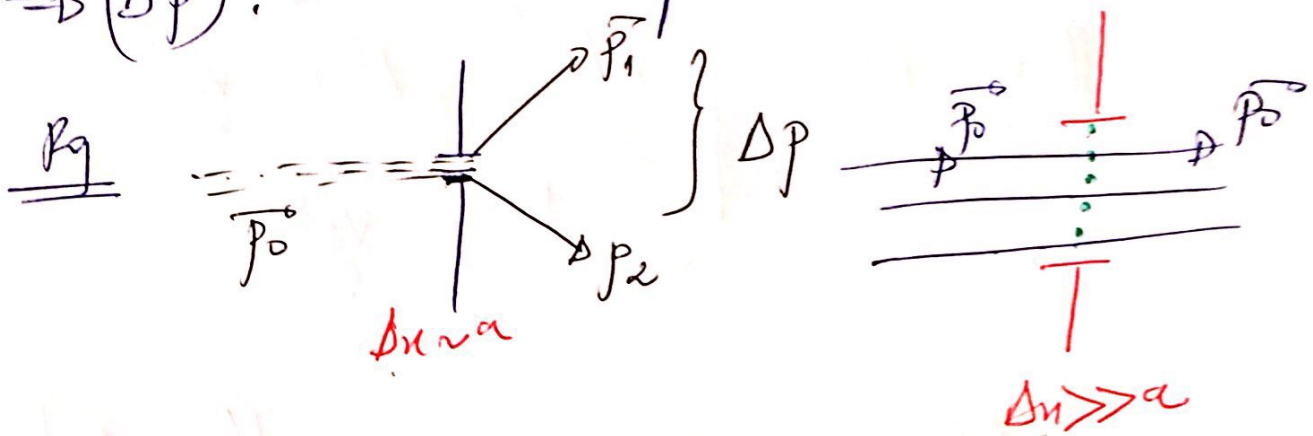
20 mars

10

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

position exacte de la particule Δx faible

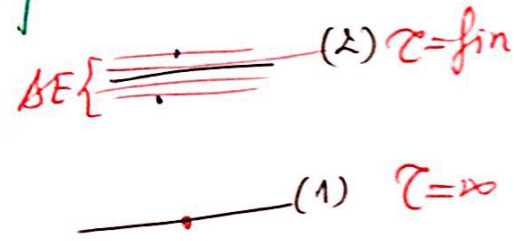
$\Rightarrow (\Delta p)$: inadmissible ; élevé



(*) $v_g = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{\frac{\Delta E}{\hbar}}{\frac{\Delta p}{\hbar}} = \frac{\Delta E}{\Delta p}$

$\Delta x \, \Delta p = \Delta E \, \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

$\Delta x \, \Delta k = \Delta \omega \, \Delta t \geq \frac{1}{2}$



e) $\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0)\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$

$\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0) v_g$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) \, e^{i(kx - \omega t)} \, dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k) \, e^{i\left(kx - (\omega_0 + (k - k_0) v_g) t\right)} \, dk$$

$$= e^{i(k_0 v_g - \omega_0) t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(k)}{\sqrt{2\pi}} \, e^{ik(x - v_g t)} \, dk$$

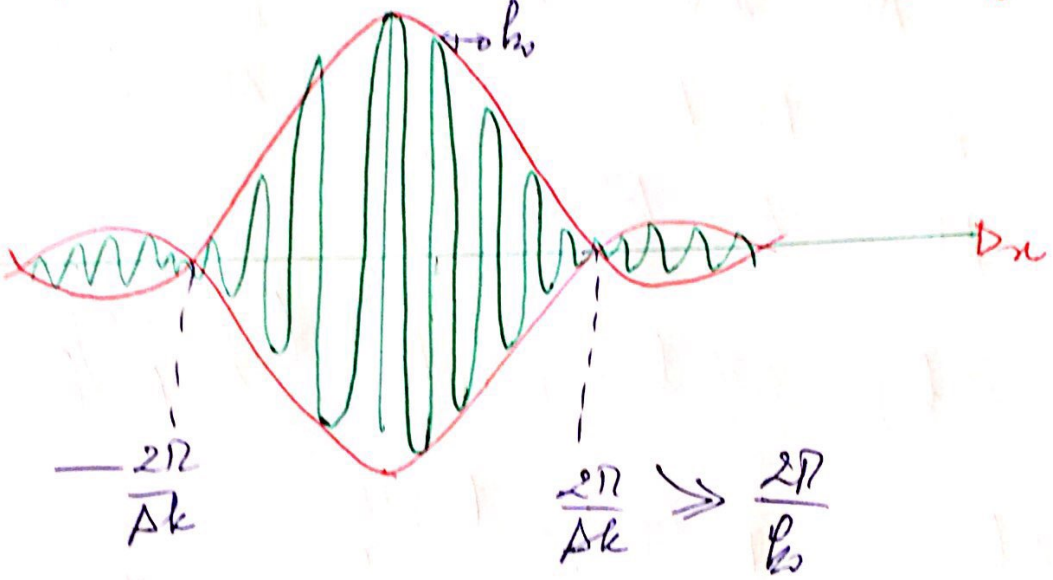
(11)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

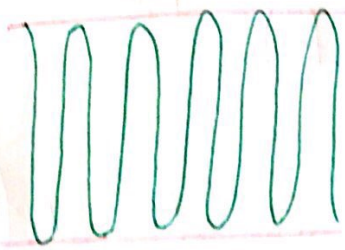
$$\varphi(x,t) = e^{i(k_0 v_g - \omega_0)t}\, \varphi(x - v_g t ; 0)$$

$$= e^{i(k_0 v_g - \omega_0)t} \sqrt{\frac{\Delta k}{2\pi}}\, \mathrm{Sinc}\frac{\Delta k}{2}(x - v_g t) \times e^{i k_0 (x - v_g t)}$$

$$\underline{\varphi(x,t)} = \sqrt{\frac{\Delta k}{2\pi}}\, \mathrm{Sinc}\left(\frac{\Delta k}{2}(x - v_g t)\right) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \qquad t = t_0$$



$k_0 \gg \Delta k$



30 mars

12

4) $g(k) = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{1/4} \exp\left[\frac{-a^2}{4}(k-k_0)^2\right]$

a) $[a]$ est L , $k = \frac{2\pi}{\lambda} \longrightarrow m^{-1}$

b) $\psi(x,0) = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} e^{\left[-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2\right]} dk$

$* -\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2 + ikx \quad -ik_0x + ik_0x$

$= -\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2 + i(k-k_0) + ik_0x$

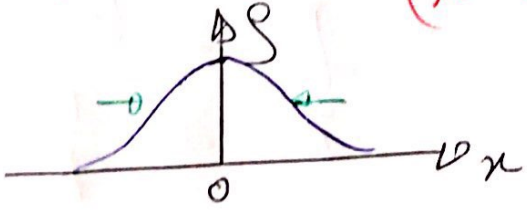
$= -\frac{a^2}{4}\left[(k-k_0)^2 - 2x\left(\frac{2ix}{a^2}\right)(k-k_0) + \left(\frac{2ix}{a^2}\right)^2\right]$

$+ ik_0x \quad - \frac{x^2}{a^2}$

$= -\frac{a^2}{4}\left[(k-k_0) - i\left(\frac{2x}{a^2}\right)\right]^2 + ik_0x - \frac{x^2}{a^2}$

$\psi(x,0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{ik_0x} e^{-x^2/a^2}$

c) $|\psi(x,0)|^2 = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2x^2}{a^2}\right)$



9 mars

13

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

d) $g(l) = \exp\left(-\frac{l^2}{b^2}\right) \rightarrow \Delta l = b/\sqrt{2}$

$$\exp\left(-\frac{2x^2}{a^2}\right) = \exp\left[\frac{-x^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}\right] \Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{a}{2}}$$

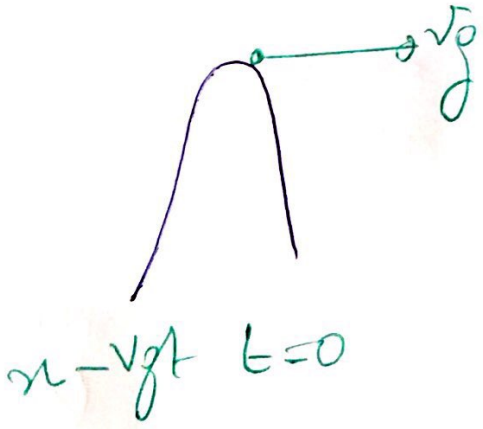
$$|g(k)|^2 = \dots \exp\left[\frac{-\Delta k^2 (k-k_0)^2}{2}\right]$$

$$\Delta k = \frac{\sqrt{2}/a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{a}$$

e) $$\boxed{\Delta x \cdot \Delta k = \frac{1}{2}}$$

f) $$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\, e^{i(kx - (\omega_0 + (k-k_0)v_g)t)}\, dk$$

$$= e^{i(k_0 v_g - \omega_0)t}\ \psi(x - v_g t, 0) = \psi(x,t)$$





$p_0 = \hbar k_0$

$\frac{p_0}{\hbar} = k_0$

$\omega_0 = \frac{E_0}{\hbar}$

30 mars

(14)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

5) $g(k) = \sqrt{b}\ \exp(-b|k-k_0|)$

a) b en m

b) $\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{b}\, e^{(-b|k-k_0|)} e^{ikx}\, dk$

$= \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{k_0} e^{ikx} e^{-b(k_0-k)}\, dk + \int_{k_0}^{+\infty} e^{ikx} e^{-b(k-k_0)}\, dk \right\}$

$= \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \left\{ e^{-bk_0} \int_{-\infty}^{k_0} e^{(ix+b)k}\, dk + e^{+bk_0} \int_{k_0}^{+\infty} e^{-k(ix-b)}\, dk \right\}$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ b^{3/2}\ \frac{e^{+ik_0x}}{x^2+b^2}$

c) $\Delta x(0) = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$

$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, |\psi|^2\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} b^{3/2}\, \frac{x\, dx}{(x^2+b^2)^2} = 0$

$\langle x^2\rangle = \int x^2 |\psi|^2\, dx$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ b^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+b^2)^2}\, dx = b^2$

30 mars (15)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$\Delta x(0) = b$

Or $\Delta x = \dfrac{1}{b\sqrt{2}}$ $\quad b = \dfrac{1}{\sqrt{2}} > \dfrac{1}{2}$

h) $\Delta x(t) = \sqrt{-b^2 + \dfrac{\hbar^2}{2m^2b^2}\, t^2}$

$\Delta x(t) = \Delta x(0)\left[1 + \dfrac{t^2}{\left(\dfrac{2m^2b^4}{\hbar^2}\right)}\right]^{1/2}$

$t_0^2 = \dfrac{2m^2b^4}{\hbar^2}$

$t \gg t_0$ $\quad \Delta x(t) \simeq \Delta x(0)\dfrac{t}{t_0}$: rectiligne uniforme

$t \ll t_0$: d.l : quantique -

30 mars

16

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.