

Etat liés d'une particule dans un puits en fonction delta

On considère une particule dans un problème à une dimension dans un potentiel de la forme

$$V(x) = -\alpha \delta(x) \quad \begin{cases} \alpha: \text{constante positive} \\ \delta(x): \text{"Fonction" de Dirac} \end{cases}$$

On suppose que l'énergie E de la particule est négative (état lié), dans ce cas la fonction d'onde s'écrit :

$$x < 0 \quad \psi(x) = A e^{qx} + B e^{-qx}; \quad x > 0 \quad \psi(x) = C e^{qx} + D e^{-qx}$$

où q est une constante qui dépend de E et m .

1) La dérivée première ($\psi'(x)$) de la fonction $\psi(x)$ présente une discontinuité en $x = 0$, $\Delta \psi'(0) \neq 0$.

$$\text{On donne :} \quad \Delta \psi'(0) = \psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \psi(0) = 2kq\psi(0)$$

En utilisant la continuité de $\psi(x)$. Donner la matrice M en fonction de k définie par :

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

2) a) Sachant que $\psi(x)$ représente un état physique, donner les expressions normalisées de $\psi(x)$. En déduire la valeur de l'énergie E .

b) Représenter graphiquement ces fonctions en précisant leur portée ℓ en fonction de q . En déduire leur largeur Δx (Δx : extension spatiale de $\psi(x)$).

3) a) Calculer la transformée de fourrier $\varphi(p)$ de la fonction $\psi(x)$.

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \exp\left(-i \frac{p}{\hbar} x\right) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\hbar q)^{3/2}}{(\hbar q)^2 + p^2}$$

b) Calculer $|\varphi(p)|^2$, que représente ce terme ?

c) Pour quelle valeur p_0 de l'impulsion, $|\varphi(p)|^2$ est maximale ?

d) On définit Δp (dispersion de l'impulsion de la particule dans son état lié) par $\Delta p = p - p_0$ où p vérifie la relation $|\varphi(p)|^2 = \frac{|\varphi(p_0)|^2}{25}$ montrer que $\Delta p = 2 \hbar q$.

e) Evaluer le produit $\Delta x \cdot \Delta p$. Conclure.

Calcul du coefficient de transmission dans le cas d'une particule dans un puits en fonction delta

On considère un "puits delta" centré sur le point a correspondant au potentiel singulier :

$$V(x) = -\eta \delta(x-a) \quad (\eta > 0) \text{ où } \delta(x-a) \text{ représente la distribution de Dirac}$$

1) En intégrant l'équation de Schrodinger entre $a - \epsilon$ et $a + \epsilon$ ($\epsilon > 0$ et tend vers 0) Déterminer l'équation de discontinuité de la dérivée première ($\psi'(x)$) de la fonction d'onde $\psi(x)$ représentant un état stationnaire d'énergie E associée à ce puit.

$$\psi'(a + \epsilon) - \psi'(a - \epsilon) = -\gamma \psi(a)$$

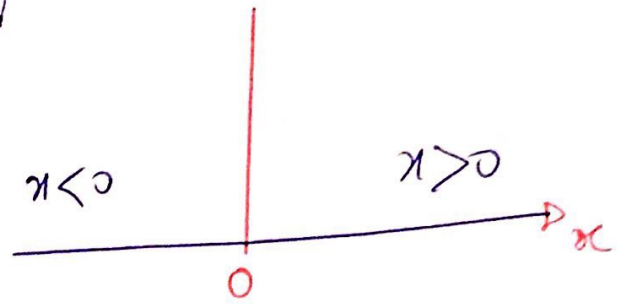
où γ est une constante qui dépend de η , $\hbar$ et m .

2) Montrer qu'il existe un état lié dont son énergie $E = -\frac{m\eta^2}{2\hbar^2}$ et la fonction d'onde correspondantes.

3) Dans le cas où $E > 0$, montrer l'expression suivante du coefficient de transmission en fonction de l'énergie : $T(E) = \frac{1}{1 + \frac{m\eta^2}{2\hbar E}}$. Donner sa représentation graphique.

quante

$$V(x) = -\alpha \delta(x)$$



$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

$$\underline{x < 0} \quad \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0$$

$$\underline{\text{Etant donné } E < 0, \quad q^2 = \frac{-2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi''(x) - q^2 \psi(x) = 0$$

$$\psi(x) = A e^{qx} + B e^{-qx} \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\psi(x) = C e^{qx} + D e^{-qx} \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\underline{1) \psi(0^-) = \psi(0^+)} \quad A + B = C + D$$

$$q[C - D] - q(A - B) = 2q\hbar^2 (A + B)$$

$$C - D = (A + B)2\hbar^2 + (A - B)$$

(1)

$$C - D = (2k+1)A + (2k-1)B$$

$$C + D = A + B$$

$$2C = 2(k+1)A + 2k B$$

$$2D = -2k A - 2(k-1) B$$

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & k \\ -k & -(k-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1, \quad B=0, \quad C=0$$

$$\psi(x \leq 0) = A e^{+qx}$$

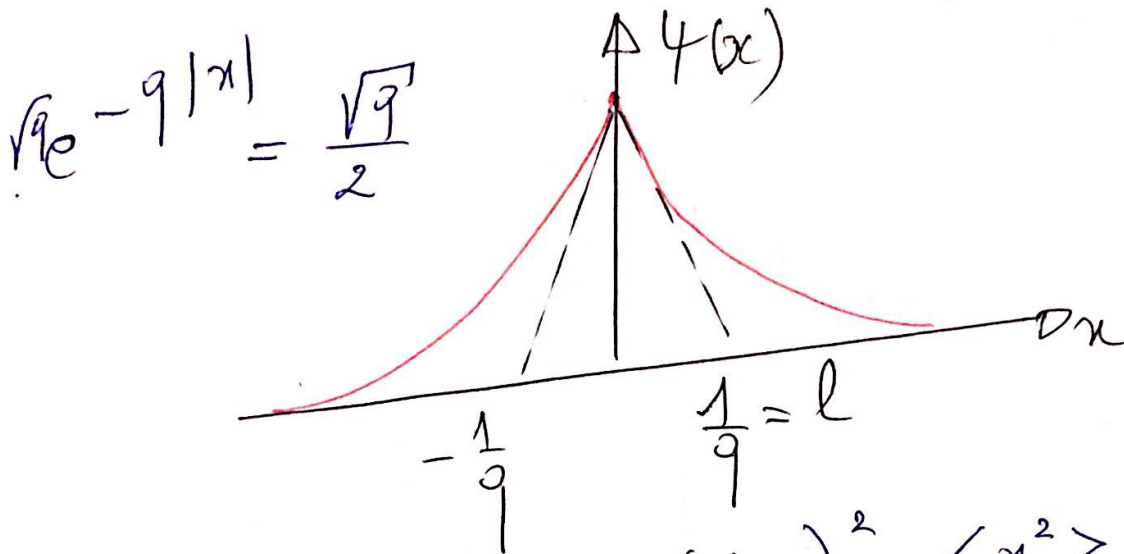
$$\psi(x \geq 0) = D e^{-qx}$$

$$\underline{A=D}, \quad \int_{-\infty}^0 |\psi|^2 dx + \int_0^{+\infty} |\psi|^2 dx = 1$$

$$|A|^2 \left[\int_{-\infty}^0 e^{2qx} dx + \int_0^{+\infty} e^{-2qx} dx \right] = 1 \quad (2)$$

$$A = \sqrt{q}$$

$$\text{mc } \psi(x) = \sqrt{q} \exp(-q|x|)$$



$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\Delta x = \frac{2}{q}$$

$$3) \varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-i\frac{p}{\hbar}x} dx$$

$$= \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{(q - \frac{i}{\hbar}p)x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(q + \frac{i}{\hbar}p)x} dx \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\frac{q}{\hbar})^{3/2}}{(\frac{q}{\hbar})^2 + p^2}$$

(3)

$|\psi(p)|^2 =$ densité de probabilité des particules ayant une impulsion p .

c) $|\psi(p)|^2$ str max $\Rightarrow p = p_0 = 0$.

$$|\psi(p)|^2 = \frac{|\psi(p_0)|^2}{25}$$

$$\frac{2}{\pi} \frac{(\hbar q)^3}{[(\hbar q)^2 + p^2]^2} = \frac{1}{25} \frac{(\hbar q)^3}{(\hbar q)^4} \quad \frac{2}{\pi}$$

$$[(\hbar q)^2 + p^2] = 5(\hbar q)^2 \Rightarrow$$

$$p^2 = 4(\hbar q)^2 \Rightarrow p = 2(\hbar q)$$

$$\Delta p = p - p_0 = 2\hbar q; \quad \Delta x = \frac{2}{q}$$

$$\Delta p \cdot \Delta x = 4\hbar > \frac{\hbar}{2}$$

dimension = $\text{Adim} (E \cdot T)$

19 mai
(4)

$$\begin{array}{c}
 x < a \qquad \qquad x > a \\
 \hline
 \qquad \qquad a \qquad \qquad D_x
 \end{array}
 \qquad V(x) = -\eta \delta(x-a)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx = -\frac{\hbar^2}{2m} [\psi'(a+\varepsilon) - \psi'(a-\varepsilon)]$$

$$\star E \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \psi(x) dx = [\psi(a) - \psi(a)] E = 0$$

$$\begin{aligned}
 \star \int V(x) \psi(x) dx &= -\eta \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(x-a) \psi(x) dx \\
 &= -\eta \psi(a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi'(a+\varepsilon) - \psi'(a-\varepsilon) &= -\frac{2m\eta}{\hbar^2} \psi(a) \\
 &= -\delta \psi(a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi(x \leq a) &= A e^{\eta(x-a)} \\
 \psi(x \geq a) &= D e^{-\eta(x-a)} \quad / \quad e^{\eta\varepsilon} \rightarrow 1
 \end{aligned}
 \qquad (5)$$

$$\underline{A=D}$$

$$-\hbar^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} - A \psi = -E \psi \Rightarrow$$

$$2\psi = \psi = + \frac{2m\psi}{\hbar^2}$$

$$4\psi^2 = \frac{4m^2\psi^2}{\hbar^4} = -\frac{2mE}{\hbar^2}, \quad E < 0$$

$$\text{b) } E > 0 \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$r^2 + k^2 = 0$$

$$r = \pm ik$$

$$\psi(x \leq a) = A e^{ik(x-a)} + B e^{-ik(x-a)}$$

$$\psi(x \geq a) = C e^{ik(x-a)} + D e^{-ik(x-a)}$$

$$D=0$$

stationnaire : $E \propto \lambda^2$ parvenu, Zunge

théorie cinétique

(6)