D^r Kchaou borhen

isotropique: ne dépend pas de la direction
isentropique: entropie = cste (adiabatique + rév)

PHYSIQUE STATISTIQUE

Exercice 1 : *Etude de différents modèles d'atmosphère*

Dans cette partie, on considère l'air comme un gaz parfait da masse molaire M = 29 g/mole. Cet air est en équilibre statique dans le champ de pesanteur terrestre de module g. Oz désignant l'axe vertical ascendant, on désire étudier les évolutions de la pression P, de la température T et de la masse volumique ρ en fonction de l'altitude z du point considéré. On pose : $P_0 = P(z = 0)$, $T_0 = T(z = 0)$, $\rho_0 = \rho(z = 0)$.

Pour les applications numériques, on prendra: $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$, $\rho_0 = 1{,}25\ kg.m^{-3}$, $P_0 = 10^5\ Pa$, $T_0 = 290\ K$.

1. Modèle de l'atmosphère isotherme

On suppose l'air en équilibre isotherme à la température T_0.

a - On donne la loi hydrostatique : $\overrightarrow{grad}\, P = \rho \vec{g}$

Etablir l'équation barométrique suivante : $\mathbf{P(z) = P_0 \exp(-M\, g\, z / R\, T)}$.

$m = \frac{N}{V}$

b- Soit n = n(z) la densité volumique de molécules à l'altitude z. Montrer que l'on peut écrire la loi des gaz parfaits sous la forme suivante : $P = n\, k_B\, T$ k_B constante de Boltzmann.

c- Montrer que l'on obtient l'équation du nivellement barométrique suivante $\mathbf{n(z) = n(0) \exp(-E(z)/k_B T)}$. Quelle est la signification physique de E(z).

d- La pesanteur varie désormais avec l'altitude selon la loi $g(z) = \dfrac{G\, M_T}{(R_T + z)^2}$ où R_T est le rayon de la Terre, G : constante de gravitation M_T masse de la terre.

Montrer que pour $z << R_T$ on a : $\mathbf{g(z) \approx g_0\ (1 - 2\frac{z}{R_T})}$ avec $\mathbf{g_0}$ champ de pesanteur pour z = 0

e- Utiliser la loi hydrostatique pour démontrer $\mathbf{P(z) = P(0) \exp\left(\frac{m\, g_0}{k_B\, T}\left(z - \frac{z^2}{R_T}\right)\right)}$: **m** la masse d'une molécule d'air

$\frac{dz}{dP} + \rho g = 0$

2. Atmosphère adiabatique.

L'air suit toujours la loi des gaz parfaits, mais il est maintenant le siège de phénomènes adiabatiques réversibles suivant la loi $\mathbf{PV^\gamma}$ = constante.

a. Etablir l'équation des adiabatiques réversibles $T^x P^y$ = constante, en fonction de γ.

b. Etablir la relation donnant **dT/ T** en fonction de **dP/ P** .

c. Etablir l'équation différentielle vérifiée par **T** et montrer que : $\dfrac{dT}{T_0} = -\alpha\, dz$ ou α est une constante que l'on exprimera en fonction de γ, ρ_0, g et P_0.

d. En déduire les expressions : T(z), P(z) et ρ(z).

e. Montrer que dans ce modèle, l'atmosphère est limitée et calculer la hauteur limite h_1 en fonction de P_0, g, ρ_0 et γ.

3. Atmosphère polytropique.

Dans les couches basses de l'atmosphère (troposphère) le modèle de l'atmosphère isotherme doit être remplacé par un modèle où la température varie avec l'altitude. On admet la loi empirique: $\mathbf{T(z) = T_0 - \lambda z}$ avec $\lambda = 6{,}5\ 10^{-3}\ K.m^{-1}$. On pose $H = RT_0/Mg$.

a- Donner l'expression du champ de pression : $\mathbf{P(z) = P_0 \left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)^{\frac{T_0}{\lambda H}}}$

b- Montrer que la masse volumique ρ(z) s'écrit : $\mathbf{\rho(z) = \rho(0) \left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)^{\frac{T_0 - \lambda H}{\lambda H}}}$

c- Trouver la relation suivante : $\mathbf{P(z)\, (\rho(z))^{-k} = Cte}$. On exprimera **k** en fonction T_0, λ et H

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Exercice 2 : *Système à deux niveaux*

A- On considère un système de **N** particules indépendantes à deux niveaux **non dégénérés** d'énergie ε_1 et ε_2 en équilibre avec un thermostat qui maintient la température **T.** On suppose que $N >> 1$. On pose $\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0$.

1. Déterminer la probabilité P_1 (respectivement P_2) pour une particule d'être dans le niveau d'énergie ε_1 (respectivement ε_2) en fonction de ε, k_B et T.
2. Définir une température caractéristique θ du système et déterminer les expressions de N_1, N_2, en fonction de N, ε, k_B et T pour $T >> \theta$ et si $T << \theta$.
3. Etablir l'expression de l'énergie interne U du système en fonction de N, ε_2, ε, k_B et T
   - **a-** Par calcul direct : $\mathbf{U = N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2}$
   - **b-** Par un calcul utilisant la fonction de partition Z de N particules.
   - **c-** Tracer l'allure de l'énergie interne U en fonction T
4. En déduire l'expression de la capacité calorifique thermique à volume constant Cv en fonction de N, ε_2, ε, k_B et T. Tracer l'allure de la courbe Cv en fonction T.

B- Application : paramagnétisme

Nous considérons un modèle simple de cristal paramagnétique : N ions identiques sur un réseau, soumis à un champ magnétique $\vec{B}$, de moment magnétique $\vec{\mu_P}$: ($\mu_P > 0$ aimantation d'un ion)
Les interactions entre ions sont négligeables. Système en équilibre avec un thermostat qui maintient la température **T.**

1- Déduire les expressions de N_1, N_2 ions en fonction de **N** et **x** (variable sans unité).
2- Vérifier les pertinences de ces deux expressions si $x \to 0$ et $x \to \infty$
3- Calculer la l'énergie moyenne $< E >$ d'un ion ainsi que sa variance $var(E) = < E^2 > - < E >$
4- Déduire sa capacité calorifique à champ magnétique constant: $C(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_B$. Tracer son graphe
5- Montrer l'expression suivante : l'écart type $\sigma(E_{sys}) = \sqrt{var(E_{sys})} = T\sqrt{C k_B}$
6- On désigne par $\vec{M}$ la somme des moments magnétiques des **N** ions. Montrer que l'aimantation moyenne par ion : $m = \frac{1}{N}\|\vec{M}\| = \mu_P \, th(x)$.
7- Tracer l'allure de **m (B)** pour deux isothermes T_1 et $T_2 < T_1$
8- Déduire la loi de Curie : $m(x << 1) = \gamma \frac{B}{T}$ où γ est une constante spécifique du solide considéré.
9- On admet que l'entropie, par ion, s(T): $s = k_B[Ln\, z + \beta < E >]$; z fonction de partition par particule
   - **a-** Vérifier que : $s = k_B \Phi(x)$ où $\Phi(x) = Ln[2\, ch(x)] - x\, th(x)$
   - **b-** Justifier qu'une transformation isentropique correspond à $\frac{B}{T} = cte$
   - **c-** Etudier **s(x)** dans les cas limites $x \to 0$ et $x \to \infty$.

C- Refroidissement magnétique

Nous étudions maintenant le cycle suivant :

- Transformation isotherme à T_1 allant de $B = 0$ à $B = B_1$
- Transformation isentropique allant de $B = B_1$ à $B = B_2 < B_1$
- Transformation isotherme à T_2 allant de $B = B_1$ à $B = 0$

1- Représenter le cycle dans le diagramme **(m, B)**
2- Etablir l'expression du travail W reçu par le système pendant le cycle : $W = -\oint_{cycle} m\, dB$
3- Exprimer la chaleur $Q_f > 0$ reçue par le système depuis la source froide.
4- Déduire l'expression de l'efficacité du cycle en fonction de T_2 et T_1

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

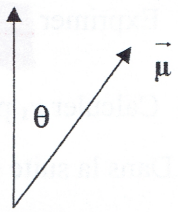
5- On suppose que le solide utiliser dans la désaimantation suit la loi de Curie. Il est soumis à un champ magnétique de $B_i = 20\ mT$ et refroidi à une température $T_i = 350\ mK$ avant d'être isolé thermiquement. Le champ magnétique abaissé jusqu'à une valeur résiduelle de $B_f = 2{,}0\ mT$.

a- Calculer la différentielle **ds** de **s.**

b- Déterminer l'expression de la température T_f à la fin de cette transformation isentropique.

D- Théorie de Langevin

Les ions ou atomes d'une substance paramagnétique sont assimilables à de petits aimants de moment magnétique $\vec{\mu}$. Placé dans un champ magnétique uniforme d'induction $\vec{B_0} = B_0\,\vec{u_z}$, l'énergie d'un ion est, en théorie classique: $\varepsilon = -\vec{\mu}.\vec{B}$.



1- En admettant que les **N** ions paramagnétiques obéissent à la statistique de Maxwell-Boltzmann. Montrer que la fonction de partition : $Z = \iint \exp(-\beta\varepsilon)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ s'écrit sous la forme :

$$Z(a) = 4\pi\frac{sh(a)}{a}$$ où ''a'' un paramètre qu'on le défini

2- Sachant que la probabilité $\frac{dN}{N} = 2\pi\frac{\exp(-\beta\varepsilon)}{Z}\sin\theta\, d\theta$, pour un ion d'avoir son moment magnétique $\vec{\mu}$ formant un angle compris entre θ et $\theta + d\theta$ avec l'axe des z, $\forall\,\varphi$

Montrer que le moment magnétique total $M = \int \mu_z dN$ peut s'écrire sous la forme suivante $M = N\mu\left[\coth a - \frac{1}{a}\right]$;

3- Etudier l'équation de **M(a)** ainsi trouver pour :

a- Les basses températures

b- Les hautes températures, montrer pour ce cas pour une induction suffisamment faible, la substance suit la loi de Curie : $M = \frac{CB_0}{T}$ où C est la constante de curie.

c- Tracer l'allure de la fonction $\frac{M}{\mu N} = f\left(\frac{B_0}{T}\right)$; On donne : $\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \tau(x^4)$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Exercice 3 : *particule dans un puits infini*

Soit une particule de masse **m** piégée dans le potentiel : $V(x) = 0$ si $|x| \leq \ell/2$; $V(x) = \infty$ si $|x| > \ell/2$.

La particule est équilibre avec un thermostat à la température **T**. On admet que ce système se trouve dans une combinaison statistique des états quantiques d'énergie $E_n = n^2 E_1$ où $E_1 = \dfrac{\pi^2 \hbar^2}{2 m \ell^2}$.

1- Exprimer $r_n = \dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ où p_n est la probabilité d'occupation de l'état E_n

2- Calculer r_1 pour $E_1 \approx 10$ eV à T = 289 K. Commentaire.

Dans la suite on prend $E_1 = 2{,}5\ 10^{-12}$ eV (ℓ échelle macroscopique)

3- Calculer les nombre n_1 et n_2 tel que $E_{n1} = k_B T$ et $E_{n2} = 1{,}02\ k_B T$ avec T = 289 K

4- En déduire qu'il est possible de considérer que l'énergie varie continûment quand on étudie le système à température ambiante.

Dans la suite on se placera dans cette condition à toutes températures

5- Exprimer **n(E)** le nombre quantique en fonction de l'énergie **E** de la particule.

6- Le nombre de niveaux d'énergie compris entre **E** et **E + dE** est donné par : **dn = n (E + dE) – n (E).**

$dn = w(E)\, dE$ où w(E) est la densité des niveaux d'énergie. Montrer que : $w(E) = \sqrt{\dfrac{m \ell^2}{2 \pi^2 \hbar^2 E}}$.

7- Soit $dp(E) = A \exp(-\beta E)\, w(E)\, dE$: la probabilité pour qu'une particule ait une énergie comprise entre **E** et **E + dE**. Déterminer la constante **A**.

8- En déduire la valeur $< E >$ et sa variance **Var(E)** en fonction de **T**.

9- En déduire la variation relative $\dfrac{\Delta E}{< E >}$. Commentaire.

On donne : $\int_0^{+\infty} y \sqrt{y}\, e^{-y}\, dy = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}$ $\int_0^{+\infty} \sqrt{y}\, e^{-y}\, dy = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-y}}{\sqrt{y}}\, dy = \sqrt{\pi}$

$k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ m^2\ kg\ s^{-2}\ k^{-1}$ $\Delta E = \sigma(E) = \sqrt{<E^2> - <E>^2}$

à $T = 289\ k$ $k_B T = 25{,}17$ meV

$\hbar = 6{,}582 \cdot 10^{-16}$ eVs

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Exercice 4 : *Calcul de la loi de répartition des vitesses*

On considère un gaz de particules monoatomiques, de masse m, en équilibre thermique dans une enceinte à la température **T.** Ces particules suivent la statistique de Maxwell-Boltzmann. On ne considérera que l'énergie cinétique de translation de ces particules.

$$dN = N\ f(v_x)\, f(v_y)\, f(v_z)\, dv_x\, dv_y\, dv_z$$

où **N** est le nombre de molécules, et **dN** le nombre de molécules, par unité de volume, dont la vitesse $\vec{v}$ a ses composantes comprises entre v_x et $v_x + dv_x$; v_y et $v_y + dv_y$; v_z et $v_z + dv_z$;

1- Quelle est la probabilité $f(v_x)\, dv_x$ pour qu'une particule ait sa composante de vitesse suivant l'axe des x compris entre v_x et $v_x + dv_x$? Représenter graphiquement $f(v_x)$. Quelle est la valeur la plus probable de v_x, soit v_x^*?

2- Définir et calculer la valeur moyenne de v_x, soit $< v_x >$ ainsi que la vitesse quadratique moyenne de cette composante $u_x = [< v_x^2 >]^{1/2}$.

On donne : ; $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$; $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-ax^2)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\, a^{3/2}}$

3- Déduire la constante $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ du gaz monoatomique parfait et d'un gaz parfait diatomique rigide

4- Le nombre dN_v, de particules se trouvant à l'équilibre thermique dans le volume V et ayant ***le module*** de la vitesse est compris entre v et $v + dv$ obéit à la statistique de Maxwell-Boltzmann.

$$dN_v = N\, A \exp(-\beta E_c)\, 4\pi v^2\, dv$$

a- Quelle est l'expression de $F(v)\, dv$ probabilité pour qu'une particule ayant le module de sa vitesse compris entre v et $v + dv$. Représenter graphiquement $F(v)$. Calculer la vitesse la plus probable v^*.

b- Déterminer l'expression de la vitesse moyenne $< v >$; l'expression de la vitesse quadratique moyenne $u = [< v^2 >]^{1/2}$

c- On désigne par dN_ε le nombre de particules dont l'énergie est comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$. Quelle est l'expression de $dN_\varepsilon = f(\varepsilon)$. Représenter graphiquement $f(\varepsilon)$. Calculer l'énergie la plus probable ε^*.

$$\int_0^{+\infty} x^3 \exp(-ax^2)\, dx = \frac{1}{2\, a^2} \quad ; \quad \int_0^{+\infty} x^4 \exp(-ax^2)\, dx = \frac{3}{8\, a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Dr Kchaou borhen **Section MP2–PT2**

EXERCICE N 5: *oscillateur harmonique : Modèle d'Einstein*

A - traitement quantique :

Un oscillateur harmonique à trois dimensions est constitué d'une masse m et d'un ressort de constante de raideur k telle que sa fréquence angulaire d'oscillation classique est égale à ω. Lorsqu'on en fait la description en mécanique quantique d'un tel oscillateur, il sera caractérisé par une série discrète d'états d'énergie $E_{nx,ny,nz}$ donnée par : $E_{nx,ny,nz} = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$

Les nombres quantiques n_x, n_y, n_z qui dénotent ces états peuvent prendre toutes les valeurs suivantes :

0, 1, 2, 3, ...

Un cas particulier d'oscillateur harmonique à trois dimensions peut par exemple être un atome vibrant dans un solide autour de sa position d'équilibre. On suppose qu'un tel oscillateur harmonique est en équilibre avec un réservoir de chaleur à la température T. (T= cste)

1. Déterminer la fonction de partition z_1 d'un seul oscillateur harmonique de fréquence ω, Déduire la fonction de partition Z de cet oscillateur.
2. Calculer l'énergie moyenne de l'oscillateur $\langle E \rangle$.
3. On pose $\theta = \frac{\hbar\omega}{k_B}$ qui a la dimension d'une température :
   a) On suppose que la température T est petite au sens que $T << \theta$. Que peut–on dire sur la valeur de l'énergie moyenne dans ce cas ?
   b) On suppose que la température T est grande au sens que $T >> \theta$. Quelle est alors la valeur limite de l'énergie moyenne ? Comment dépend–elle de T ?
   c) Tracer qualitativement la fonction donnant l'énergie moyenne en fonction T .
4. Déterminer la capacité calorifique à volume constant C_v, donner les valeurs limites de C_v pour $T >> \theta$ et pour $T << \theta$. Tracer qualitativement la fonction $C_v(T)$.

On donne : $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha r^n = \frac{\alpha}{1-r}$ pour $r<1$, $\lim_{x\to 0} \coth x \to 1+\cdots$, $\lim_{x\to\infty} \coth x \to \frac{1}{x}+\cdots$

B - traitement classique :

On considère un oscillateur **harmonique** classique à une dimension en équilibre thermodynamique à la température T. On suppose que cet oscillateur est harmonique et son énergie totale est :

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \; ; \; \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-ax^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$$

Sachant que la probabilité $\mathcal{P}(x,p)\,dp\,dx$ de trouver la quantité de mouvement de l'oscillateur entre p et $p + dp$ et son élongation entre x et $x + dx$ est $P(x,p)\,dx\,dp = \frac{1}{z_1}\exp(-\beta E)\frac{dx\,dp}{h}$

1- Déterminer la fonction de partition z_2.
2- Montrer qu'à haute température z_2 est une bonne approximation de la fonction de partition z_1 de l'oscillateur quantique
3- Calculer la probabilité $\mathcal{P}(x)\,dx$ de trouver l'élongation de l'oscillateur entre x et $x + dx$
4- En déduire les valeurs moyennes $< x >$ et $< x^2 >$
5- Déterminer son énergie moyenne cinétique $<E_c>$ et son énergie moyenne potentielle $<E_p>$ conclusion.

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

EXERCICE N° 5 : *PARAMAGNETISME : LOI DE CURIE*

A- Les ions ou atomes d'une substance paramagnétique sont assimilables à de petits aimants de moment magnétique $\vec{\mu}$. Placé dans un champ magnétique uniforme d'induction $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$, l'énergie d'un ion est, en théorie classique: $\varepsilon = -\vec{\mu}.\vec{B}$.

1- En admettant que les N ions paramagnétiques obéissent à la statistique de Maxwell-Boltzmann.
Montrer que la fonction de partition $Z = \iint \exp(-\beta\varepsilon)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ s'écrit sous la forme :

$$Z(a) = 4\pi\frac{sh(a)}{a} \text{ où } \text{"a"} \text{ un paramètre qu'on le défini}$$

2- Sachant que la probabilité $\frac{dN}{N} = 2\pi\frac{\exp(-\beta\varepsilon)}{Z}\sin\theta\, d\theta$; pour un ion d'avoir son moment magnétique formant un angle compris entre θ et $\theta + d\theta$ avec l'axe des z.
Montrer que le moment magnétique total $M = \int \mu_z dNz$ peut s'écrire sous la forme suivante $M = N\mu\left[\coth a - \frac{1}{a}\right]$; dNz est le nombre d'ions ayant une projection de leur moment sur l'axe Oz comprise entre μz et $\mu z + d\mu z$

3- Etudier l'équation de M ainsi trouver pour :
- a- Les basses températures
- b- Les hautes températures, montrer pour ce cas pour une induction suffisamment faible, la substance suit la loi de Curie : $M = \frac{CB_0}{T}$ où C est la constante de curie.
- c- Tracer l'allure de la fonction $\frac{M}{\mu N} = f(\frac{B_0}{T})$; On donne : $\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \tau(x^5)$

B- THEORIE DE BRILLOUIN.

On se propose maintenant dans cette partie de déterminer l'equation d'état d'un solide paramagnétique, c'est-à-dire la relation entre son moment magnétique total $\vec{M}$ à la température T et l'induction magnétique $\vec{B_0}$ dans laquelle il est plongé. Soit $\vec{J}$ le moment cinétique total d'un ion paramagnétique et J le nombre quantique associe. J peut être entier ou 1/2 enfier. Plongés dans l'induction magnétique uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e_z}$, les ions peuvent occuper (2J + 1) niveaux d'énergie non dégénérés numérotés par l'indice entier m (- J < m < J). L'énergie d'un niveau m s'écrit: $\varepsilon_m = m\, g\, \mu_B\, B_0$ où g est le facteur de Landé de l'ion considéré et μ_B est le magnéton de Bohr. On néglige toute interaction mutuelle entre les ions.

1- Calculer la fonction de partition $Z = \sum_{-J}^{+J} \exp(-my)$ des ions paramagnétiques. (On posera $y = g\beta\mu_B B_0$).

2- Quelle est la probabilité P_m pour qu'un ion soit sur le niveau m? N_m le nombre d'ions, dont l'énergie est égale à ε_m.

3- La projection μ_z du moment magnétique d'un ion dans l'état m vaut $(\mu_z)_m = -\, m\, g\, \mu_B$. Calculer la projection du moment magnétique total $M_z = \sum_m N_m (\mu_z)_m$. En déduire la valeur moyenne $< \mu_z >$ pour un ion.

4- a- Etudier les variations de M_z en fonction de y dans les cas particuliers y tend vers zéro et y tend vers l'infini.

b- Montrer que pour x tend vers zéro (haute température), on retrouve la loi de Curie : $M = \frac{CB_0}{T}$.
Calculer la constante de Curie C.

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés. mahdystudies.tn

Système en contact avec un thermostat T

N_i : nbre de particules situé sur le niveau d'énergie ε_i : $\underline{N_i}$ ε_i

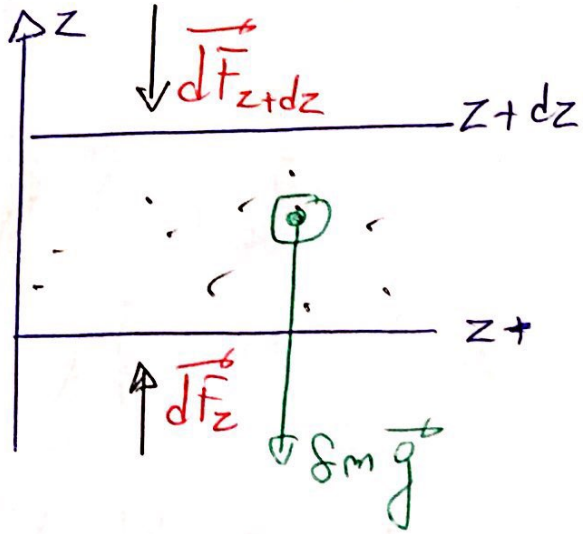
$$\frac{N_i}{N} = P_i = \frac{1}{Z} g_i \exp(-\beta \varepsilon_i)$$

Z = fonction de partition $= \sum g_i \exp(-\beta \varepsilon_i)$

$\beta = \frac{1}{k_B T}$

$\Delta \quad \Delta \quad \Delta \quad \varepsilon_2 \Rightarrow g_2 = 3$

$$PV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow P = \rho \frac{RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{M P}{RT}$$



$$\overrightarrow{dF}_z = P(z)\, dS\, \vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{dF}_{z+dz} = -P(z+dz)\, dS\, \vec{u}_z$$

$$\delta m \vec{g} = \rho (dS\, dz)\, g(-\vec{u}_z)$$

$$\left[-\frac{dP(z)}{dz} dz\right] dS - \rho g\, dS dz = 0$$

20 Avril

9

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\rho g$$

gaz parfait $P = \rho g$ Hydrostatique

$$\frac{dP(z)}{dz} = -g\rho(z) = -\frac{gM}{RT}P(z)$$

$$\frac{dP(z)}{P(z)} = -\frac{Mg\,dz}{RT} \quad (\text{isotherme} : T = T_0)$$

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$$

$M = \mathcal{N}_A \cdot m^*$

$R = \mathcal{N}_A k_B$

b) $P(z) = n(z) \cdot k_B T$

$n = \frac{N}{V}$

$$n(z) = \frac{P(z)}{k_B T} = \frac{P_0}{k_B T} \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$$

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{m^* g z}{k_B T}\right) = A e^{-\beta E_{pp}(z)}$$

$m^* g z$ = énergie potentielle de pesanteur

$k_B T$ = énergie d'agitation thermique

20 Avril

10

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

d) $g(z) = \dfrac{G M_T}{(R_T + z)^2} = \dfrac{G M_T}{R_T^2 \left(1 + \dfrac{z}{R_T}\right)^2}$

$$g(z) = g_0 \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right)$$

e) $\dfrac{dP(z)}{dz} = -\dfrac{M P(z)}{R T_0} g_0 \left(1 - \dfrac{2z}{R_T}\right)$

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP(z)}{P(z)} = \int_0^z -\frac{M g_0}{R T_0} \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right) dz$$

$$\ln \frac{P(z)}{P_0} = \left\{ -\frac{M g_0}{R T_0} \left(z - \frac{z^2}{R_T}\right) \right\}$$

$$P(z) = P_0 \exp\left[-\frac{m g_0}{k_B T} \left(z - \frac{z^2}{R_T}\right)\right]$$

2) Adiabatique : $Q = 0$

G Parfait + réversible : $P V^\gamma = cte$

Adia + réversible : isentropique.

a) $P \cdot \left(\dfrac{nRT}{P}\right)^\gamma = cte \Rightarrow P^{1-\gamma} T^\gamma = cte$

b) $(1-\gamma)\dfrac{dP}{P} + \gamma \dfrac{dT}{T} = 0$

20 Avril (11)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\frac{dP}{P}(\gamma-1) = \gamma\frac{dT}{T}$$

$$\frac{dT(z)}{T(z)} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{dP(z)}{P(z)}$$

9) $$\frac{dT(z)}{T_0} = -\alpha\, dz$$

$$\frac{dT(z)}{T(z)} = -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{\rho g\, dz}{P(z)}$$

$$dT(z) = -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) g\,\frac{\rho(z)\,T(z)}{P(z)}\,dz$$

$$= -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) g\,\frac{M}{R}\,dz$$

$$\frac{M}{R} = \frac{\rho_0 T_0}{P_0}$$

$$\frac{dT(z)}{T_0} = -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{g\rho_0}{P_0}\,dz$$

20 Avril (12)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

d) $\frac{dT(z)}{T_0} = -\alpha dz$

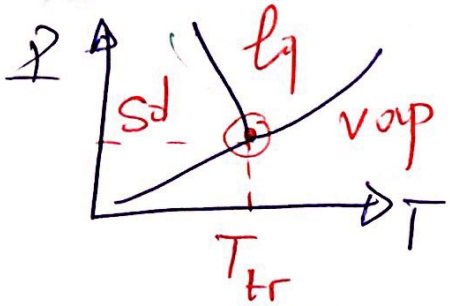
$T(z) = T_0(1 - \alpha z)$ $\quad \alpha = \text{~~1~~}\ m^{-1}$

$\left[\frac{P(z)}{P_0}\right]^{1-\gamma} = \left[\frac{T(z)}{T_0}\right]^{-\gamma}$

$P(z) = P_0 (1 - \alpha z)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

$\rho(z) = \frac{P(z)}{T(z)} \frac{M}{R} = \frac{M P_0}{R T_0} (1 - \alpha z)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

e) $(1 - \alpha z) \geq 0 \quad ; z \leq \frac{1}{\alpha}$;



3) polytropique

$PV^k = cte$

$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H}{T(V_g - V_l)}$

$k = \gamma$; $k = 1$, $k = 0$

adiab isoth isobare.

$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)$

go Aul (13)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\frac{dP(z)}{dz} = -g\rho(z) = -\frac{gMP(z)}{RT(z)}$$

$$\frac{dP(z)}{P(z)} = -\frac{Mg}{R}\,\frac{dz}{T_0\left(1-\frac{\lambda z}{T_0}\right)}$$

$$\int_{P_0}^{P}\frac{dP(z)}{P(z)} = +\frac{Mg}{R\lambda}\,\frac{-\frac{\lambda}{T_0}\,dz}{\left(1-\frac{\lambda z}{T_0}\right)}$$

$$\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = \ln\left(1-\frac{\lambda z}{T_0}\right)^{\frac{T_0}{\lambda}\frac{Mg}{RT}}$$

MP2 : 2013

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Ex 2

$N = N_1 + N_2$

$\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$

N_2 ——— ε_2

N_1 ——— ε_1

1) $P_1 = \frac{N_1}{N} = \frac{1}{Z} e^{-\beta\varepsilon_1} = \frac{e^{-\beta\varepsilon_1}}{e^{-\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta\varepsilon_2}}$

$P_2 = \frac{N_2}{N} = \frac{1}{Z} e^{-\beta\varepsilon_2} = \frac{e^{-\beta\varepsilon_2}}{e^{-\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta\varepsilon_2}}$

$P_1 = \frac{1}{1 + e^{-\beta\varepsilon}} = \frac{N_1}{N}$ $\quad \beta = \frac{1}{k_B T}$

$P_2 = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1 + e^{-\beta\varepsilon}} = 1 - P_1$

2) $\exp(-\beta\varepsilon) = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{\theta}{T}\right)$

$T \ll \theta = \frac{\varepsilon}{k_B} \Rightarrow \exp(-\beta\varepsilon) \to 0$

$P_2 \simeq 0$ et $P_1 = 1 \Rightarrow N_2 \simeq 0$, $N_1 \simeq N$

Ordre le plus probable

Désordre des particules sur le niveau le

20 Avril

15

$T \gg \theta$: $e^{-\beta\varepsilon} \to 1$ $\quad P_1 \simeq P_2 = \frac{1}{2}$; $N_1 \simeq N_2 = N/2$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

3) $U = N\langle E\rangle = N\left(\sum \varepsilon_i P_i\right)$

$$U = N \sum \varepsilon_i \frac{N_i}{N} = \sum \varepsilon_i N_i$$

$$U = \varepsilon_1 N_1 + \varepsilon_2 N_2$$

$$= \frac{N}{1+e^{-\beta\varepsilon}}\left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 e^{-\beta\varepsilon}\right]$$

$(\varepsilon_2 - \varepsilon)$

$$= N\left[\frac{\varepsilon_2(1+e^{-\beta\varepsilon}) - \varepsilon}{(1+e^{-\beta\varepsilon})}\right]$$

$$U = N\left[\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon}{1+e^{\beta\varepsilon}}\right]$$

b) $U = N \sum \varepsilon_i \left(\frac{1}{Z} e^{-\beta\varepsilon_i}\right)$

$$= \frac{N}{Z}\left(\sum \varepsilon_i e^{-\beta\varepsilon_i}\right)$$

$$= \frac{N}{Z}\left(-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sum e^{-\beta\varepsilon_i}\right)\right) = -\frac{N}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}$$

$$= -N\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta}$$

20 Avril

16

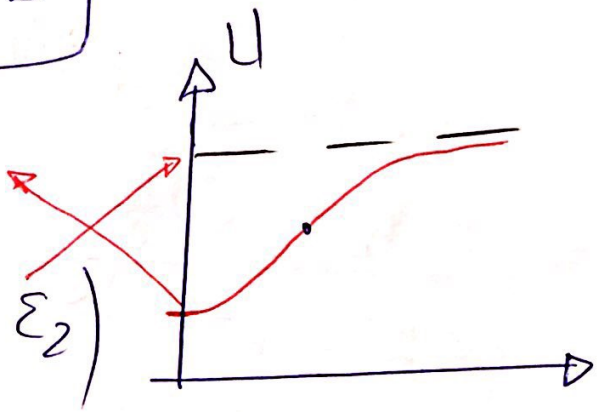
© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$Z = z^N \quad ; \quad \boxed{U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z}$$

$$\boxed{U = N_1 \cdot \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2}$$

c) $U\,(T \ll \theta) \simeq N \varepsilon_1$

$U(T \gg \theta) \simeq \frac{N}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$



4) $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_N \quad ; \quad C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial \beta}{\partial T}\right)_V \quad ; \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial T}\right) = -\frac{1/k_B}{k_B^2 T^2} = -k_B \beta^2$$

$$C_V = -k_B \beta^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)_V$$

20 Avril

17

$$C_V = -k_B \beta^2 \left[N \frac{\partial}{\partial \beta} \left(- \frac{\varepsilon}{1+e^{-\beta\varepsilon}} \right) \right]$$

$$C_V = + N k_B \frac{\beta^2 \varepsilon^2 \, e^{-\beta\varepsilon}}{(1+e^{-\beta\varepsilon})^2} > 0$$

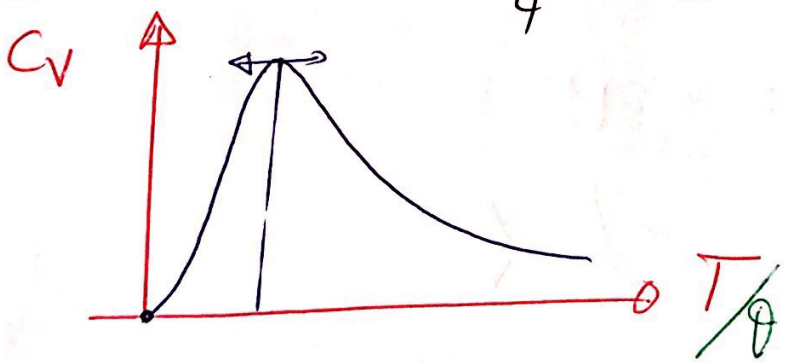
$$= \frac{N k_B (\beta\varepsilon)^2}{\left(e^{\frac{\beta\varepsilon}{2}} + e^{-\frac{\beta\varepsilon}{2}}\right)^2} = \frac{N k_B (\beta\varepsilon)^2}{\left[2 \operatorname{ch}\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)\right]^2}$$

on pose $x = \frac{\beta\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2k_B T} = \frac{\theta}{2T}$

$$C_V(T) = N k_B \left(\frac{\theta}{2T}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\theta}{2T}\right)}$$

$T \ll \theta$, $C_V \simeq N k_B \left(\frac{\theta}{T}\right)^2 \exp\left(-\frac{\theta}{T}\right) \to 0$

$T \gg \theta$ $\quad C_V \simeq \frac{N k_B}{4} \left(\frac{\theta}{T}\right)^2 \to 0$

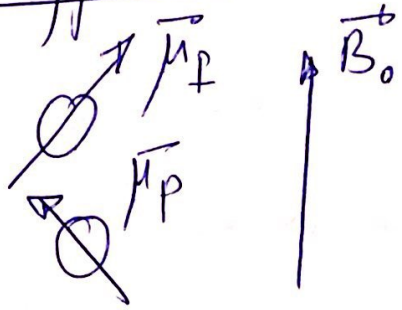


$x = \frac{T}{\theta} = 2{,}35$

Analyse numérique

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

B) Applicat° :



$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$$

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mu}_f \wedge \vec{B}_0$$

$$\Gamma = \mu_f \cdot B_0 \sin\theta$$

à l'équilibre

$\theta = 0$ ↑↑ Stable

$\theta = \pi$ ↑↓ instable

$$W_{dipôle} = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_{ext} = -\mu_f \cdot B \cos\theta$$

$$W_1(\theta=0) = -\mu_I B = \varepsilon_1 = -\varepsilon$$

$$W_2(\theta=\pi) = +\mu_I B = \varepsilon_2 = +\varepsilon$$

1)

$$\frac{N_1}{N} = \frac{e^{+\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon}+e^{-\beta\varepsilon}} \quad ; \quad \frac{N_2}{N} = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon}+e^{-\beta\varepsilon}}$$

$$\frac{N_1}{N} = \frac{e^{x}}{2\,ch(x)} \qquad \frac{N_2}{N} = \frac{e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

$$x = \beta\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k_B T} = \frac{\theta}{T}$$

20 Avril (19)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

2) $x \to 0$; $e^{x} \to 1$, $e^{-x} \to 1$

$\frac{N_1}{N} \simeq \frac{N_2}{N} = \frac{1}{2}$; $x \ll 1$; $\varepsilon \ll k_B T$

$\mu_p B \ll k_B T$

$x \to \infty$; $\frac{N_1}{N} \simeq 1$ $\frac{N_2}{N} \simeq 0$ (e^{-x})

Lo $\mu_p B \gg k_B T$ $\vec{\mu_p} \uparrow\uparrow \vec{B}$

3) $\langle E \rangle = \sum \varepsilon_i P_i = \varepsilon_1 P_1 + \varepsilon_2 P_2$

$= -\varepsilon (P_1 - P_2) = -\varepsilon th(x) = \langle E \rangle$

$\langle E^2 \rangle = \sum \varepsilon_i^2 P_i = \varepsilon^2 (P_1 + P_2) = \varepsilon^2$

$(\Delta E)^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$

$= \varepsilon^2 (1 - th^2(x)) = \frac{\varepsilon^2}{ch^2(x)}$

4) $C(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_B = -k_B \beta^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)$

$U = N \langle E \rangle = -N \varepsilon th(\beta \varepsilon)$

$C(x) = N k_B \frac{x^2}{ch^2(x)}$

20 Avril

20

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Théorie cinétique du gaz parfait

$$E_c = \frac{1}{2} m \left[v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right]$$

$$\frac{d^3N}{N} = A \exp(-\beta E_c)\, dv_x\, dv_y\, dv_z$$

$$\iiint \frac{d^3N}{N} = A \iiint \exp\left[-\frac{\beta m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\right] dv_x\, dv_y\, dv_z$$

$$= A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\beta m v_x^2}{2}\right) dv_x \right)^3 = 1$$

$$\Rightarrow A \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\beta m}} \right)^3 = 1$$

$$A = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2}$$

$$\frac{d^3N}{N} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2k_B T}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\right] dv_x dv_y dv_z$$

1 $\left[v_x, v_x + dv_x \right]$, $\forall v_y$; $\forall v_z$

$$\int \exp\left(-\frac{m v_y^2}{2k_B T}\right) dv_y = \left(\frac{2\pi k_B T}{m} \right)^{1/2}$$

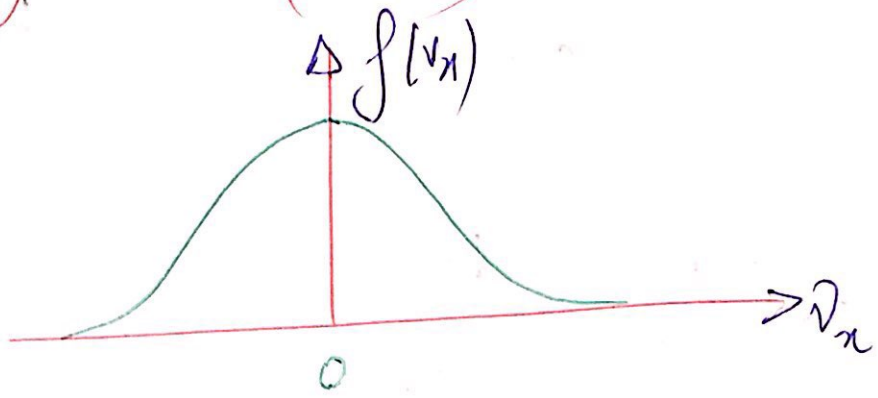
28 Avril

(1)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\frac{d^3N}{dN} = \frac{dN_{v_x}}{N} = \left[\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-m v_x^2}{2k_B T}\right)\right] dv_x$$

$$f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-m v_x^2}{2k_B T}\right)$$



$$\frac{df(v_x)}{dv_x} = 0 \Rightarrow v_x^* = 0.$$

2) $$\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x f(v_x)\, dv_x = 0$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \int v_x^2 f(v_x)\, dv_x \longleftrightarrow \sum \varepsilon_i^2 p_i$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \exp\left(\frac{-m v_x^2}{2k_B T}\right) dv_x$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}$$

28 Avril (2)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\left\langle \frac{m v_x^2}{2} \right\rangle = \frac{k_B T}{2}$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \text{isotrope}$$

$$\langle E_c \rangle = \left[\frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle \right] \times 3 = \frac{3}{2} k_B T$$

$$U = N \langle E_c \rangle = \frac{3}{2} N k_B T$$

si $N = N_A$; $U = \frac{3}{2} RT$

$$C_V = \frac{3}{2} R \quad , \quad C_p = C_V + R \text{ (Mayer)}$$

$$C_p = \frac{5}{2} R$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3}$$

* gaz diatomique

$$3 \times \left(\frac{1}{2} k_B T\right) + 2 \times \left(\frac{1}{2} k_B T\right) + 2 \times \left(\frac{1}{2} k_B T\right)$$

translation — rotation — vibration

* $\langle E_{pe} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} K x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} k_B T$

$\langle E_{pp} \rangle = \langle m g z \rangle \neq \frac{1}{2} k_B T$

28 Avril

(3)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\langle E_{c\,rotat}\rangle = \left\langle \frac{1}{2} J\omega^2 \right\rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

Gaz rigide : $\langle E_{vibrat}\rangle = 0$

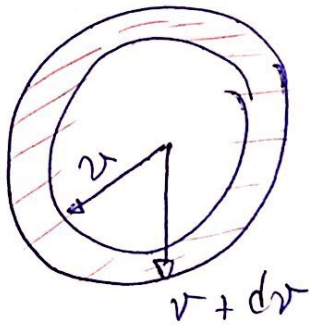
$$U = \frac{5}{2} RT \Rightarrow C_V = \frac{5}{2} R$$

$$C_p = \frac{7}{2} R$$

$$\boxed{\gamma = \frac{7}{5}}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{d + 2}{d}}$$

4) $\dfrac{dN}{N} = A\, e^{-\beta E} \cdot 4\pi v^2 dv$



$$A \int_0^{\infty} 4\pi v^2 e^{-\left(\frac{\beta m v^2}{2}\right)} dv$$

$$4\pi A \int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{m v^2}{2 k_B T}} dv = 1$$

$$4A\pi \frac{\sqrt{\pi}}{4\left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{3/2}} = 1$$

28 Avril

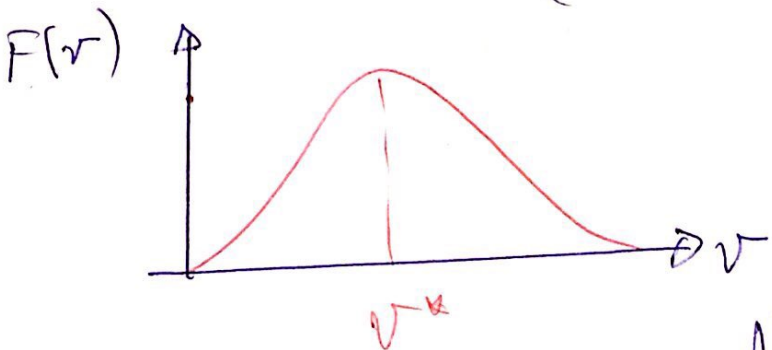
(4)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$A = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}$$

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(\frac{-m v^2}{2 k_B T}\right) dv$$

a) $$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{\frac{-m v^2}{2 k_B T}}$$



$$\frac{dF(v)}{dv} = 0$$

$$v^* = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}}$$

b) $$\langle v \rangle = \int v F(v)\, dv$$

$$= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{\frac{-m v^2}{2 k_B T}} dv$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}}$$

28 Avril

5

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 F(v)\, dv = 3 \frac{k_B T}{m}$$

$$\left\langle \frac{m v^2}{2} \right\rangle = 3 \frac{k_B T}{2}$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2$$

c) Σ et $\Sigma + d\Sigma$; $\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2$

$$v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}}$$

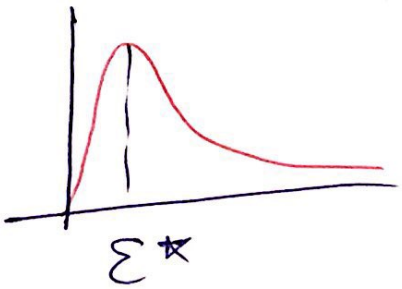
$$\frac{dN_v}{N} = F(v)\, dv$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} 4\pi \left(\frac{2\mathcal{E}}{m}\right) e^{-\beta\mathcal{E}} \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{2} \frac{d\mathcal{E}}{\sqrt{\mathcal{E}}}$$

$$= (\text{////}) \left(\sqrt{\mathcal{E}}\, d\mathcal{E}\, e^{-\beta\mathcal{E}}\right)$$

$$\frac{d}{d\mathcal{E}} \left(\sqrt{\mathcal{E}}\, e^{-\beta\mathcal{E}}\right) = 0$$

$$\mathcal{E}^* = \frac{k_B T}{2}$$



E8 Anif

6

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

EX5

$E = \hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2}\right)$ à 1 dim

* $E = \hbar\omega\left[n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right]$ à 3 dims.

1) $Z_1 = \sum_{n_x n_y n_z} e^{-\beta\hbar\omega\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right)}$

$= \left(\sum_{n_x} e^{-\beta\hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2}\right)}\right)^3$

$Z_1 = (Z_x)^3$

$\rightarrow Z_x = e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}\left(\sum_0^\infty e^{-\beta\hbar\omega n_x}\right)$

$= \frac{e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2\,sh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}$

on pose $\frac{\beta\hbar\omega}{2} = \frac{\hbar\omega}{2k_BT} = \frac{\theta}{2T}$

$Z_1 = \frac{1}{\left[2\,sh\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)\right]^3}$; $Z = Z_1^N$

$= (Z_x)^{3N}$

7

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -3N \frac{\partial \ln Z_x}{\partial \beta}$$

$$U = +3N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln\left(2 \sinh \beta \frac{\hbar\omega}{2}\right)$$

$$U = 3N \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\ln 2 + \ln \sinh\left(\beta \frac{\hbar\omega}{2}\right)\right]$$

$$U = 3N \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\beta \frac{\hbar\omega}{2}\right)$$

* $T \ll \theta = \frac{\hbar\omega}{k_B} \Rightarrow k_B T \ll \hbar\omega$

$$\beta \hbar\omega \gg 1 \Rightarrow U \simeq \frac{3N\hbar\omega}{2}$$

. $T \gg \theta$, $\beta\hbar\omega \ll 1$

$$U \simeq \frac{3N\hbar\omega}{2} \frac{1}{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} = 3N k_B T$$

$$C_V(T \gg \theta) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 3N k_B \quad \text{28 Avril}$$

(8)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Si $N = \mathcal{N}_A$ $\quad C_V(T \gg \theta) \simeq 3R$

la loi de Dulong et Petit

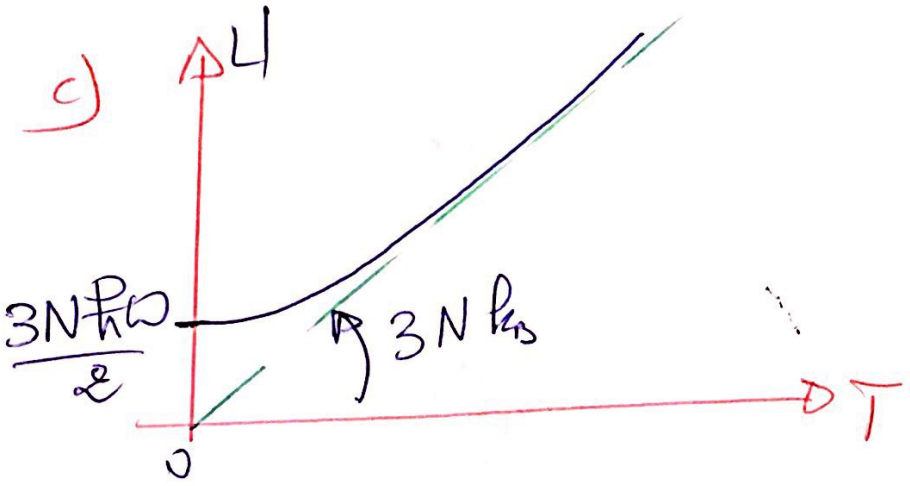
I. et II

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = E\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\psi = E\psi(x)$$

---

c)



4) $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = -k_B\beta^2\left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)$

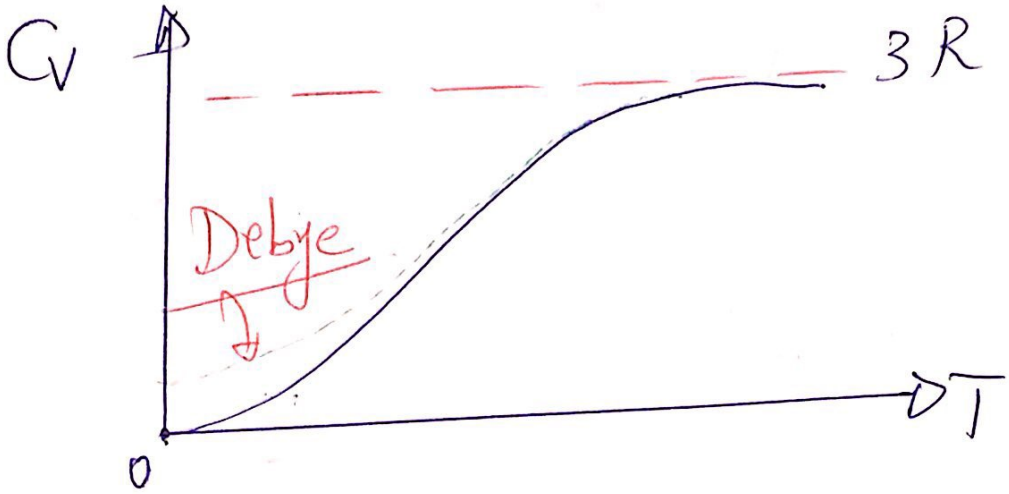
$= -k_B\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{3N\hbar\omega}{2}\coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\right)$ 28 Avril 9

$= +\frac{3N\hbar\omega}{2}k_B\beta^2\frac{\hbar\omega}{2}\frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$(\coth x)' = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$



$$C_V \simeq \frac{1}{T^3} \quad \text{Debye}$$

$$C_V(T \ll \theta) \simeq 3Nk_B(\beta\hbar\omega)^2 \exp(-\beta\hbar\omega)$$

$$= 3Nk_B\left(\frac{\hbar\omega}{T^2}\right)^2 \exp\left(\frac{-\hbar\omega}{k_B T}\right)$$

28 Avril

10

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

B) Classique

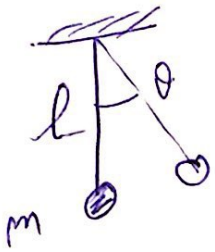
$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}(m\omega^2)x^2$; $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

↓ énergie de trasl°

↳ énergie élastique



$\ddot{x} + \left(\frac{K}{m}\right)x = 0$



$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l}\right)\theta = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ pendule pesante

$[x, x+dx]$; $[p_x, p_x + dp_x]$

$\rho(x, p_x)\, dx\, dp_x = \frac{1}{Z_2} \exp\left[-\beta(E_c + E_p)\right] \frac{dx\, dp_x}{h}$

$Z_2 = \iint \exp -\beta\left[E_p + E_c\right] \frac{dx\, dp_x}{h}$

$= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\beta m\omega^2 x^2}{2}\right) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\beta \frac{p^2}{2m}\right) dp$

$= \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\pi 2}{\beta m\omega^2}} \sqrt{\frac{2\pi . m}{\beta}}$

2S Ainf (11)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$Z_2 = \frac{1}{h}\frac{2\pi}{\omega} k_B T = \frac{k_B T}{\hbar\omega}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

2) $$Z_x = \frac{1}{2\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)} \simeq \frac{1}{2\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}$$

Hautes température $\beta\hbar\omega \ll 1$

$k_B T \gg \varepsilon$

$$Z_x = \frac{k_B T}{\hbar\omega} \simeq Z_2$$

3) $$P(x)\,dx = \frac{1}{Z_2 h}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\,dp\right) e^{-\frac{\beta m\omega^2 x^2}{2}}\,dx$$

$$= \frac{\hbar\omega}{h 2\pi k_B T}\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}\, e^{-ax^2}\,dx$$

$$= \omega\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}\exp\left(-\frac{m\omega^2 x^2}{2k_B T}\right)dx$$

28 Avril

(12)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, P(x)\, dx = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \omega \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{\left(\frac{-m\omega^2 x^2}{2 k_B T}\right)} dx$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m\omega^2}$$

$$\left\langle \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

5) $$\langle E_c \rangle = \frac{\int E_c\, e^{-\beta E_c}\, dp_x}{\int e^{-\beta E_c}\, dp_x}$$

$$\langle E_p \rangle = \frac{\int E_p\, e^{-\beta E_p}\, dx}{\int e^{-\beta E_p}\, dx}$$

$$\langle E_p \rangle = \frac{-d}{d\beta}\left(\ln\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta E_p}\, dx\right)\right)$$ 28 Avril 13

$$= -\frac{d}{d\beta} \ln\left[\int e^{-\left(\frac{\beta m\omega^2 x^2}{2}\right)} dx\right]$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\langle E_p \rangle = -\frac{d}{d\beta} \ln\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\beta m\omega^2}}^{1}\right)$$

$$= -\frac{d}{d\beta}\left[\ln\sqrt{\frac{2\pi}{m\omega^2}}^{1} - \ln\sqrt{\beta}^{1}\right]$$

$$= +\frac{1}{2\beta} = \frac{k_B T}{2}$$

$$\langle E_c \rangle = -\frac{d}{d\beta} \ln\sqrt{\frac{2Km}{\beta}}^{1}$$

$$= \frac{k_B T}{2}$$

$$\boxed{\langle E \rangle = k_B T}$$

28 avril

14

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$\vec{M}$

$\vec{J}$ = moment d'inertie $\qquad \vec{B} = B_0 \vec{u_z}$

$$\boxed{\mathcal{E}_m = m\, g\, \mu_B B_0} \qquad m \in [-J ; J]$$

1) $Z = \sum_m e^{-\beta \mathcal{E}_m} = \sum e^{-(\beta g \mu_B B_0) m}$

on pose $y = (g \mu_B B_0 \beta)$

$$Z = \sum_{-J} e^{-my}$$

$$Z = e^{+Jy} + e^{(J-1)y} + e^{(J-2)y} + \dots e^{-2Jy}$$

$$Z = e^{Jy}\left[1 + e^{-y} + \dots e^{-2Jy}\right]$$

$$= e^{Jy} \frac{\left[1 - e^{-(2J+1)y}\right]}{1 - e^{-y}}$$

$$Z = e^{Jy} \frac{\left[e^{(J+\frac{1}{2})y} - e^{(J+\frac{1}{2})y}\right] e^{-(J+\frac{1}{2})y}}{\left(e^{y/2} - e^{-y/2}\right) e^{-y/2}}$$

28 Avril

(15)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$Z = \frac{\sinh\left(J+\frac{1}{2}\right)y}{\sinh\left(\frac{y}{2}\right)}$$

2) $P_m = \frac{N_m}{N} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \mathcal{E}_m)$

3) $\mu_z = -m g \mu_B$

$M_z = \sum N_m \mu_z$

$= \sum (-m g \mu_B) \frac{N}{Z} e^{-\beta \mathcal{E}_m}$

$= \frac{N}{Z} \sum_{-J}^{J} (-g m \mu_B) e^{-(\beta g \mu_B B) m}$

$= -\frac{g \mu_B N}{Z} \left(\sum_{-J}^{J} m e^{-my} \right)$

$= +\frac{g \mu_B N}{Z} \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum e^{-my} \right)$

$= \frac{g N \mu_B}{Z} \frac{\partial Z}{\partial y} = g N \mu_B \frac{\partial \ln Z}{\partial y}$

29 Avril

(16)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$M = g N \mu_B \frac{2}{\partial y}\left[\ln sh\left(J+\frac{1}{2}\right)y - \ln sh\left(\frac{y}{2}\right)\right]$$

$$M = N g \mu_B \left[\left(J+\frac{1}{2}\right)\coth\left[\left(J+\frac{1}{2}\right)y\right] - \frac{1}{2}\coth\left(\frac{y}{2}\right)\right]$$

4) a) $y \to \infty$

$$M = N g \mu_B \left[\left(J+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right]$$

$$M = N(g \mu_B J) = N\mu$$

$y \to 0$; $\coth\left(\frac{y}{2}\right) \simeq \frac{2}{y} + \frac{y}{3\times 2}$

$$\coth\left[\left(J+\frac{1}{2}\right)y\right] = \frac{1}{\left(J+\frac{1}{2}\right)y} + \frac{1}{3}\left(J+\frac{1}{2}\right)y$$

$$M = N g \mu_B \left[\left(J+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{1}{\left(J+\frac{1}{2}\right)y} + \left(J+\frac{1}{2}\right)\frac{y}{3}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{y} + \frac{y}{3\times 2}\right\}\right]$$

$$= N g \mu_B \left[\left(J+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right]\left(\frac{y}{3}\right)$$

28 Avril (17)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\left(J+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = J^2 + J$$

$$M = \frac{N g \mu_B J(J+1)}{3} y \quad ; \quad y = \frac{g \mu_B B}{k_B T}$$

$$M = \left(\frac{N g^2 \mu_B^2 J(J+1)}{3 k_B} \right) \frac{B}{T}$$

$$M = C \frac{B}{T}$$

28 Avril

18

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Suite Ex2

N_2 $+\varepsilon$

N_1 $-\varepsilon$

$$\frac{N_1}{N} = \frac{e^x}{2\operatorname{ch} x}, \quad \frac{N_2}{N} = \frac{e^{-x}}{2\operatorname{ch}(x)}$$

$x \to 0$: $x = \frac{\mu B}{k_B T} \ll 1 \Rightarrow \mu B \ll k_B T$

$N_1 = N_2 = \frac{N}{2}$

$x \to \infty$; $\mu B \gg k_B T$, $N_1 \simeq N$, $N_2 \simeq 0$

3) $\langle E \rangle = \sum \varepsilon_i P_i = \varepsilon_1 P_1 + P_2 \varepsilon_2$

$= -\varepsilon P_1 + \varepsilon_2 P_2 = -\varepsilon \left[P_1 - P_2 \right]$

$$\langle E \rangle = \frac{-\varepsilon}{2\operatorname{ch} x} \left(e^x - e^{-x} \right) = -\varepsilon \operatorname{th} x$$

$$U = N \langle E \rangle = -N\varepsilon \operatorname{th}(x)$$

$$\langle E^2 \rangle = \sum \varepsilon_i^2 P_i = \varepsilon^2 (P_1 + P_2) = \varepsilon^2$$

$$(\Delta E)^2 = \operatorname{var}(E) = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$$

$$(\Delta E)^2 = \varepsilon^2 \left(1 - \operatorname{th}^2(x) \right) = \frac{\varepsilon^2}{\operatorname{ch}^2 x}$$

4) $C = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_B = \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)_B \left(\frac{\partial \beta}{\partial T} \right)$

26 Avril

1

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

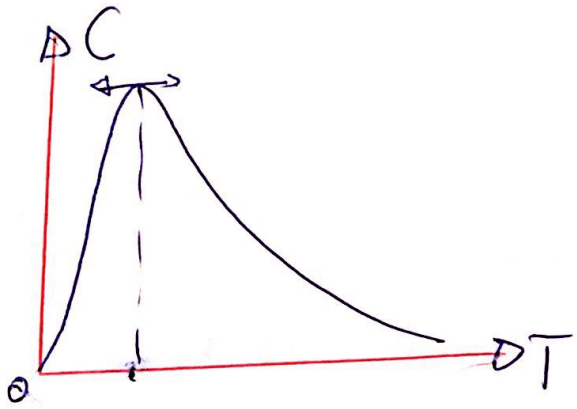
$$\beta = \frac{1}{k_B T} \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial T} = -\frac{k_B}{k_B^2 T^2} = -\beta^2 k_B$$

$$U = -N\varepsilon \operatorname{th}(\beta\varepsilon)$$

$$C(\beta) = -k_B \beta^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)_B = +\frac{N k_B \beta^2 \varepsilon^2}{\operatorname{ch}^2(\beta\varepsilon)}$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$C(x) = \frac{N k_B x^2}{\operatorname{ch}^2(x)}$$



$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial T^2}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right) = 0$$

5) $\sigma(E_{système}) = T\sqrt{C k_B}$

$$Var(E_{système}) = N\, var(E)$$

$$(\Delta E)^2_{syst} = N (\Delta E)^2$$

$$= N \frac{\varepsilon^2}{\operatorname{ch}^2(\beta\varepsilon)}$$

26 Avr

(2)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$C(x) = \frac{N k_B \beta^2 \varepsilon^2}{ch^2(x)}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$C(x) = \frac{N k_B \varepsilon^2}{k_B^2 T^2} \frac{1}{ch^2 x}$$

$$k_B C(x) T^2 = \frac{N \varepsilon^2}{ch^2(\beta\varepsilon)} = (\Delta E)^2_{syste}$$

$$\boxed{T \sqrt{k_B C(x)} = \sigma_{système}} = \sqrt{Var(E_{syste})}$$

6) $\vec{M} = N \langle \vec{\mu}_I \rangle$

$\langle \vec{\mu}_I \rangle = \mu_I \vec{u}_z P_1 - \mu_I \vec{u}_z P_2 = \sum \vec{\mu}_i P_i$

$\langle E \rangle = \sum \varepsilon_i P_i$

$\langle \mu_I \rangle = \mu_I (P_1 - P_2)$

$= \mu_I \frac{(e^x - e^{-x})}{2 ch(x)} = \mu_I \cdot th(x)$

$x = \frac{\mu_I B}{k_B T}$, $m = \frac{\langle \| \vec{\mu}_I \| \rangle}{\mu_I}$

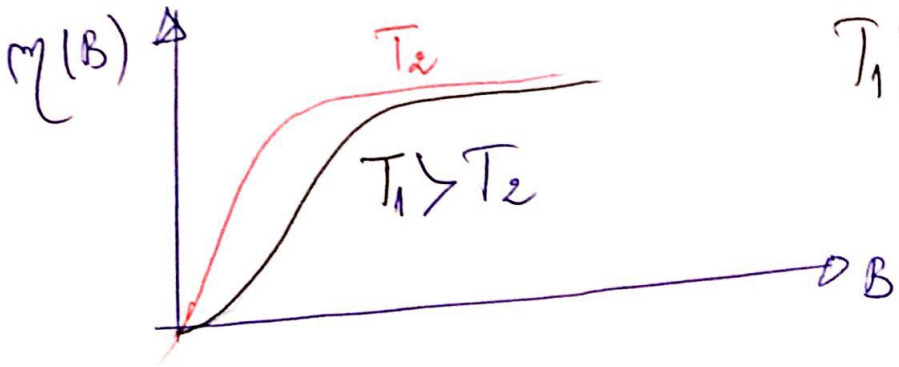
$m = th\, x$

26 Avril

3

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

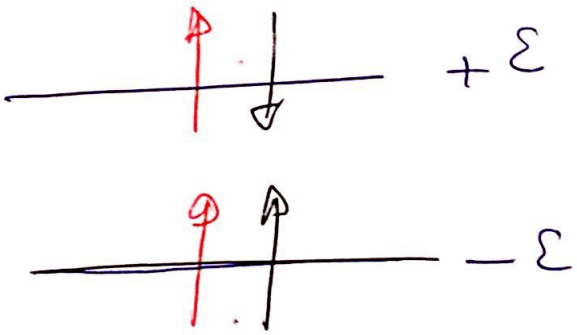
f) $m(B) = \mu_I \, th\left(\frac{\mu_I B}{k_B T}\right)$

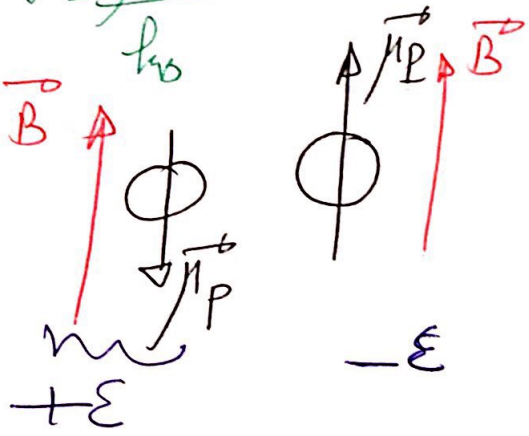


g) $x \ll 1$ $\quad m(B) \overset{??}{\simeq} \frac{\gamma B}{T}$

$\mu_I B \ll k_B T \Rightarrow th\left(\frac{\mu_I B}{k_B T}\right) \simeq \frac{\mu_I B}{k_B T}$

$m(B) = \frac{\mu_I^2 B}{k_B T}$, $\gamma = \frac{\mu_I^2}{k_B}$





g) $S = k_B \left[\ln z + \beta \langle E \rangle \right]$

$S = k_B \left[\ln\left(2 ch(x)\right) - \beta \varepsilon \, th(x) \right]$

26 Avril

4

$z = \sum g_i \cdot e^{-\beta \varepsilon_i} \Rightarrow z = e^{-\beta \varepsilon_1} + e^{-\beta \varepsilon_2} = 2 ch(x)$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$S = k_B \left[\ln(2 \operatorname{ch} x) - x \operatorname{th} x \right]$$

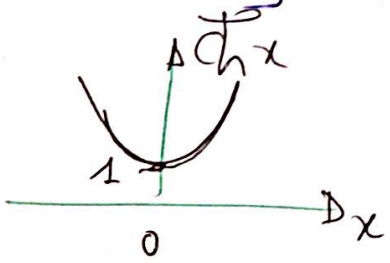
b) isentropique : $S = cte \Rightarrow x = cte$

$$x = \frac{\mu_B B}{k_B T} \Rightarrow \frac{B}{T} = cte.$$

$B \nearrow$; $T \nearrow$; $\left(\frac{1}{T}\right) \searrow$

c) $S(x \to \infty) = k_B \left[\ln 2 - x^2 \right] \simeq k_B \ln 2$

$\lim_{x \to 0} \ln \operatorname{ch} x \simeq 1$



$\operatorname{sh} x \simeq x$



$x \to \infty$; $k_B T \ll \mu B$

$$S \simeq k_B \left[\ln \left[\frac{2 e^x}{2} \right] - x \right] = 0$$

$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x \simeq 1$ ($x \to +\infty$)

S = elle mesure le désordre

S = " le manque d'information

26 Avril

(5)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

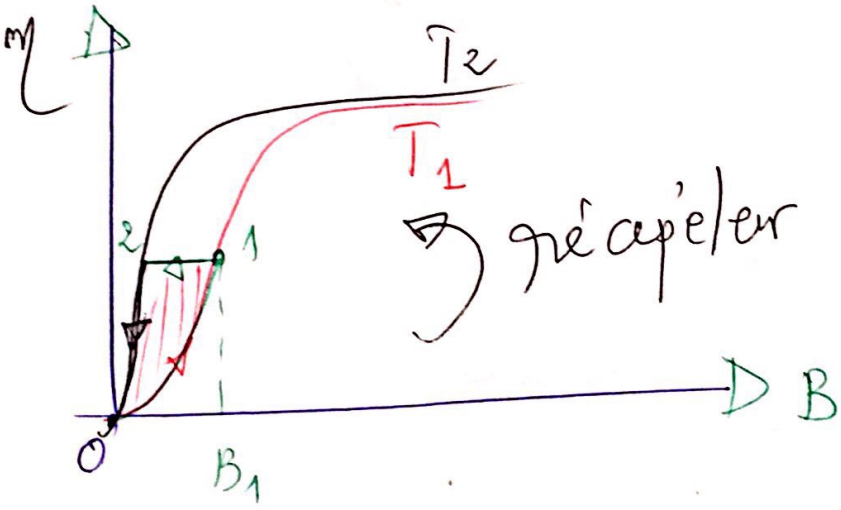
$T \to 0K$; $S \to 0$ J/K

principe de Nernst

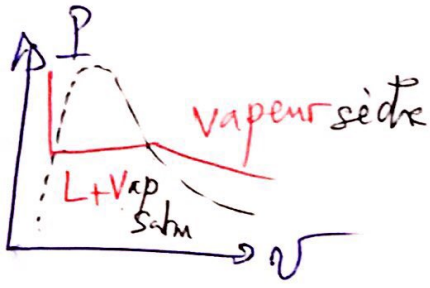
3ème principe de la thé

c) $N_2 = 0$ $-180°C$

$He \Rightarrow$ 4 K



récapitulatif



$\Delta H = m L_{vap}$

isentropique $s = cte \Rightarrow x = cte$;

$\Rightarrow m = \mu_f \, th(x) = cte$

$$W_{cycle} = -\oint m \, dB \neq 0$$

$\Delta U_{cycle} = 0$, $\Delta S = 0$, $\Delta H = 0$,

26 Avril

6

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$W = -\int_0^1 m\,dB - \int_1^2 m\,dB - \int_2^0 m\,dB$$

$$* \int_0^1 m\,dB = \mu_B \int_0^{B_1} \text{th}\left(\frac{\mu_B B}{k_B T_1}\right) dB$$

$$= k_B T_1 \ln\left(\text{ch}\left(\frac{\mu_B B_1}{k_B T_1}\right)\right)$$

$$* \int_2^0 = -k_B T_2 \ln \text{ch}\left(\frac{\mu_B B_2}{k_B T_2}\right)$$

$$* \int_1^2 m\,dB = m\,(B_2 - B_1)$$

$$= \mu_B \left[B_2 \text{th}(x_2) - B_1 \text{th}(x_1)\right]$$

3) $S_F = \frac{Q_F}{T_F} \Rightarrow Q_F = T_2 S(x_2)$

4) $e = \frac{Q_F}{W}$

26 Avril

7

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

5) $(B_i \;\; T_i) \longrightarrow (B_f \;; T_f)$

$x \to 0$; $\quad S(x) \simeq k_B \left[\ln 2 - x^2\right]$

$$x = \frac{\gamma B}{T} = \frac{\mu_I^2 B}{k_B T}$$

$$S(x) \simeq k_B \ln 2 - k_B \left(\frac{\mu_I B}{k_B T}\right)^2$$

$$S(x) = k_B \ln 2 - \frac{\gamma B^2}{T^2}$$

$u_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_0}$ J/m³

$$dS = + \frac{2\gamma B^2}{T^3} dT - \frac{2\gamma B}{T^2} dB$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B dT + \left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T dB$$

isolé thermiquement $\Rightarrow$ $S = cte \Rightarrow dS = 0$

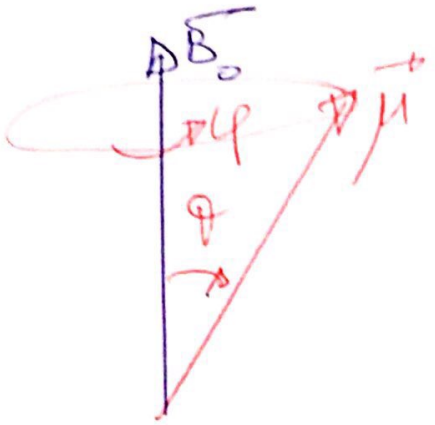
$$\int_{B_i}^{B_f} \frac{dB}{B} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} \Rightarrow T_f = T_i \frac{B_f}{B_i}$$

26/Avril

8

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

1) Théorie de Langevin



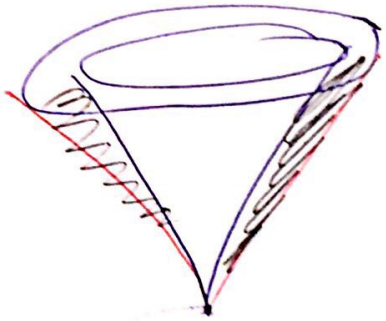
$$\frac{dN}{N} = dP = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{E}} \, d\Omega$$

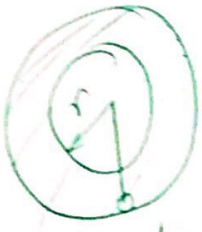
$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$dP = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \mathcal{E}) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$dP = \int d^2P = \frac{dN}{N} = \frac{2\pi}{Z} e^{-\beta \mathcal{E}} \sin\theta \, d\theta$$

entre $[\theta$ et $\theta + d\theta]$



* 

$$d^3\tau = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$d\tau = 4\pi r^2 dr$$

$$\int \frac{dN}{N} = \frac{N}{N} = 1 = \frac{2\pi}{Z} \int_0^{\pi} e^{-\beta \mathcal{E}} \sin\theta \, d\theta$$

$$Z = 2\pi \int_0^{\pi} e^{-\beta \mathcal{E}} \sin\theta \, d\theta$$

* $\mathcal{E} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B_0} = -\mu B_0 \cos\theta$

Avril

(9)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$Z = 2\pi \int e^{+\mu B_0 \beta \cos\theta} \sin\theta \, d\theta$$

on pose : $\frac{\mu B_0}{k_B T} = a$

$$Z = 2\pi \int_0^{\pi} e^{(a\cos\theta)} \sin\theta \, d\theta \quad , \quad x = \cos\theta$$

$$dx = -\sin\theta \, d\theta$$

$$= 2\pi \left(\int_{-1}^{1} e^{ax} \, dx \right)$$

θ	0	π
x	1	-1

$$= 2\pi \left[\frac{e^{ax}}{a} \right]_{-1}^{1}$$

$$Z = \frac{4\pi \sinh(a)}{(a)} \quad ; \quad a = \frac{\mu B}{k_B T}$$

2) $M = \int \mu_z \, dN = \int (\mu \cos\theta) \, dN$

$$= \int_0^{\pi} (\mu \cos\theta) \frac{2\pi N}{Z} e^{-\beta \varepsilon} \sin\theta \, d\theta$$

26 Avril

10

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$M = \frac{2\pi N\mu}{z} \int_0^{\pi} \cos\theta \; e^{a\cos\theta} \left(\sin\theta \, d\theta\right)$$

$$M = \frac{2\pi N\mu}{z} \left(\int_{-1}^{1} x \; e^{ax} \, dx \right)$$

$$M = \frac{2\pi N\mu}{2\pi} \; \frac{\int_{-1}^{1} x \, e^{ax} \, dx}{\int_{-1}^{1} e^{ax} \, dx}$$

$$M = N\mu \; \frac{d}{da}\left[\ln \left(\int_{-1}^{1} e^{ax} \, dx \right) \right]$$

$$= N\mu \; \frac{d}{da}\left[\ln \left(\frac{2\,\mathrm{sh}\,a}{a} \right) \right]$$

$$= N\mu \; \frac{d}{da}\left[\ln 2 + \ln(\mathrm{sh}\,a) - \ln a \right]$$

$$= N\mu \left[\coth a - \frac{1}{a} \right]$$

$$M = N\mu \, \mathcal{L}(a)$$

$$\mathcal{L}(a) = \left[\coth(a) - \left(\frac{1}{a}\right) \right]$$

26 Avril (11)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

3) $k_B T \ll \mu B_0$, $a = \frac{\mu B_0}{k_B T} \gg 1$

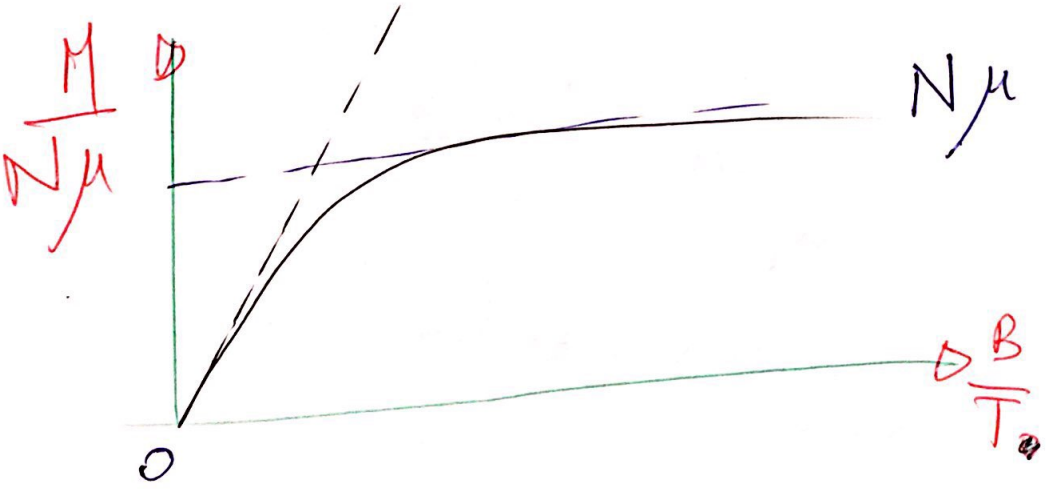
$\lim_{a \to \infty} \coth a = 1 = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}}$

$M = N\mu = M_{sat}$

b) $k_B T \gg \mu B_0$, $a \ll 1$

$M \simeq N\mu \left[\frac{1}{a} + \frac{a}{3} - \frac{1}{a} \right]$

$M = \frac{N\mu}{3} a = \left(\frac{N\mu^2}{3 k_B} \right) \frac{B}{T} = \frac{C B}{T}$



26 Avril

12

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$S = k_B \ln \Omega$$

Ω = le nbs de combinaisons de N_1 parmi N

$$\Omega = C_N^{N_1} = \frac{N!}{N!(N-N_1)!} = \frac{N!}{N_1! N_2!}$$

$$S = k_B \left[\ln N! - \ln N_1! - \ln N_2! \right]$$

$N \gg 1$ $\quad N_1 \gg 1$ $\quad N_2 \gg 1$

$$S \simeq k_B \left[N \ln N - N - (N_1 \ln N_1 - N_1) - (N_2 \ln N_2 - N_2) \right]$$

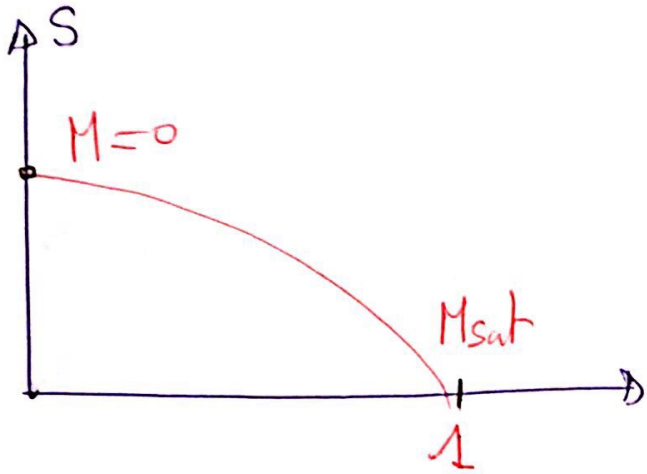
$$S = k_B \left[N \ln N - N_1 \ln N_1 - N_2 \ln N_2 \right]$$

$$\begin{cases} M = N_1 \mu - N_2 \mu & (1) \\ N = N_1 + N_2 & (2) \end{cases}$$

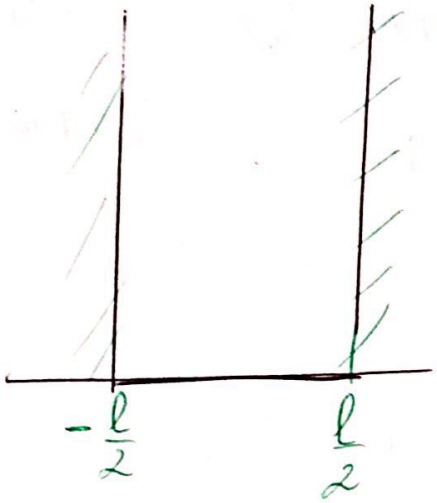
(1) + (2) μ $\Rightarrow$ $N_1 = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right) N$

$\gamma = \frac{M}{N\mu}$, $N_2 = \left(\frac{1-\gamma}{2}\right) N$ 26 avril (13)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.



Ex3



$$k_n = \frac{n\pi}{\ell}$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$E_n = \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2m\ell^2}\right) n^2 = E_1 n^2$$

$$p_n = A \exp(-\beta E_n)$$

$$p_{n+1} = A \exp(-\beta E_{n+1})$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = r_n = \exp\left[-\beta (E_{n+1} - E_n)\right]$$

26 Avril

(14)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$E_{n+1} - E_n = \left[(n+1)^2 - n^2\right] E_1 = (2n+1) E_1$$

$$r_n = \exp\left[-\frac{(2n+1) E_1}{k_B T}\right]$$

2) $$r_1 = \frac{p_2}{p_1} = \exp\left(\frac{-3E_1}{k_B T}\right)$$

$k_B T = 25\ meV$ $\quad E_1 = 10\ eV$

$$r_1 = \frac{p_2}{p_1} = \exp\left(\frac{-30}{25\,10^{-3}}\right) \simeq \exp\left(-10^{+3}\right) \to 0$$

$$p_2 \lll p_1$$

3) $$E_{n_1} = k_B T = n_1^2 E_1 \Rightarrow$$

$$n_1 = \sqrt{\frac{k_B T}{E_1}} = \sqrt{\frac{25\,10^{-3}}{2,5\,10^{-12}}} = 10^5$$

$$E_{n_2} = 1,02\, k_B T = n_2^2 E_1$$

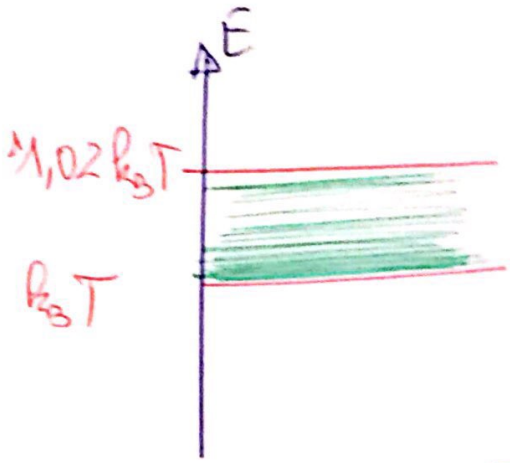
$$n_2 = \sqrt{\frac{1,02\, k_B T}{E_1}} = \sqrt{1,02}\ n_1$$

$$= 100\,995$$

26/11/2021

(15)

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.



→ spectre continue classique.

5) $E = n^2 E_1 = n^2 \dfrac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}$

$$n(E) = \sqrt{\frac{2ml^2}{\pi^2\hbar^2}}\sqrt{E}$$

6) $n(E+dE) - n(E) = dn(E)$

$$\frac{dn(E)}{dE} = \sqrt{\frac{ml^2}{2\pi^2\hbar^2}}\frac{1}{\sqrt{E}}$$

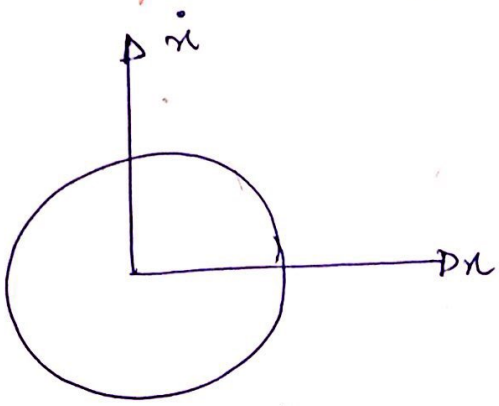
$$dn(E) = \sqrt{\frac{ml^2}{2\pi^2\hbar^2}}\frac{dE}{\sqrt{E}}$$

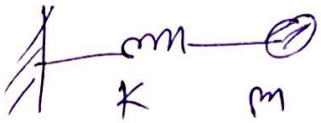
$$W(E) = \frac{\sqrt{ml^2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^2 E}}$$

16

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

7) $dp(E) = \left(\frac{1}{Z}\right) \exp(-\beta E)\, W(E)\, dE$





$$\frac{dx\, dp}{h}$$

$$A \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-E\beta) \sqrt{\frac{ml^2}{2\pi^2 \hbar^2 E}}\, dE = 1$$

$$A \sqrt{\frac{ml^2}{2\pi^2 \hbar^2}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\beta E)}\, d(E\beta)}{\sqrt{E\beta}} = 1$$

$$\frac{A}{\sqrt{\beta}} \sqrt{\frac{ml^2}{2\pi^2 \hbar^2}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}\, dy}{\sqrt{y}} = 1$$

$$A = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \sqrt{\frac{2\pi^2 \hbar^2}{ml^2}}$$

26 Avril

17

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$dp(E) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \sqrt{\frac{2\pi^2 P^2}{m\ell^2}} \oint \frac{e^{-\beta E}}{\sqrt{E}} \frac{\sqrt{m\ell^2}}{\sqrt{2\pi^2 P^2}} dE$$

$$dp(E) = \frac{1}{\sqrt{k_B T \pi}} \frac{e^{-\beta E}}{\sqrt{E}} dE$$

8) $$\langle E \rangle = \int_0^\infty E \, dp(E) = \frac{k_B T}{2}$$

$$\langle E = \frac{1}{2} m v^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

$$\langle \text{energie (quadratique)} \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

$$\langle E^2 \rangle = \int_0^\infty E^2 \, dp(E) = 3 \frac{(k_B T)^2}{4}$$

$$\text{Var}(E) = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{(k_B T)^2}{2}$$

$$\frac{\Delta E}{\langle E \rangle} = \sqrt{2}$$ fluctns importantes.

Abdul 18

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.