

Chapitre X



DISPOSITIF INTERFÉRENTIEL PAR DIVISION DU FRONT D'ONDE EXEMPLE DES TROUS D'YOUNG



- *Dispositif des trous d'Young*
- *Variation de l'ordre d'interférence avec l'élargissement de la source*
Perte de contraste par élargissement spatial de la source
- *Variation de l'ordre d'interférence avec la fréquence de la source*
Perte de contraste par élargissement spectral de la source

Introduction

Un dispositif interférentiel est configuré en division du front d'onde lorsque les deux rayons lumineux qui interfèrent en **M** sont issus de deux rayons distincts qui émergent de la source.

I. Dispositif des trous D'Young

I.1. Présentation du dispositif

Le dispositif des trous d'Young est un écran opaque percés de deux trous de taille $\sim 50 \mu\text{m}$.

Éclairés par une source, les deux trous se comportent alors comme des sources secondaires émettant de la lumière (par diffraction). Les deux ondes issues de chaque trou sont cohérentes et vont donc interférer dans l'espace en aval



Le champ d'interférences est la zone de recouvrement des deux vibrations cohérentes.

Le champ d'interférences est très étendu: le système d'interférences est non localisées

I.2. Etude quantitative du champ d'interférences

On envisage ici de placer l'écran d'observation à très grande distance des trous D'Young, soit: $D = OO' \gg a = S_1S_2$

Décrire le champ d'interférences

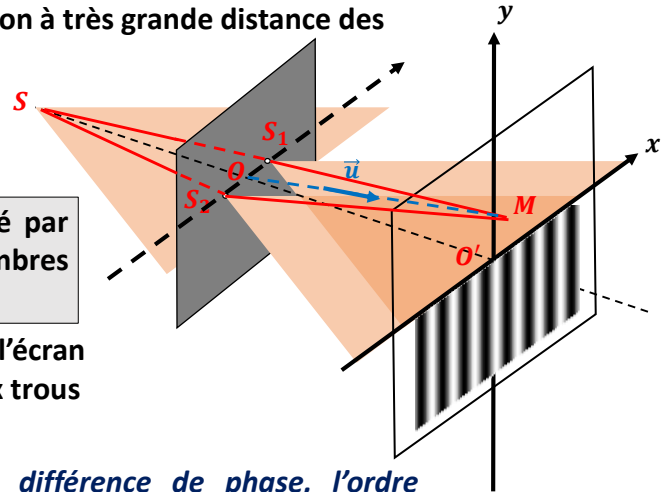
L'écran d'observation est placé $\parallel (S_1S_2)$

⇒ Le système d'interférences est constitué par des franges rectilignes $\parallel (Oy)$ alternées sombres et brillantes.

les franges d'interférences sont visibles sur l'écran quelle que soit sa position au-delà des deux trous

⇒ les interférences sont non localisées.

Déterminer la différence de marche, la différence de phase, l'ordre d'interférences ainsi que l'intensité lumineuse en un point M d'abscisse x sur l'écran d'observation.



La différence de marche s'écrit: $\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M)$

Or $(SS_2) = (SS_1) \Rightarrow \delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$

Dans le vide $\delta(M) = S_2M - S_1M$

$$\overrightarrow{S_2M} = \overrightarrow{S_2O} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow S_2M^2 = S_2O^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{S_2O} \cdot \overrightarrow{OM}$$

$$\Rightarrow S_2M^2 \simeq OM^2 + 2\overrightarrow{S_2O} \cdot \overrightarrow{OM} \Rightarrow S_2M^2 = OM^2 \left(1 + \frac{2\overrightarrow{S_2O} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM^2}\right)$$

$$\Rightarrow S_2M = OM \left(1 + \frac{2\overrightarrow{S_2O} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM^2}\right)^{1/2} \Rightarrow S_2M \simeq OM \left(1 + \frac{\overrightarrow{S_2O} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM^2}\right)$$

$$\Rightarrow S_2M = OM + \overrightarrow{S_2O} \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} \Rightarrow S_2M = OM + \overrightarrow{S_2O} \cdot \vec{u} \Rightarrow S_1M = OM + \overrightarrow{S_1O} \cdot \vec{u}$$

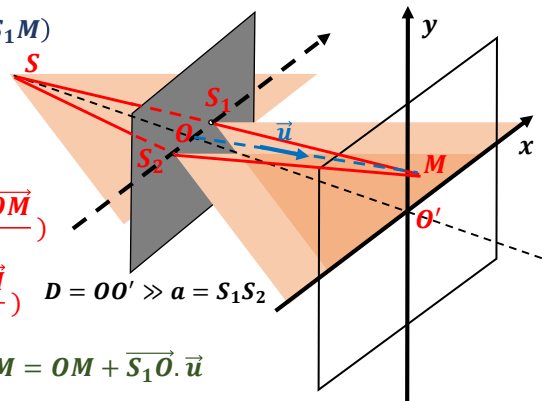
$$\delta(M) = S_2M - S_1M = OM + \overrightarrow{S_2O} \cdot \vec{u} - OM - \overrightarrow{S_1O} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{S_2O} \cdot \vec{u} - \overrightarrow{S_1O} \cdot \vec{u}$$

$$\Rightarrow \delta(M) = \overrightarrow{S_2S_1} \cdot \vec{u}$$

Or $\overrightarrow{S_2S_1} = a\vec{u}_x$ et $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} \simeq \frac{\overrightarrow{OM}}{D} \Rightarrow \delta(M) = \frac{a\vec{u}_x \cdot \overrightarrow{OM}}{D} \Rightarrow \delta = \frac{ax}{D}$

La différence de phase s'écrit: $\Delta\Phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) \Rightarrow \Delta\Phi(M) = \frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}$

L'ordre d'interférence s'écrit: $P(M) = \frac{\Delta\Phi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} \Rightarrow P(M) = \frac{\overrightarrow{S_2S_1} \cdot \vec{u}}{\lambda_0} \Rightarrow P(M) = \frac{ax}{\lambda_0 D}$



l'intensité lumineuse au point M s'écrit: $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2\pi P(M))$

Or $I_1 = I_2 = I_0$

$$\Rightarrow I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right)\right)$$

On obtient dans ce cas un contraste idéal $C = 1$

Les surfaces d'égale intensité $I(M) = cte \Rightarrow P(M) = cte_1 \Rightarrow \Delta\Phi(M) = cte_2 \Rightarrow \delta(M) = cte_3$
 $\Rightarrow x = cte$ des franges rectilignes $\parallel (Oy)$ alternées sombres et brillantes.

Positions des franges brillantes (interférences constructives):

$$\Rightarrow P(M) = m; m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Delta\Phi(M) = 2m\pi \Rightarrow \delta(M) = m\lambda_0 \Rightarrow \frac{ax_m}{\lambda_0 D} = m \Rightarrow x_m = m \frac{\lambda_0 D}{a}$$

Positions des franges sombres (interférences destructives):

$$\Rightarrow P(M) = (m + \frac{1}{2}); m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \delta(M) = (m + \frac{1}{2}) \lambda_0 \Rightarrow \frac{ax_m}{\lambda_0 D} = (m + \frac{1}{2}) \Rightarrow x_m = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_0 D}{a}$$

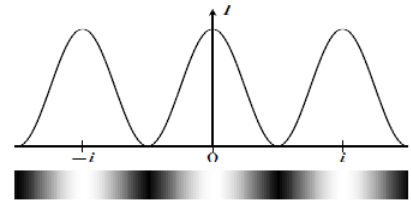
La figure d'interférences est périodique de période i appelée interfrange définie telle que:

Si $\Delta x = i$ alors $\Delta(\Delta\Phi(M)) = 2\pi \quad \Delta P = 1 \quad \Delta\delta = \lambda_0$

$$P(M) = \frac{ax}{\lambda_0 D} \Rightarrow \Delta P = \frac{a\Delta x}{\lambda_0 D} \Rightarrow 1 = \frac{ai}{\lambda_0 D}$$

$$\Rightarrow i = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

$$\Rightarrow I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{i}\right)\right)$$



Remarque L'interfrange $i = x_{m+1} - x_m$ x_m Positions des franges brillantes (sombres)

Le système d'interférences est invariant par translation $\parallel (Oy)$, on peut donc utiliser des fentes fines $\parallel (Oy)$ au lieu de la source ponctuelle et les trous d'Young. On obtient ainsi un confort lumineux sans modification du contraste.

$P(M) = \frac{\overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \vec{u}}{\lambda_0} = \frac{\overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \overrightarrow{OM}}{\lambda_0 D}$ Pour une variation du point M de $\overrightarrow{MM'} = \delta \overrightarrow{OM}$ l'ordre varie de:

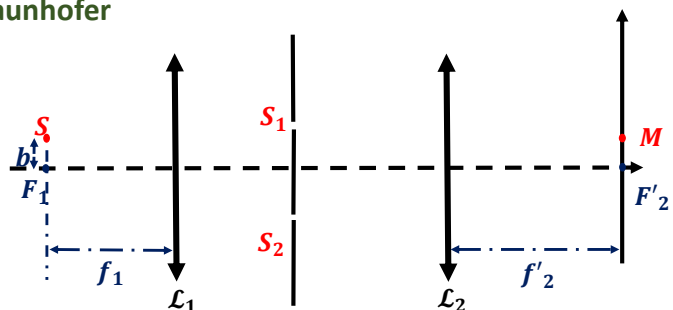
$$\delta P(M) = \frac{\overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \delta \vec{u}}{\lambda_0} = \frac{\overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \delta \overrightarrow{OM}}{\lambda_0 D}$$

Si on se déplace $\perp \overrightarrow{S_2 S_1}$, alors $\delta P(M) = 0$

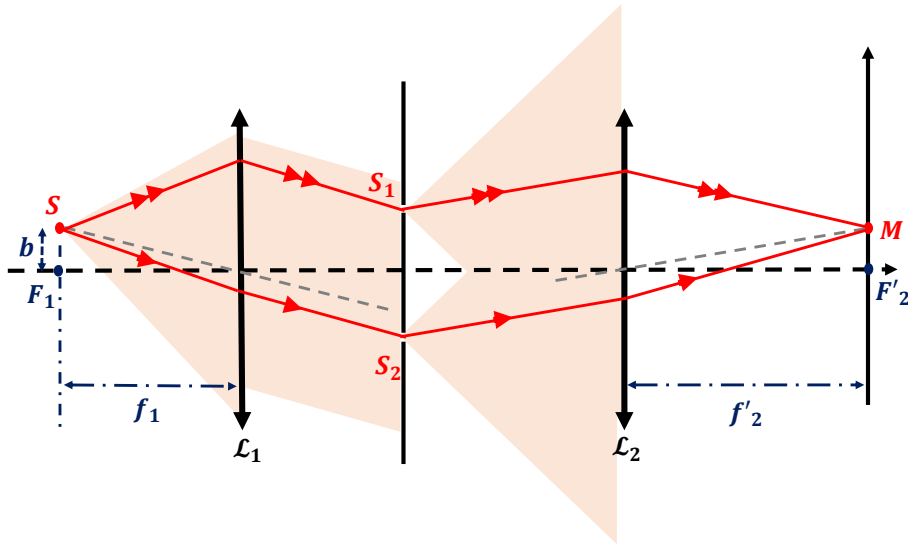
On conserve le même état d'interférence

I. 3. Interférences à l'infini : Montage de Fraunhofer

La première lentille permet de concentrer la lumière de la source sur les fentes ce qui assure une meilleure luminosité. La deuxième lentille conjugue l'infini avec son plan focal image; on réalise ainsi les conditions d'observation des interférences à l'infini



Représenter la marche des deux rayons lumineux issus de S qui viennent interférer au point M .



Déterminer l'intensité lumineuse en un point M d'abscisse x sur l'écran.

La différence de marche s'écrit:

$$\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M)$$

$$\Rightarrow \delta(M) = SS_2 + S_2M - SS_1 - S_1M$$

$$\Rightarrow \delta(M) = SS_2 - SS_1 + S_2M - S_1M$$

S_1 et H appartiennent au même surface d'onde issue de $S \Rightarrow SS_1 = SH \Rightarrow SS_2 - SS_1 = SS_2 - SH = HS_2 = a \sin \alpha$

α est faible (conditions de l'approximation de Gauss) $\Rightarrow \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{b}{f_1} \Rightarrow SS_2 - SS_1 = \frac{ab}{f_1}$

S_1 et H' appartiennent à la même surface d'onde issue de M (retour inverse de la lumière)

$$\Rightarrow MS_1 = MH' \Rightarrow MS_2 - MS_1 = MS_2 - MH' = H'S_2 = a \sin \alpha'$$

α' faible (conditions de l'approximation de Gauss) $\Rightarrow \sin \alpha' \approx \tan \alpha' = \frac{x}{f'_2} \Rightarrow S_2M - S_1M = \frac{ax}{f'_2}$

La différence de marche s'écrit: $\delta(x) = \frac{ab}{f_1} + \frac{ax}{f'_2}$

L'intensité lumineuse s'écrit:

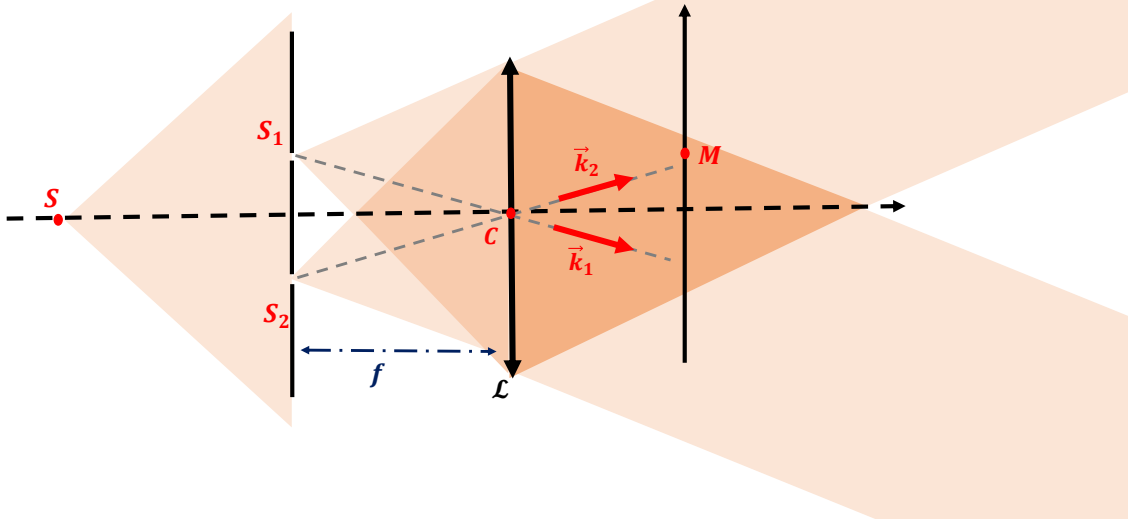
L'ordre d'interférence s'écrit:

$$P(x) = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{ab}{f_1} + \frac{ax}{f'_2} \right)$$

$$\Rightarrow I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ab}{f_1} + \frac{ax}{f'_2} \right) \right) \right)$$

I. 4. Trous D'Young à l'infini - interférences en ondes planes

En plaçant les trous d'Young S_1 et S_2 dans le plan focal objet d'une lentille convergente, ces derniers occupent des foyers objets secondaires et engendrent deux faisceaux de lumière parallèles de vecteurs d'onde respectifs $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$.



Déterminer l'ordre d'interférences ainsi que l'intensité lumineuse en un point M d'abscisse x sur l'écran.

Soit C l'origine des phase

$$\Delta\Phi(M) = \Phi_2(M) - \Phi_1(M)$$

$$= \vec{k}_2 \cdot \vec{CM} - \vec{k}_1 \cdot \vec{CM}$$

Or $\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \sin \alpha/2 \\ 0 \\ \cos \alpha/2 \end{pmatrix}$ Et $\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} -\sin \alpha/2 \\ 0 \\ \cos \alpha/2 \end{pmatrix}$

$$\vec{k}_2 - \vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2\sin \alpha/2 \vec{u}_x \quad \text{Et} \quad \vec{CM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta\Phi(M) = \frac{4\pi}{\lambda_0} x \cdot \sin \alpha/2$$

$$\Rightarrow P(M) = \frac{2x}{\lambda_0} \sin \alpha/2$$

L'intensité lumineuse s'écrit:

$$\Rightarrow I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda_0} x \cdot \sin \alpha/2 \right) \right)$$

L'interfrange i

$$\Delta P = \frac{2\Delta x}{\lambda_0} \sin \alpha/2 \quad \Delta x = i \quad \text{pour} \quad \Delta P = 1 \quad \Rightarrow 1 = \frac{2i}{\lambda_0} \sin \alpha/2$$

$$\Rightarrow i = \frac{\lambda_0}{2\sin \alpha/2}$$

$$\alpha \simeq \frac{a}{f}$$

$$\Rightarrow i = \frac{\lambda_0 f}{a}$$

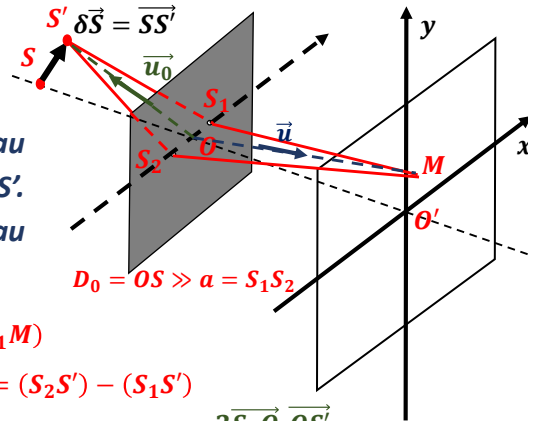
II. Effet de l'élargissement de la source - problème de la cohérence spatiale

II.1. Influence du déplacement de la source ponctuelle

On considère un déplacement élémentaire de la source, elle passe de S à S' : $\overrightarrow{\delta S} = \overrightarrow{SS'}$.

Déterminer la variation de l'ordre d'interférences au point M suite au déplacement de la source de S à S' .

Dans quelle direction peut-on placer une fente source au lieu de la source ponctuelle sans toucher au contraste.



$$\delta'(M) = (S'S_2M) - (S'S_1M) = (S'S_2) - (S'S_1) + (S_2M) - (S_1M)$$

$$= (S'S_2) - (S'S_1) + \delta(M) \Rightarrow \Delta\delta(M) = \delta'(M) - \delta(M) = (S_2S') - (S_1S')$$

$$\overrightarrow{S_2S'} = \overrightarrow{S_2O} + \overrightarrow{OS'} \Rightarrow S_2 S'^2 = S_2 O^2 + OS'^2 + 2\overrightarrow{S_2O} \cdot \overrightarrow{OS'} \Rightarrow S_2 S'^2 = OS'^2 \left(1 + \frac{2\overrightarrow{S_2O} \cdot \overrightarrow{OS'}}{OS'^2}\right)$$

$$\Rightarrow S_2 S' = OS' \left(1 + \frac{2\overrightarrow{S_2O} \cdot \overrightarrow{OS'}}{OS'^2}\right)^{1/2} \Rightarrow S_2 S' \simeq OS' \left(1 + \frac{\overrightarrow{S_2O} \cdot \overrightarrow{OS'}}{OS'^2}\right) \Rightarrow S_2 S' = OS' + \frac{\overrightarrow{S_2O} \cdot \overrightarrow{OS'}}{OS'}$$

$$\Rightarrow S_1 S' = OS' + \frac{\overrightarrow{S_1O} \cdot \overrightarrow{OS'}}{OS'}$$

$$\Rightarrow \Delta\delta(M) = OS' + \frac{\overrightarrow{S_2O} \cdot \overrightarrow{OS'}}{OS'} - OS' - \frac{\overrightarrow{S_1O} \cdot \overrightarrow{OS'}}{OS'} = \frac{\overrightarrow{S_2S_1} \cdot \overrightarrow{OS'}}{OS'} \Rightarrow \Delta\delta(M) \simeq \frac{\overrightarrow{S_2S_1} \cdot \overrightarrow{OS'}}{D_0} = \frac{\overrightarrow{S_2S_1} \cdot (\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SS'})}{D_0}$$

Or $\overrightarrow{S_2S_1} \cdot \overrightarrow{OS} = 0$ et $\overrightarrow{SS'} = \overrightarrow{\delta S}$

$$\Rightarrow \Delta\delta(M) = \frac{\overrightarrow{S_2S_1} \cdot \overrightarrow{\delta S}}{D_0}$$

$$\Rightarrow \Delta P(M) = \frac{\overrightarrow{S_2S_1} \cdot \overrightarrow{\delta S}}{\lambda_0 D_0}$$

➤ Si $\Delta P = 0$, alors le système d'interférence reste inchangé

➤ Si $\Delta P = \text{cte} \neq 0$, alors le système d'interférence sera translaté en bloc

➤ Si on déplace S perpendiculairement à $\overrightarrow{S_2S_1}$, alors $\Delta P = 0$, et par suite le système d'interférence reste inchangé.

➤ Si on place maintenant deux sources S et S' perpendiculairement à $\overrightarrow{S_2S_1}$, On obtient alors sur l'écran deux systèmes d'interférences identiques qui se superposent (même position des franges sombres et brillantes).

$$I_{\text{tot}}(M) = I(M) + I'(M) = 2I_0 \left(1 + \cos(2\pi P(M))\right) + 2I_0 \left(1 + \cos(2\pi P(M))\right) = 2 * 2I_0 \left(1 + \cos(2\pi P(M))\right)$$

⇒ Avec S et S' , il y a augmentation de la luminosité sans modification du contraste

⇒ Pour avoir un confort lumineux sans modification du contraste, on peut utiliser une fente source, fine, placée perpendiculairement à $\overrightarrow{S_2S_1}$

II.2. Visibilité des franges produites par deux sources ponctuelles incohérentes

En plus de la source S placée sur l'axe optique, on ajoute une deuxième source S' parallèlement à l'axe ($S_1 S_2$) telle que $\overrightarrow{\delta S} = \overrightarrow{SS'} = b\vec{u}_x$.

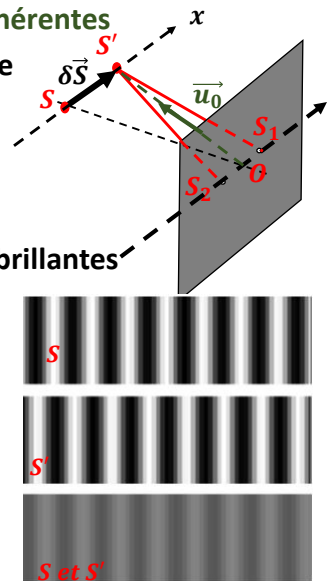
Interpréter la représentation des franges d'interférences produites par S seulement, S' seulement et les deux sources en même temps.

- Source S : On observe des franges rectilignes alternées sombres et brillantes de période $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$, l'ordre d'interférence est: $P(M) = \frac{ax}{\lambda_0 D}$

- Source S' : Le système d'interférences relatif à S' est périodique de période $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$, décalé par rapport à celui de S

- Sources S et S' :

Chaque source impose son système d'interférences, on observe la superposition de deux systèmes identiques mais décalés, ce qui explique la diminution du contraste.



En effet: On va suivre la frange d'ordre P lorsque la source se déplace de S à S'

- Source S : L'ordre s'écrit $P = \frac{ax_p^S}{\lambda_0 D} \Rightarrow x_p^S = \frac{\lambda_0 D}{a} P$
- Source S' : L'ordre s'écrit $P = \frac{ax_p^{S'}}{\lambda_0 D} + \Delta P \Rightarrow \frac{ax_p^{S'}}{\lambda_0 D} = P - \Delta P \Rightarrow x_p^{S'} = \frac{\lambda_0 D}{a} P - \frac{\lambda_0 D}{a} \Delta P$

$$\Rightarrow x_p^{S'} - x_p^S = -\frac{\lambda_0 D}{a} \Delta P \quad \text{Or} \quad \Delta P = \frac{\overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \overrightarrow{\delta S}}{\lambda_0 D_0}$$

Si S se déplace $\perp$ à $\overrightarrow{S_2 S_1}$, $\Rightarrow \Delta P = 0 \Rightarrow x_p^{S'} = x_p^S$
le système d'interférences reste inchangé.

Dans notre cas $\overrightarrow{SS'} = b\vec{u}_x$ Et $\overrightarrow{S_2 S_1} = a\vec{u}_x \Rightarrow \Delta P = \frac{a \cdot b}{\lambda_0 D_0} \Rightarrow x_p^{S'} - x_p^S = -\frac{\lambda_0 D}{a} \frac{a \cdot b}{\lambda_0 D_0} = -\frac{D \cdot b}{D_0}$

Si la source se déplace de $b\vec{u}_x$, le système d'interférences se translate en bloc de $-\frac{D \cdot b}{D_0} \vec{u}_x$

- Si $\Delta P = m; m \in \mathbb{Z}$ Les franges sombres (resp brillantes) relatives à S se coïncident avec celles relatives à S' . Le contraste prend sa valeur maximale $C = 1$
- Si $\Delta P = m + \frac{1}{2}; m \in \mathbb{Z}$ Les franges sombres relatives à S se coïncident avec les franges brillantes relatives à S' . Le contraste prend sa valeur minimale $C = 0$

Déterminer l'intensité lumineuse produite par S et S' en un point M du champ d'interférence et étudier la variation du contraste en fonction de la variation de l'ordre d'interférences.

➤ La source S impose son système d'interférences: $I(M) = 2I_0 (1 + \cos(2\pi P(M)))$

➤ La source S' impose son système d'interférences: $I'(M) = 2I_0 (1 + \cos(2\pi P'(M)))$

➤ L'intensité résultante s'écrit: $I_{tot}(M) = I(M) + I'(M)$

$$I_{tot}(M) = 2I_0 (1 + \cos(2\pi P(M))) + 2I_0 (1 + \cos(2\pi P'(M))) = 2I_0 (2 + \cos(2\pi P(M)) + \cos(2\pi P'(M)))$$

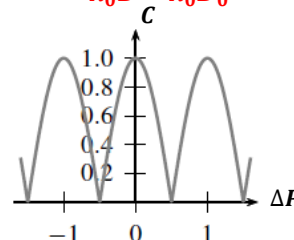
$$= 2I_0 (2 + 2\cos(\pi(P'(M) - P(M))) * \cos(\pi(P'(M) + P(M))))$$

Or $P(M) = \frac{ax}{\lambda_0 D}$ Et $P'(M) = \frac{ax}{\lambda_0 D} + \Delta P = \frac{ax}{\lambda_0 D} + \frac{a \cdot b}{\lambda_0 D_0} \Rightarrow P'(M) + P(M) = \frac{2ax}{\lambda_0 D} + \frac{a \cdot b}{\lambda_0 D_0}$

$$I_{tot}(M) = 4I_0 \left(1 + \cos(\pi \Delta P) * \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} + \frac{\pi a \cdot b}{\lambda_0 D_0}\right) \right) \quad C = |\cos(\pi \Delta P)|$$

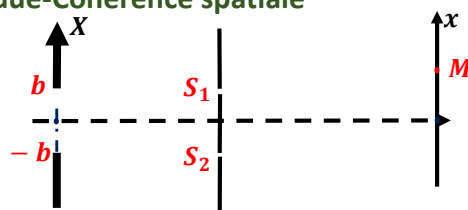
➤ Si $\Delta P = m; m \in \mathbb{Z} \Rightarrow C = 1$ ➤ Si $\Delta P = m + \frac{1}{2}; m \in \mathbb{Z} \Rightarrow C = 0$

On va admettre que les franges restent visible tant que

$$|\Delta P| < \frac{1}{2}$$


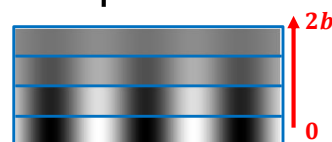
II.3. Visibilité des franges produites par une source étendue-Cohérence spatiale

Le dispositif des fentes d'Young est éclairé par une source étendue, de longueur infinie le long (Oy) et de largeur $2b$ le long (Ox)



Interpréter la variation du contraste des franges d'interférences en fonction de la largeur de source primaire.

➤ Avec une fente fine ($2b \approx 0$), le système d'interférences est bien contrasté ($C \approx 1$)



➤ Si la largeur de la fente augmente, la visibilité chute et l'on ne distingue plus les franges sombres des franges brillantes : on dit que la figure d'interférences est brouillée ($C \approx 0$)

Interprétation

Une source étendue est la superposition continue de sources ponctuelles incohérentes. Chacune de ces sources ponctuelles produit sur l'écran d'observation son système d'interférences. On observe sur l'écran la superposition de tous ces systèmes décalés les uns par rapport aux autres d'où le brouillage des franges d'interférences.

Déterminer la largeur de cohérence spatiale l_s définie comme la largeur maximale au-dessous de laquelle la source peut être considérée comme ponctuelle

Pour deux sources ponctuelles placées en S et S' , l'ordre d'interférences au point M varie de:

$$\Delta P(M) = \frac{\overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \overrightarrow{SS'}}{\lambda_0 D_0}; \quad \overrightarrow{S_2 S_1} = a \vec{u}_x$$

la variation de l'ordre est maximale pour les deux sources situés aux extrémités $\overrightarrow{SS'} = 2b \vec{u}_x$

$$\Rightarrow \Delta P_{\max} = \frac{a \vec{u}_x \cdot 2b \vec{u}_x}{\lambda_0 D_0} \Rightarrow \Delta P_{\max} = \frac{2ab}{\lambda_0 D_0}$$

La visibilité des franges reste peu affectée par l'élargissement de la source tant que $|\Delta P| < \frac{1}{2}$

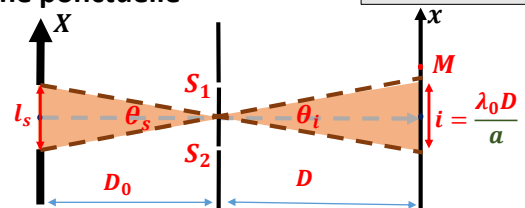
$$\text{Où } |\Delta P| \approx \frac{\Delta P_{\max}}{2} \Rightarrow \frac{\Delta P_{\max}}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta P_{\max} = \frac{2ab}{\lambda_0 D_0} < 1 \Rightarrow 2b < \frac{\lambda_0 D_0}{a}$$

Tant que la largeur de la source reste inférieure à $\frac{\lambda_0 D_0}{a}$, le système d'interférences reste bien contrasté, et la source est considérée comme ponctuelle

$$\Rightarrow l_s = \frac{\lambda_0 D_0}{a}$$

On définit aussi la largeur angulaire de cohérence spatiale θ_s Comme l'angle sous lequel est vue la source étendue depuis le centre des deux fentes.

$$\theta_s = \frac{l_s}{D_0} = \frac{\lambda_0}{a} = \frac{i}{D} = \theta_i \quad \text{Interfrange angulaire}$$



Déterminer l'intensité lumineuse et en déduire le contraste. Interpréter

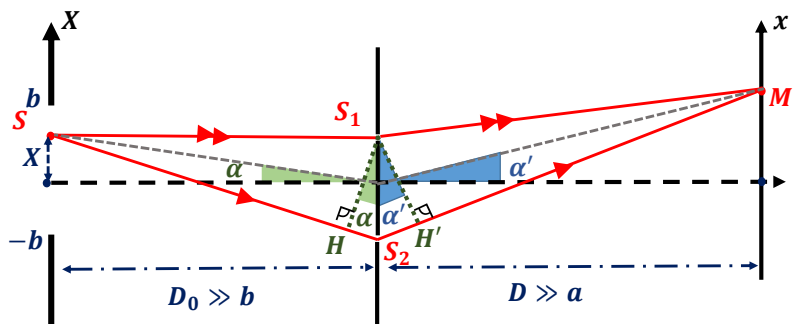
La source S d'extension dX est ponctuelle, elle contribue dans le champ d'interférence par :

$$dI(M) = 2dI_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \right) \right)$$

$$2b \rightarrow I_0$$

$$dX \rightarrow dI_0 = \frac{I_0}{2b} dX$$

$$dI(M) = \frac{I_0}{b} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \right) \right) dX$$



$$\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) \Rightarrow \delta(M) = SS_2 + S_2M - SS_1 - S_1M \Rightarrow \delta(M) = SS_2 - SS_1 + S_2M - S_1M$$

$$D_0 \gg b \Rightarrow (SS_1) \parallel (SS_2) \Rightarrow SS_2 - SS_1 = HS_2 = a \sin \alpha \approx a \tan \alpha = \frac{aX}{D_0} \Rightarrow SS_2 - SS_1 = \frac{aX}{D_0}$$

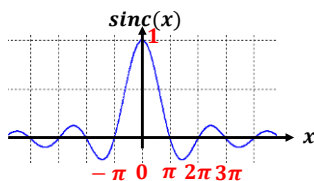
$$D \gg a \Rightarrow (S_1M) \parallel (S_2M) \Rightarrow S_2M - S_1M = H'S_2 = a \sin \alpha' \approx a \tan \alpha' = \frac{ax}{D} \Rightarrow SS_2 - SS_1 = \frac{ax}{D}$$

$$\Rightarrow \delta(M) = \frac{aX}{D_0} + \frac{ax}{D}$$

$$\Rightarrow dI(M) = \frac{I_0}{b} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{aX}{D_0} + \frac{ax}{D} \right) \right) \right) dX$$

Les différentes sources ponctuelles sont incohérentes entre elles, l'intensité résultante sera égale à la somme des intensités

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow I(M) &= \int_{-b}^b \frac{I_0}{b} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{aX}{D_0} + \frac{ax}{D} \right) \right) \right) dX = \frac{I_0}{b} \int_{-b}^b dX + \frac{I_0}{b} \int_{-b}^b \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{aX}{D_0} + \frac{ax}{D} \right) \right) dX \\
 &= \frac{I_0}{b} 2b + \frac{I_0}{b} \frac{1}{\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{a}{D_0}} \left[\sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{aX}{D_0} + \frac{ax}{D} \right) \right) \right]_{-b}^b = 2I_0 + \frac{I_0}{\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ab}{D_0}} \left\{ \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ab}{D_0} + \frac{ax}{D} \right) \right) - \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{-ab}{D_0} + \frac{ax}{D} \right) \right) \right\} \\
 &= 2I_0 + \frac{I_0}{\frac{\pi}{\lambda_0} \frac{a(2b)}{D_0}} 2 \sin \left(\frac{\pi a(2b)}{\lambda_0 D_0} \right) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) = 2I_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{\pi}{\lambda_0} \frac{a(2b)}{D_0}} \sin \left(\frac{\pi a(2b)}{\lambda_0 D_0} \right) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right) \\
 \Rightarrow I(M) &= 2I_0 \left\{ 1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a(2b)}{\lambda_0 D_0} \right) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right\} \quad C = \left| \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a(2b)}{\lambda_0 D_0} \right) \right|
 \end{aligned}$$



La largeur de cohérence spatiale est la largeur de la source qui annule le contraste pour la première fois

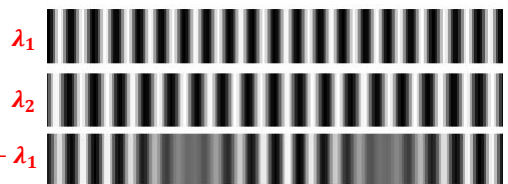
$$\frac{\pi a l_s}{\lambda_0 D_0} = \pi \quad \Rightarrow l_s = \frac{\lambda_0 D_0}{a}$$

III. Influence de la largeur spectrale - problème de la cohérence temporelle

III.1. Doublet de longueur d'onde

La source ponctuelle S émet maintenant un doublet de longueurs d'onde λ_1 et $\lambda_2 \gtrsim \lambda_1$.

Interpréter la représentation des franges produites. $\lambda_2 + \lambda_1$



Chacune des deux ondes produit son propre système de franges, sur l'écran on observe la superposition des deux systèmes. On remarque que le contraste n'est pas uniforme.

➤ Pour certains points, deux franges brillantes produites par chaque onde se superposent.

⇒ On dit qu'il y a **coïncidence**. La visibilité des franges en ces points est égale à **1**.

➤ Pour d'autres points, une frange brillante produite par une onde se superpose à une frange sombre produite par l'autre onde.

⇒ On dit qu'il y a **anti-coïncidence**. On observe en ces points un brouillage des franges d'interférences. La visibilité des franges en ces points est égale à **0**.

➤ Positions des coïncidences

- Positions des maximums de $\lambda_1 \Rightarrow P_1(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_1} = q; q \in \mathbb{Z}$
- Positions des maximums de $\lambda_2 \Rightarrow P_2(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_2} = p; p \in \mathbb{Z}$
- $$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow P_1(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_1} = q; q \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow P_2(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_2} = p; p \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \delta(M) \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = q - p = m; m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{ax_{c,m}}{D} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} = m \quad \text{Soit } \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \quad \text{Et } \lambda_0^2 = \lambda_1 \lambda_2 \Rightarrow \frac{ax_{c,m}}{D} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = m \quad \Rightarrow x_{c,m} = m \frac{D\lambda_0^2}{a\Delta\lambda}$$

➤ Positions des anti-coïncidences

- Les minimums de $\lambda_1 \Rightarrow P_1(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_1} = q + \frac{1}{2}; q \in \mathbb{Z}$
- Les maximums de $\lambda_2 \Rightarrow P_2(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_2} = p; p \in \mathbb{Z}$
- $$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow P_1(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_1} = q + \frac{1}{2}; q \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow P_2(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_2} = p; p \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \delta(M) \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = q + \frac{1}{2} - p = m + \frac{1}{2}; m \in \mathbb{Z}$$
- $$\Rightarrow \frac{ax_{a,m}}{D} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} = m + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ax_{a,m}}{D} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = m + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x_{a,m} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{D\lambda_0^2}{a\Delta\lambda}$$

Remarque: On définit le nombre d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda}$

$$\Rightarrow \Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$$

Déterminer l'intensité lumineuse et en déduire le contraste. Interpréter

Pour la radiation de nombre d'onde σ_1

$$I_1(x) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(2\pi\sigma_1 \frac{ax}{D} \right) \right)$$

Pour la radiation de nombre d'onde σ_2

$$I_2(x) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(2\pi\sigma_2 \frac{ax}{D} \right) \right)$$

L'intensité résultante $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$

$$I(x) = 2I_0 \left(2 + \cos \left(2\pi\sigma_1 \frac{ax}{D} \right) + \cos \left(2\pi\sigma_2 \frac{ax}{D} \right) \right)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$= 2I_0 \left(2 + 2\cos \left(2\pi \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \frac{ax}{D} \right) \cos \left(2\pi \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \frac{ax}{D} \right) \right)$$

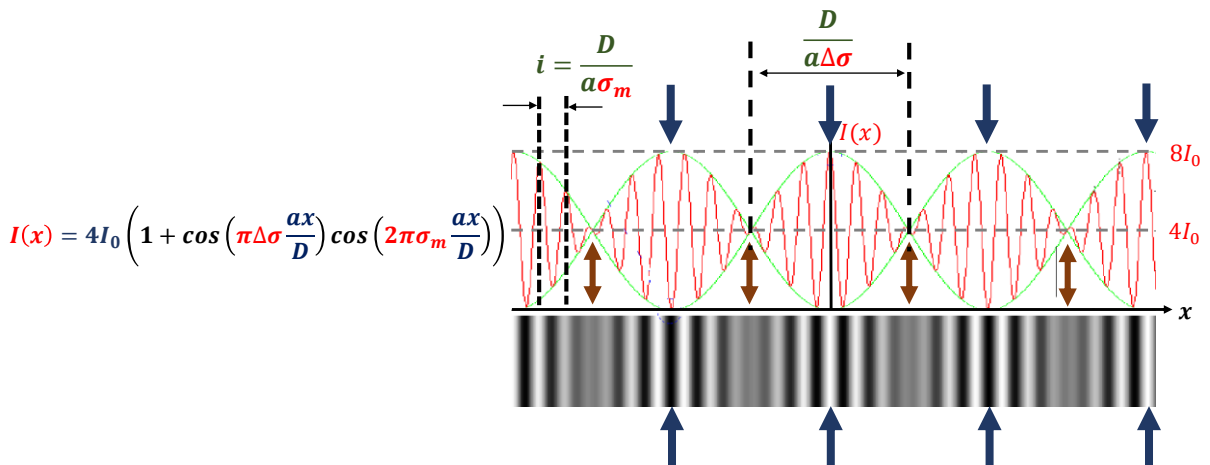
$$I(x) = 4I_0 \left(1 + \cos \left(\pi\Delta\sigma \frac{ax}{D} \right) \cos \left(2\pi\sigma_m \frac{ax}{D} \right) \right)$$

Où $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ et $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$

$$C(x) = \left| \cos \left(\pi\Delta\sigma \frac{ax}{D} \right) \right|$$

➤ Les coïncidences: $C(x) = \left| \cos\left(\pi\Delta\sigma \frac{ax_c}{D}\right) \right| = 1 \Rightarrow \pi\Delta\sigma \frac{ax_{c,m}}{D} = m\pi \Rightarrow x_{c,m} = m \frac{D}{a\Delta\sigma}$

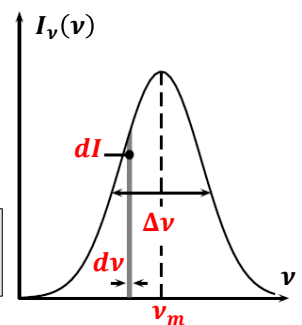
➤ Les anti-coïncidences: $C(x) = 0 \Rightarrow \pi\Delta\sigma \frac{ax_{a,m}}{D} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow x_{a,m} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{D}{a\Delta\sigma}$



III.2. Source de faible largeur spectrale : cohérence temporelle

La source émet des ondes lumineuses dont les fréquences sont distribuées autour d'une fréquence moyenne ν_m dans un intervalle de largeur $\Delta\nu$. On suppose que $\Delta\nu \ll \nu_m$. Dans l'intervalle de fréquences $[\nu; \nu + d\nu]$, la source rayonne une intensité dI .

Les interférences seront brouillées si $|\Delta p| > 1/2$, où la variation d'ordre Δp étant évalué sur la moitié de l'étendue spectrale $\Delta\nu/2$.



Déterminer alors la condition d'observation des interférences.

L'ordre d'interférences $P = \delta \frac{\nu}{c}$ Si la fréquence varie de $d\nu$ Alors l'ordre varie de $dP = \delta \frac{d\nu}{c}$

$dP = \Delta p$ pour $d\nu = \Delta\nu/2$ D'où $\Delta P = \delta \frac{\Delta\nu}{2c}$

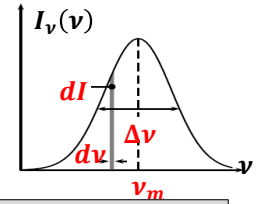
Les interférences sont visibles si $|\Delta p| < 1/2$

$$\delta \frac{\Delta\nu}{2c} < \frac{1}{2} \Rightarrow \delta < \frac{c}{\Delta\nu} \Rightarrow \delta < l_s \quad \text{où} \quad l_s = \frac{c}{\Delta\nu}$$

l_s est la longueur de cohérence temporelle. C'est la longueur d'un train d'onde

Déterminer l'intensité lumineuse et en déduire le contraste. Interpréter

Chaque bande élémentaire de largeur dv centrée sur v telle que $dv \ll v$ se comporte comme une source quasi-monochromatique. L'intensité élémentaire correspondante s'écrit: $dI(M) = 2dI_0(1 + \cos(2\pi\delta\frac{v}{c}))$



Où $dI_0 = I_v(v)dv \Rightarrow dI(M) = 2I_v(v)(1 + \cos(2\pi\delta\frac{v}{c}))dv$

Les différentes bandes sont incohérentes entre elles, alors

$$I(M) = \int_{distribution} 2 I_v(v)(1 + \cos(2\pi\delta\frac{v}{c}))dv$$

Soit pour une distribution rectangulaire:

Or $dI_0 = I_v(v)dv \Rightarrow I_0 = \int_{v_m - \frac{\Delta v}{2}}^{v_m + \frac{\Delta v}{2}} I_v(v)dv$

$I_v(v) = \begin{cases} A & \text{si } v \in [v_m - \frac{\Delta v}{2}, v_m + \frac{\Delta v}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\Rightarrow I_0 = A \int_{v_m - \frac{\Delta v}{2}}^{v_m + \frac{\Delta v}{2}} dv = A \cdot \Delta v$ $A = \frac{I_0}{\Delta v}$

$$I(\delta) = \int_{distribution} 2 I_v(v)(1 + \cos(2\pi\delta\frac{v}{c}))dv \Rightarrow I(\delta) = \int_{v_m - \frac{\Delta v}{2}}^{v_m + \frac{\Delta v}{2}} 2 \frac{I_0}{\Delta v} (1 + \cos(2\pi\delta\frac{v}{c}))dv$$

$$\Rightarrow I(\delta) = \frac{2I_0}{\Delta v} \int_{v_m - \frac{\Delta v}{2}}^{v_m + \frac{\Delta v}{2}} dv + \frac{2I_0}{\Delta v} \int_{v_m - \frac{\Delta v}{2}}^{v_m + \frac{\Delta v}{2}} \cos(2\pi\delta\frac{v}{c}) dv = 2I_0 + \frac{2I_0}{\Delta v} \frac{1}{2\pi\delta} \left[\sin(2\pi\delta\frac{v}{c}) \right]_{v_m - \frac{\Delta v}{2}}^{v_m + \frac{\Delta v}{2}}$$

$$\Rightarrow I(\delta) = 2I_0 + \frac{2I_0}{\Delta v} \frac{1}{2\pi\delta} \left\{ \sin\left(2\pi\delta\frac{v_m + \frac{\Delta v}{2}}{c}\right) - \sin\left(2\pi\delta\frac{v_m - \frac{\Delta v}{2}}{c}\right) \right\}$$

$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin(\frac{a-b}{2}) \cos(\frac{a+b}{2})$

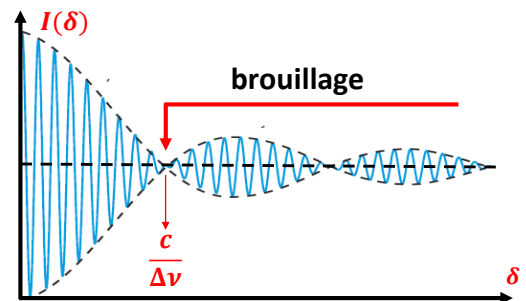
$$\Rightarrow I(\delta) = 2I_0 + 2I_0 \frac{1}{2\pi\Delta v\delta} 2\sin\left(\frac{\pi\Delta v\delta}{c}\right) \cos\left(\frac{2\pi v_m\delta}{c}\right)$$

$\Rightarrow I(\delta) = 2I_0 \left\{ 1 + \text{sinc}\left(\frac{\pi\Delta v}{c}\delta\right) \cos\left(\frac{2\pi v_m}{c}\delta\right) \right\}$

Le contraste s'écrit $C = \left| \text{sinc}\left(\frac{\pi\Delta v}{c}\delta\right) \right|$

$C = 0$ pour la 1^{er} fois

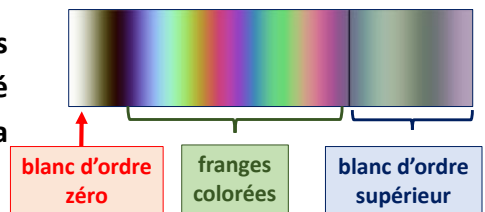
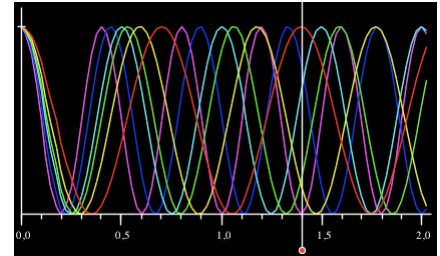
$\frac{\pi\Delta v}{c} l_c = \pi \Rightarrow l_c = \frac{c}{\Delta v}$



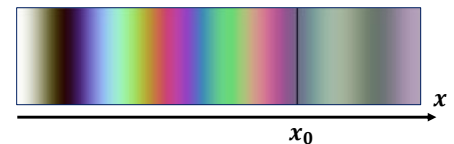
III.3. Interférences en lumière blanche

La lumière blanche contient toutes les radiations du spectre visible, de $0,39 \mu m$ (violet) à environ $0,75 \mu m$ (rouge). Comme il n'y a pas d'interférences entre des sources de fréquences différentes, on obtient sur l'écran la superposition des intensités correspondant aux différentes longueurs d'onde.

- Au centre, l'intensité est maximale quelle que soit la longueur d'onde: il y a donc une frange brillante blanche. C'est le blanc d'ordre zéro.
- En s'éloignant du centre, les franges correspondant aux différentes longueurs d'onde se décalent et on observe des franges colorées.
- En s'éloignant davantage du centre de l'écran, les franges disparaissent; l'écran est uniformément éclairé en blanc (on parle de blanc d'ordre supérieur) où il y a des radiations éteintes.



Sur l'écran, en un point d'abscisse x_0 du blanc d'ordre supérieur, déterminer le nombre et les longueurs d'ondes des radiations éteintes



Une radiation éteinte vérifie $\Rightarrow P(M) = (m + \frac{1}{2})$; $m \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \delta(M) = (m + \frac{1}{2}) \lambda_0 \Rightarrow \frac{ax_0}{\lambda_0 D} = (m + \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{\lambda_r} < \frac{1}{\lambda_0} = (m + \frac{1}{2}) \frac{D}{ax_0} < \frac{1}{\lambda_b} \Rightarrow \frac{ax_0}{\lambda_r D} < (m + \frac{1}{2}) < \frac{ax_0}{\lambda_b D}$$

$$\Rightarrow \frac{ax_0}{\lambda_r D} - \frac{1}{2} < m < \frac{ax_0}{\lambda_b D} - \frac{1}{2} \quad \text{AN:} \quad \begin{array}{l} a = 0,3 \text{ mm} \\ x_0 = 15 \text{ mm} \\ D = 1 \text{ m} \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda_r = 750 \text{ nm} \\ \lambda_b = 400 \text{ nm} \end{array} \Rightarrow 5,5 < m < 10,75$$

$\Rightarrow m = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ On observe cinq cannelures sombres, de longueurs d'onde

$$\Rightarrow \lambda_{0m} = \frac{ax_0}{(m + \frac{1}{2}) D} \quad \text{À chaque valeur de } m \text{ correspond une longueur d'onde}$$



Spectre cannelé

Analyse du blanc d'ordre supérieur