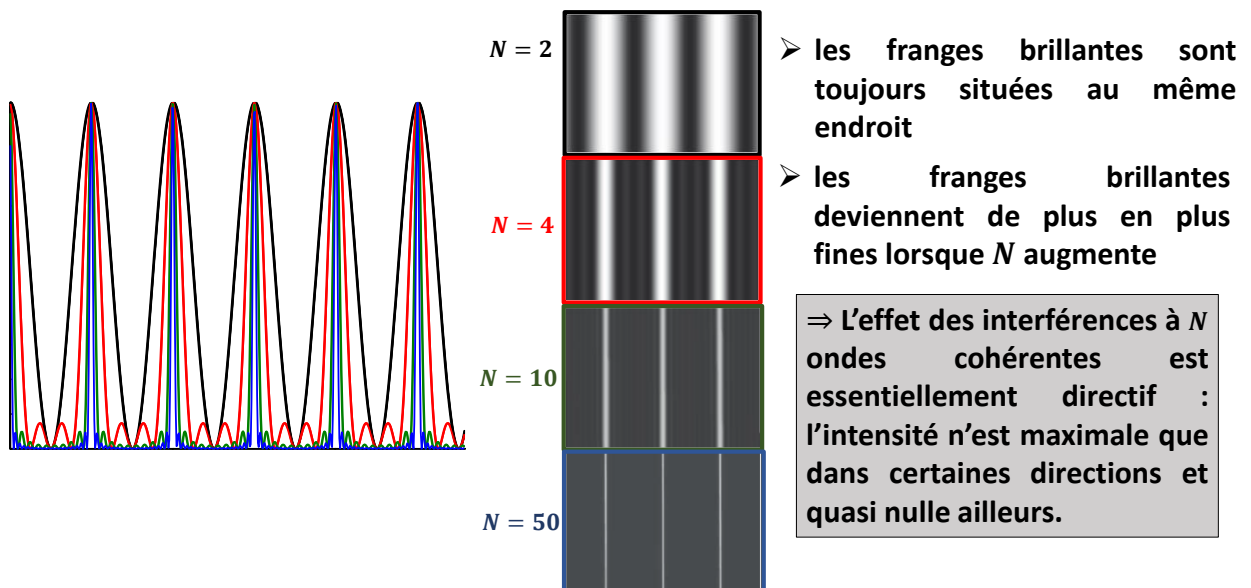


SUPERPOSITION DE N ONDES QUASI-MONOCROMATIQUES COHÉRENTES ENTRE ELLES



- Déterminer l'amplitude et l'intensité diffractée par un réseau plan
- Établir la relation fondamentale des réseaux
- Étude du filtre interférentiel.
- Notion de finesse et du pouvoir de résolution.

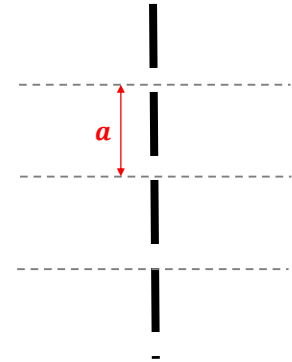
Introduction Que se passe-t-il si l'on superpose non pas seulement deux, mais un nombre N de vibrations lumineuses, toutes cohérentes entre-elles ?



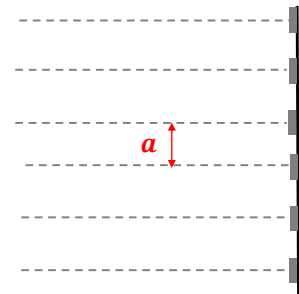
I. Réseau de diffraction

I.1. Définition

Un réseau plan par transmission est constitué d'un ensemble de N fentes fines identiques, parallèles et équidistantes, séparées par un intervalle opaque. La distance entre deux fentes voisines est la période (ou pas) du réseau noté a . Le réseau est caractérisé par le nombre de fentes par millimètre $n = 1/a$ (mm^{-1}).

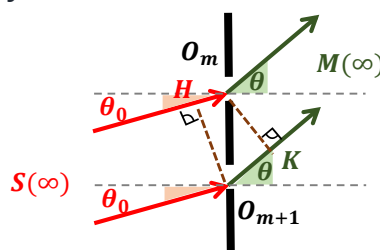
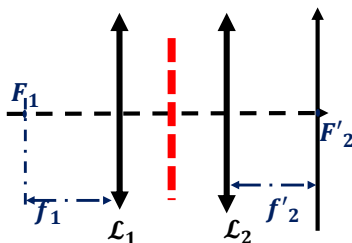


Dans un réseau par réflexion, les fentes sont remplacées par des bandes rectangulaires réfléchissantes séparées par des traits pratiquement non réfléchissants.



I.2. Relation fondamentale des réseaux

Evaluer la différence de marche entre deux faisceaux diffractés par deux fentes successives et donner la condition d'interférences constructives.



$$\delta(M) = (SO_{m+1}M) - (SO_mM)$$

$$\delta(M) = SO_{m+1} - SO_m + O_{m+1}M - O_mM$$

$$= -HO_m + O_{m+1}K$$

$$= -a \sin(\theta_0) + a \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \delta(M) = a (\sin(\theta) - \sin(\theta_0))$$

Le déphasage entre ces deux ondes s'écrit: $\Phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin(\theta) - \sin(\theta_0))$

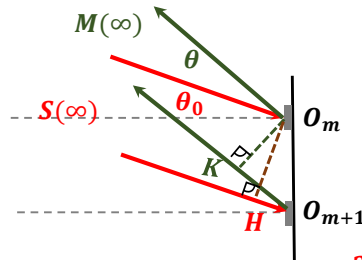
L'ordre d'interférences s'écrit: $P(M) = \frac{\Phi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{a}{\lambda} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0))$

Les interférences sont constructives (pics sur l'écran) si: $P(M) = m; \quad m \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\lambda} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = m \quad \Rightarrow a (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = m\lambda$$

relation fondamentale des réseaux par transmission

réseaux par réflexion



$$\delta(M) = (SO_{m+1}M) - (SO_mM)$$

$$\delta(M) = SO_{m+1} - SO_m + O_{m+1}M - O_mM$$

$$= O_{m+1}H + O_{m+1}K$$

$$= a \sin(\theta_0) + a \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \delta(M) = a (\sin(\theta) + \sin(\theta_0))$$

Le déphasage entre ces deux ondes s'écrit: $\Phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin(\theta) + \sin(\theta_0))$

L'ordre d'interférences s'écrit: $P(M) = \frac{\Phi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{a}{\lambda} (\sin(\theta) + \sin(\theta_0))$

Les interférences sont constructives (pics sur l'écran) si: $P(M) = m; \quad m \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\lambda} (\sin(\theta) + \sin(\theta_0)) = m \quad \Rightarrow a (\sin(\theta) + \sin(\theta_0)) = m\lambda$$

relation fondamentale des
réseaux par réflexion

par transmission $\sin(\theta) = \frac{m\lambda}{a} + \sin(\theta_0)$

par réflexion $\sin(\theta) = \frac{m\lambda}{a} - \sin(\theta_0)$

les directions θ dépendent de la longueur d'onde
 $\Rightarrow$ le réseau est dispersif.

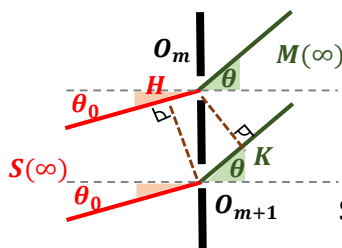
II. Vibration lumineuse en sortie d'un réseau

II.1. Intensité et fonction de réseau

On considère un réseau de N fentes éclairé sous incidence non nécessairement normale, par une onde de longueur d'onde λ dans le vide arrivant d'une source S située à l'infini.

Soit A_1 l'amplitude de l'onde diffractée par la fente numéro 1.

Déterminer l'amplitude de l'onde diffractée par le réseau et en déduire son intensité en fonction du déphasage entre deux faisceaux diffractés par deux fentes successives.



l'amplitude de l'onde diffractée par le réseau $A(M) = A_1 + A_2 + \dots + A_N$

$$\text{Or } A_{m+1} = A_m e^{i\Phi} \Rightarrow A_2 = A_1 e^{i\Phi} \Rightarrow A_3 = A_2 e^{i\Phi} = A_1 e^{i2\Phi} \Rightarrow A_N = A_1 e^{i(N-1)\Phi}$$

$$\Rightarrow A(M) = A_1 + A_1 e^{i\Phi} + \dots + A_1 e^{i(N-1)\Phi} = A_1 (1 + e^{i\Phi} + \dots + e^{i(N-1)\Phi})$$

Suite géométrique de 1^{er} terme 1, de raison $e^{i\Phi}$ contenant N termes

$$1 + e^{i\Phi} + \dots + e^{i(N-1)\Phi} = \frac{1 - e^{iN\Phi}}{1 - e^{i\Phi}} \quad \Rightarrow A(M) = A_1 \frac{1 - e^{iN\Phi}}{1 - e^{i\Phi}}$$

$$\Rightarrow A(M) = A_1 \frac{1 - e^{iN\Phi}}{1 - e^{i\Phi}} = A_1 \frac{e^{i\frac{N\Phi}{2}}}{e^{i\frac{\Phi}{2}}} \frac{e^{-i\frac{N\Phi}{2}} - e^{i\frac{N\Phi}{2}}}{e^{-i\frac{\Phi}{2}} - e^{i\frac{\Phi}{2}}} = A_1 e^{i\frac{(N-1)\Phi}{2}} \frac{\sin(\frac{N\Phi}{2})}{\sin(\frac{\Phi}{2})}$$

On admet que l'amplitude de l'onde diffractée par la fente N° 1 de largeur h

$$A_1(M) = A_0 \text{sinc} \left[\frac{\pi h}{\lambda} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) \right]$$

L'amplitude de l'onde diffractée par N fentes s'écrit:

$$A(M) = NA_0 \text{sinc} \left[\frac{\pi h}{\lambda} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) \right] e^{i\frac{(N-1)\Phi}{2}} \frac{\sin(\frac{N\Phi}{2})}{N \sin(\frac{\Phi}{2})}$$

L'intensité de l'onde diffractée par N fentes s'écrit: $I(M) = A(M)A^*(M)$

$$I(M) = I_0 \text{sinc}^2 \left[\frac{\pi h}{\lambda} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) \right] \left[\frac{\sin(\frac{N\Phi}{2})}{N \sin(\frac{\Phi}{2})} \right]^2$$

Terme de diffraction
Terme d'interférences
Fonction réseau

$I_0 = (NA_0)^2$

II.2. Etude de la fonction réseau

La fonction réseau est **paire** et 2π périodique, elle admet des :

➤ Maxima principaux: $R(\Phi) \sim 1$ Pour $\sin(\Phi/2) \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \Phi = 2m\pi; m \in \mathbb{N} \quad \text{Or} \quad \Phi = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin(\theta) - \sin(\theta_0))$$

Formule des réseaux

$$\Rightarrow a (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = m\lambda$$

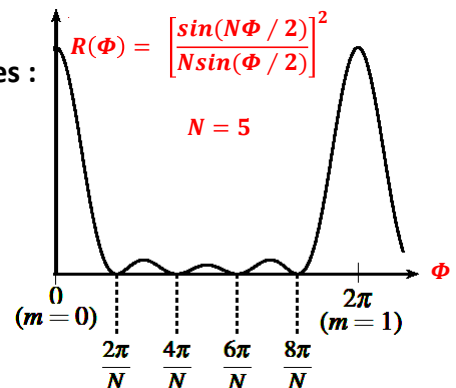
$$\sin(\theta_m) - \sin(\theta_0) = \frac{m\lambda}{a}$$

➤ Minima nuls: $R(\Phi) = 0$ Pour $\sin(N\Phi/2) \rightarrow 0$

$$\Phi = \frac{2k\pi}{N} + 2m\pi; m \in \mathbb{N} \text{ et } 0 < k < N$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} a (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = \frac{2k\pi}{N} + 2m\pi$$

$$\Rightarrow (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = \frac{k\lambda}{Na} + \frac{m\lambda}{a}$$



➤ Maxima secondaires: Pour $\sin(N\Phi/2) = \pm 1$
Et $\sin(\Phi/2) \neq 0$

$$\Phi = \frac{(2k+1)\pi}{N} + 2m\pi; m \in \mathbb{N} \text{ et } 0 < k < N$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} a (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = \frac{(2k+1)\pi}{N} + 2m\pi$$

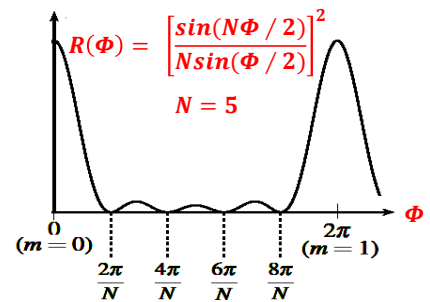
$$\Rightarrow (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = \frac{(2k+1)\lambda}{2Na} + \frac{m\lambda}{a}$$

Remarque:

- Entre deux maxima principaux il-y-a $N - 1$ minima nuls

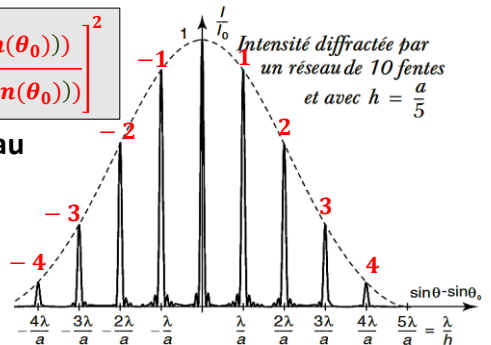
$$0 < \Phi = \frac{2k\pi}{N} < 2\pi \Rightarrow 0 < k < N \Rightarrow N - 1 \text{ minima nuls}$$

- Entre deux maxima principaux il-y-a $N - 2$ maxima secondaires



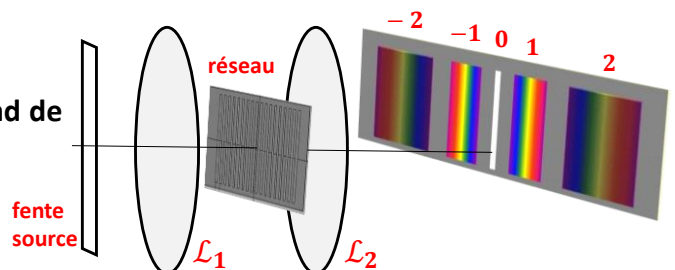
$$I(M) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi h}{\lambda} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) \right] \left[\frac{\sin(\frac{N\pi a}{\lambda} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)))}{N \sin(\frac{\pi a}{\lambda} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)))} \right]^2$$

- Les interférences constructives données par le réseau sont modulées par le phénomène de diffraction.
- En conséquence, l'intensité du spectre va diminuer avec l'ordre m . c'est bien ce que l'on observe expérimentalement.

**III. Spectromètre à réseau****III.1. Principe du spectromètre à réseau**

D'après la formule des réseaux, θ_m dépend de λ : le réseau est dispersif.

La fente source est éclairée par la source à analyser.

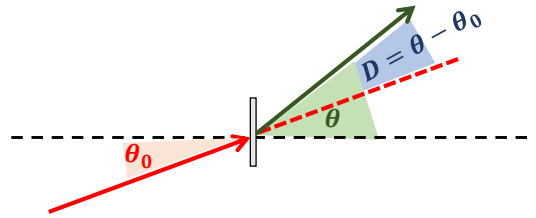


Dans le plan focal de la lentille $\mathcal{L}_2$ on observe :

- au centre (ordre 0), l'image géométrique de la fente source dans laquelle les radiations incidentes se superposent pour donner la couleur de la source.
- de part et d'autre en s'éloignant du centre, des spectres correspondant aux ordres $\pm 1, \pm 2 \dots$ dans lesquels le violet (v sur la figure) est le plus proche au centre et le rouge (r sur la figure) est le plus éloigné du centre.

III.2. Minimum de déviation

En observant dans la direction d'une interférence constructive d'ordre 1, on constate en faisant varier θ_0 (angle d'incidence) que la déviation du faisceau passe par un minimum.



Déterminer le minimum de déviation D_m pour un ordre m donné et réécrire la relation fondamentale des réseaux.

La déviation est: $D = \theta - \theta_0$ Au minimum de déviation on a: $\frac{dD}{d\theta_0} = \frac{d\theta}{d\theta_0} - 1 = 0 \Rightarrow d\theta = d\theta_0$

Un maximum d'ordre m vérifie $a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = m\lambda \Rightarrow d[a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0))] = 0$

$$\Rightarrow \cos(\theta)d\theta - \cos(\theta_0)d\theta_0 = 0 \Rightarrow \cos(\theta) = \cos(\theta_0) \Rightarrow \theta = \theta_0 \text{ ou } \theta = -\theta_0$$

➤ $\theta = \theta_0 \Rightarrow D = 0$ inutile

$\Rightarrow \theta_m = -\theta_0 \Rightarrow D_m = 2\theta_m$ Et la formule des réseaux devient: $a\left(\sin\left(\frac{D_m}{2}\right) - \sin\left(-\frac{D_m}{2}\right)\right) = m\lambda$

$$\Rightarrow 2a\sin\left(\frac{D_m}{2}\right) = m\lambda$$

Pour un ordre n donné, déterminer le pouvoir dispersif donné par: $\frac{dD_n}{d\lambda}$

Le maximum d'ordre n vérifie: $\sin(\theta_n) - \sin(\theta_0) = \frac{n\lambda}{a}$

À une variation $d\lambda$ correspond la variation $d\theta_n$ telle que:

$$\cos(\theta_n)d\theta_n = \frac{nd\lambda}{a} \Rightarrow \frac{d\theta_n}{d\lambda} = \frac{n}{a\cos(\theta_n)} \quad \text{Or } D_n = \theta_n - \theta_0 \Rightarrow \frac{dD_n}{d\lambda} = \frac{d\theta_n}{d\lambda}$$

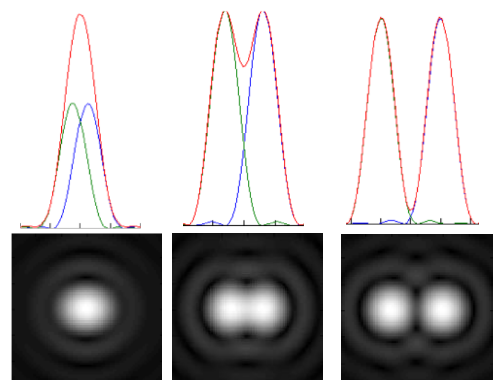
$$\Rightarrow \frac{dD_n}{d\lambda} = \frac{n}{a\cos(\theta_n)}$$

Cette grandeur caractérise la capacité du réseau à disperser les différentes radiation que contient la source à analyser.

III.3. Séparation d'un spectre d'ordre donné

Critère de Rayleigh :

Soit une source contenant deux radiations voisines λ et $\lambda + \Delta\lambda$; $\lambda \gg \Delta\lambda$. Dans un ordre donné, le réseau peut résoudre ces deux raies si la largeur angulaire qui sépare les maximums principaux des deux radiations est supérieure ou égale à la demi-largeur angulaire d'un maximum principal.



On définit le pouvoir de résolution du réseau par:

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}}$$

où $\Delta\lambda_{min}$ est l'écart de la limite de résolution.

Déterminer l'expression du pouvoir de résolution du réseau

➤ Écart angulaire $d\theta$ entre le max de λ et le max de $\lambda + d\lambda$

le max de λ à l'ordre m vérifie $\sin(\theta) - \sin(\theta_0) = \frac{m\lambda}{a}$

À une variation $d\lambda$ correspond la variation $d\theta$ telle que:

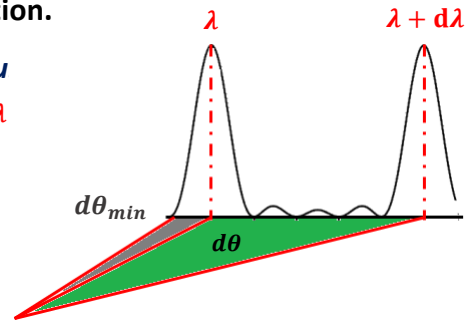
$$\cos(\theta)d\theta = \frac{md\lambda}{a} \quad \Rightarrow d\theta = \frac{md\lambda}{a\cos(\theta)}$$

➤ Écart angulaire $d\theta_{min}$ entre le max et le 1^{er} min de λ

entre le max et le 1^{er} min la phase varie de $d\Phi = \frac{2\pi}{N}$ Or $\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin(\theta) - \sin(\theta_0))$

$$\Rightarrow d\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \cos(\theta) d\theta \quad \text{Si } d\Phi = \frac{2\pi}{N} \quad \text{Alors } d\theta = d\theta_{min} \quad \text{D'où } \frac{2\pi}{\lambda} a \cos(\theta) d\theta_{min} = \frac{2\pi}{N}$$

$$\Rightarrow d\theta_{min} = \frac{\lambda}{Na\cos(\theta)}$$



Le critère de Rayleigh impose: $d\theta \geq d\theta_{min}$ À la limite de résolution: $d\theta = d\theta_{min}$ et $d\lambda = \Delta\lambda_{min}$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{md\lambda}{a\cos(\theta)}$$

$$\Rightarrow d\theta_{min} = \frac{\lambda}{Na\cos(\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{m\Delta\lambda_{min}}{a\cos(\theta)} = \frac{\lambda}{Na\cos(\theta)} \quad \text{le pouvoir de résolution s'écrit: } \mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}} = mN$$

⇒ le pouvoir de résolution augmente en augmentant l'ordre d'interférences et augmentation de N