

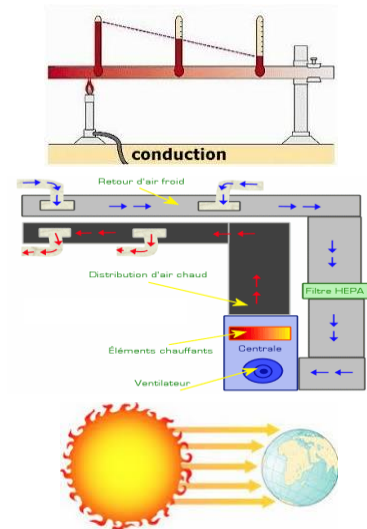
TRANSFERT THERMIQUE



- *Présentation et phénoménologie des modes de transfert thermique d'énergie*
- *Interpréter et utiliser la **loi phénoménologique de Fourier***
- *Établir l'équation de la diffusion thermique*
- *Régime stationnaire. Résistance thermique*
- *Coefficient de transfert thermique de surface, **loi de Newton**.*
- *Rayonnement d'équilibre thermique.*

Un transfert thermique peut s'opérer entre des systèmes leurs températures sont différentes. Le système dont la température la plus élevée cède de l'énergie au système dont la température est la plus basse. Le transfert thermique peut se faire sous trois modes :

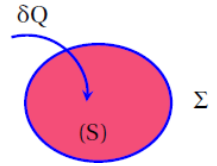
- **Conduction thermique (diffusion thermique)** : transfert thermique qui intervient dans un milieu de température non homogène et sans mouvement macroscopique de la matière (cas des solides)
- **Convection thermique** : transfert thermique qui intervient dans un milieu avec déplacement de la matière (cas des liquides et des gaz)
- **Rayonnement thermique** : la puissance thermique émise par tout corps à température non nulle sous forme de rayonnement électromagnétique.



I. Conduction thermique

I.1 Flux thermique

Soit un système (S) séparé de l'extérieur par une surface fermée (Σ) . Le système (S) reçoit algébriquement un transfert thermique δQ à travers (Σ) .

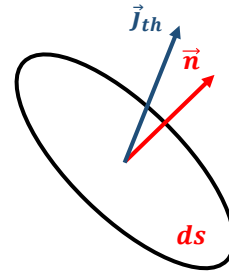


On appelle flux thermique (puissance thermique) Φ du système (S) , l'énergie thermique reçue par ce système par unité du temps $\Phi = \frac{\delta Q}{dt}$

Le flux thermique s'exprime en watt (W). C'est une grandeur algébrique (le système reçoit l'énergie thermique si $\Phi > 0$; il perd de l'énergie si $\Phi < 0$).

I.2. Vecteur densité volumique de courant thermique

Soit ds une surface élémentaire et $\vec{n}$ un vecteur unitaire. Le vecteur densité volumique de courant thermique $\vec{j}_{th}$ est défini par : $d\Phi = \vec{j}_{th} \cdot ds \cdot \vec{n}$ où $d\Phi$ est le flux thermique élémentaire traversant l'élément de surface ds .



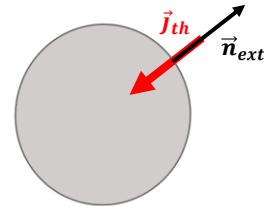
j_{th} s'exprime en $W \cdot m^{-2}$.

Cas d'une surface fermée :

Si le transfert thermique est reçu par le système, alors le flux est entrant $\Phi > 0$.

⇒ Le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}$ est dirigé vers l'intérieur

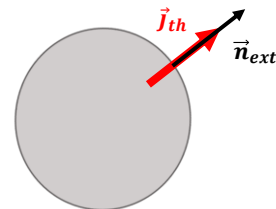
⇒ le produit scalaire $\vec{j}_{th} \cdot \vec{n}_{ext} < 0$.



Si le transfert thermique est cédé par le système, alors le flux est sortant $\Phi < 0$.

⇒ Le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}$ est dirigé vers l'extérieur

⇒ le produit scalaire $\vec{j}_{th} \cdot \vec{n}_{ext} > 0$.



Ces deux constatations nous amènent à ajouter un signe «-» dans l'expression de Φ pour une surface fermée si on l'exprime en fonction de $\vec{n}_{ext}$, soit :

$$\Phi = - \oint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot \vec{n}_{ext} dS$$

I.3. Loi de Fourier

Dans un milieu matériel de température non uniforme, le vecteur densité volumique du courant thermique suit la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \cdot \vec{grad} T$$

où λ représente la conductivité thermique du milieu qui s'exprime en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.

Le signe « $-$ » indique que le transfert thermique s'effectue toujours dans le sens des températures décroissantes.

Ordre de grandeur

Matériaux	air	sol	eau (293K)	béton	Acier (inox)
$\lambda (W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1})$	0,024	0,28	0,6	1,75	24

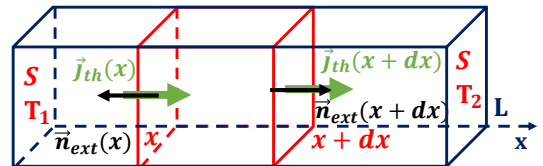
Analogie avec la loi d'Ohm

Conduction thermique	Flux thermique $\Phi = \iint \vec{j}_{th} \cdot ds \cdot \vec{n}$	Loi de Fourier $\vec{j}_{th} = -\lambda \cdot \vec{grad} T$
Conduction électrique	Courant électrique $I = \iint \vec{j} \cdot ds \cdot \vec{n}$	Loi d'Ohm $\vec{j} = -\gamma \cdot \vec{grad} V$

II. Bilan local d'énergie

Considérons un solide en forme de parallélépipède de section S et de longueur L le long de l'axe Ox .

Le solide est en contact avec deux thermostats de températures différentes $T_1(x=0, t) > T_2(x=L, t)$.



On suppose que, d'une part, il n'y a aucune source d'énergie à l'intérieur du système, et d'autre part, la *surface latérale du solide est calorifugée*. Les transferts d'énergie sont donc uniquement dus à la diffusion thermique dans le sens des x croissants.

En appliquant le premier principe de la thermodynamique à un volume élémentaire $d\tau$ situé entre les deux abscisses x et $x+dx$, établir l'équation de conservation de l'énergie interne U .

le premier principe de la thermodynamique s'écrit: $dU = \delta Q + \delta W$

Entre t et $t+dt$, l'énergie interne varie de

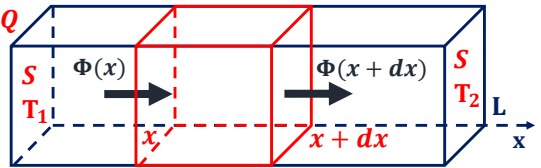
$$dU = U(t+dt) - U(t) = \frac{\partial U}{\partial t} dt = \frac{\partial u}{\partial t} d\tau dt \quad u \text{ l'énergie interne volumique}$$

$$\Rightarrow dU = \frac{\partial u}{\partial t} d\tau dt$$

Pour un solide (volume constant), $\delta W = 0 \Rightarrow dU = \delta Q$

$$\delta Q = (\Phi(x) - \Phi(x + dx))dt = (J_{th}(x) - J_{th}(x + dx))Sdt$$

$$= -\frac{\partial J_{th}}{\partial x} S dx dt \Rightarrow \delta Q = -\frac{\partial J_{th}}{\partial x} d\tau dt$$



$$\Rightarrow dU = \frac{\partial u}{\partial t} d\tau dt = \delta Q = -\frac{\partial J_{th}}{\partial x} d\tau dt \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} d\tau dt + \frac{\partial J_{th}}{\partial x} d\tau dt = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial J_{th}}{\partial x} = 0$$

À trois dimensions: $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial J_{th}}{\partial x} + \frac{\partial J_{th}}{\partial y} + \frac{\partial J_{th}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \vec{J}_{th} = 0$ *l'équation de la conservation de l'énergie*

Dans le cas où il existe à l'intérieur du système une source de puissance qui délivre la puissance volumique P_v , la quantité de chaleur échangée devient

$$\delta Q = -\frac{\partial J_{th}}{\partial x} d\tau dt + P_v d\tau dt \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} d\tau dt = -\frac{\partial J_{th}}{\partial x} d\tau dt + P_v d\tau dt \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial J_{th}}{\partial x} = P_v$$

À trois dimensions: $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \vec{J}_{th} = P_v$ *l'équation de la conservation de l'énergie*

- Remarque:
- Si $P_v > 0$, le système reçoit de l'énergie
 - Si $P_v < 0$, le système perd de l'énergie

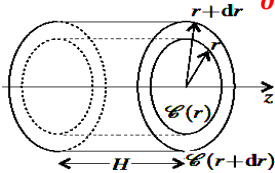
Cas où le courant thermique s'écoule de l'axe du cylindre vers sa périphérie : $\vec{J}_{th} = J_{th} \vec{u}_r$

$$\Rightarrow dU = \frac{\partial u}{\partial t} d\tau dt = \delta Q = (\Phi(r) - \Phi(r + dr))dt = (S(r)J_{th}(r) - S(r + dr)J_{th}(r + dr))dt$$

$$S(r) = 2\pi H r; S(r + dr) = 2\pi H(r + dr) \text{ et } d\tau = 2\pi H r dr$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} 2\pi H r dr = 2\pi H (r J_{th}(r) - (r + dr) J_{th}(r + dr)) = -2\pi H \frac{\partial(r J_{th}(r))}{\partial r} dr$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} r + \frac{\partial(r J_{th}(r))}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r J_{th}(r))}{\partial r} = 0$$



Cas où le courant thermique s'écoule radialement à l'intérieur d'une sphère: $\vec{J}_{th} = J_{th} \vec{e}_r$

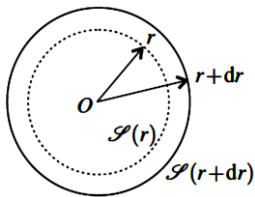
$$\Rightarrow dU = \frac{\partial u}{\partial t} d\tau dt = \delta Q = (\Phi(r) - \Phi(r + dr))dt$$

$$= (S(r)J_{th}(r) - S(r + dr)J_{th}(r + dr))dt$$

$$S(r) = 4\pi r^2; S(r + dr) = 4\pi(r + dr)^2 \text{ et } d\tau = 4\pi r^2 dr$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} 4\pi r^2 dr = 4\pi (r^2 J_{th}(r) - (r + dr)^2 J_{th}(r + dr)) = -4\pi \frac{\partial(r^2 J_{th}(r))}{\partial r} dr$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} r^2 + \frac{\partial(r^2 J_{th}(r))}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 J_{th}(r))}{\partial r} = 0$$



III. Équation de la diffusion thermique

Le matériau solide est caractérisé par trois grandeurs que l'on supposera constantes : masse volumique ρ , capacité thermique massique c et conductivité thermique λ .

Établir l'équation de la diffusion thermique.

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{th} = 0 \text{ or } u = \rho c T \text{ et } \vec{j}_{th} = -\lambda \cdot \vec{\text{grad}} T \Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \text{div}(\vec{\text{grad}} T) = 0 \Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T = 0 \text{ soit } D = \frac{\lambda}{\rho c} \text{ Diffusivité du milieu, s'exprime en } m^2 s^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} - D \Delta T = 0$$

C'est l'équation de la diffusion thermique ou l'équation de la chaleur

Dans le cas où le système présente une source qui délivre la puissance volumique P_v

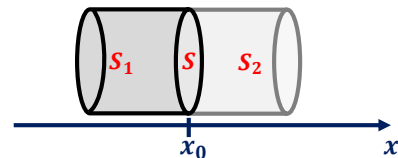
$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{th} = P_v \Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = P_v \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T = \frac{P_v}{\rho c} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} - D \Delta T = \frac{P_v}{\rho c}$$

Pour connaître le profile de la température, on doit résoudre l'équation de la chaleur en tenant compte des conditions aux limites et la condition initiale

IV. Conditions aux limites

IV.1. Contact parfait solide-solide

Lorsque deux solides S_1 et S_2 sont parfaitement ajustés sur leurs surface de contact S , le contact est dit *parfait* et il y a continuité:

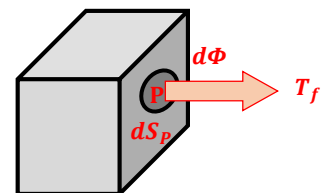


- de la température sur toute la surface de contact : $T(x_0^-, t) = T(x_0^+, t)$.
- du flux sortant du solide S_1 et celui entrant dans le solide S_2 : $\Phi(x_0^-) = \Phi(x_0^+)$
 - ✓ En particulier si le solide S_2 est calorifugé, il bloque le flux thermique : soit $\Phi(x_0^+) = 0$ alors $\Phi(x_0^-) = 0$ par continuité du flux.

IV.2. Interface solide-fluide ; loi de Newton

Lorsque le solide est en contact en P avec un fluide à la température T_f , le flux élémentaire passant du solide au fluide à travers la surface dS_P est donné par la loi de Newton :

$$d\Phi = h[T(P, t) - T_f]dS_P \text{ ou bien } \vec{j}_{th} = h[T(P, t) - T_f]$$



h : Coefficient conducto-convectif ou coefficient de Newton ($W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$).

V. Régime stationnaire

V.1. Résolution de l'équation de la chaleur en régime stationnaire

Montrer qu'en régime stationnaire le champ de température dans un matériau dépourvu de sources de chaleur vérifie l'équation de Laplace.

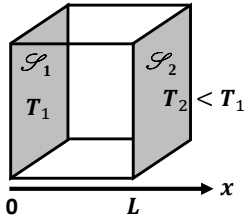
L'équation de la chaleur s'écrit $\frac{\partial T}{\partial t} - D\Delta T = 0$ Or en régime stationnaire $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$

Résoudre l'équation de Laplace dans les trois cas :

a. Cas unidimensionnel

b. Symétrie cylindrique

c. Symétrie sphérique



$$T = T(x) \quad \Delta T = 0 \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T = ax + b \quad T(x=0) = T_1 = b$$

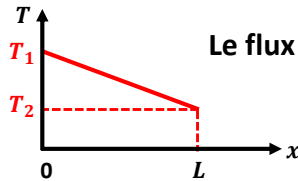
$$T(x=L) = T_2 = aL + T_1 \Rightarrow a = \frac{T_2 - T_1}{L} \Rightarrow T = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \cdot \text{grad } T = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x \Rightarrow \vec{j}_{th} = \frac{\lambda}{L} (T_1 - T_2) \vec{e}_x$$

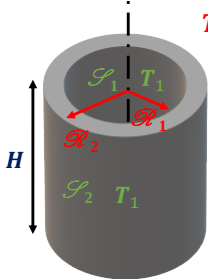
Le flux thermique envoyé de $\mathcal{S}_1$ vers $\mathcal{S}_2$ s'écrit:

$$d\Phi = \vec{j}_{th} \cdot ds \cdot \vec{e}_x \Rightarrow \Phi = \iint \vec{j}_{th} \cdot ds \cdot \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{\mathcal{S} \lambda}{L} (T_1 - T_2) \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1$$



b. Symétrie cylindrique

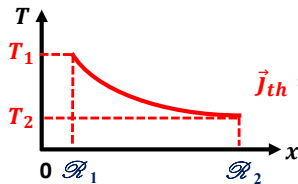


$$T = T(r) \quad \Delta T = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{dT}{dr} = a \Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{a}{r} \Rightarrow T(r) = a \ln(r) + b$$

$$\Rightarrow T(R_1) = a \ln(R_1) + b = T_1 \Rightarrow a \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = T_2 - T_1 \Rightarrow a = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$\Rightarrow b = T_1 - a \ln(R_1) \Rightarrow b = T_1 - \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln(R_1)$$

$$\Rightarrow T(r) = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln(r) + T_1 - \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln(R_1) \Rightarrow T(r) = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) + T_1$$

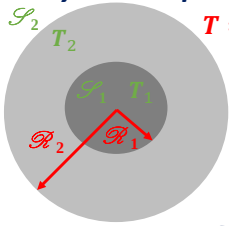


$$\vec{j}_{th} = -\lambda \cdot \text{grad } T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r \Rightarrow \vec{j}_{th} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

Le flux thermique envoyé de $\mathcal{S}_1$ vers $\mathcal{S}_2$ s'écrit: $d\Phi = \vec{j}_{th} \cdot ds \cdot \vec{e}_r$

$$\Rightarrow \Phi = \iint \vec{j}_{th} \cdot ds \cdot \vec{e}_r \quad ds = r dz d\varphi \Rightarrow \Phi = \iint \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} dz d\varphi \Rightarrow \Phi = \frac{2\pi H \lambda}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} (T_1 - T_2)$$

c. Symétrie sphérique

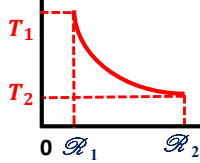


$$T = T(r) \quad \Delta T = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dT}{dr}) = 0 \Rightarrow r^2 \frac{dT}{dr} = a \Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{a}{r^2} \Rightarrow T(r) = \frac{b}{r} + c$$

$$\Rightarrow T(R_1) = \frac{b}{R_1} + c = T_1 \quad \Rightarrow b \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = T_1 - T_2 \quad \Rightarrow b = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (T_1 - T_2)$$

$$\Rightarrow T(R_2) = \frac{b}{R_2} + c = T_2 \quad c = T_2 - \frac{b}{R_2} \quad \Rightarrow c = T_2 - \frac{R_1}{R_2 - R_1} (T_1 - T_2)$$

$$\Rightarrow T(r) = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (T_1 - T_2) \frac{1}{r} + T_2 - \frac{R_1}{R_2 - R_1} (T_1 - T_2) \quad \Rightarrow T(r) = \frac{R_1 (T_1 - T_2)}{R_2 - R_1} \left(\frac{R_2}{r} - 1 \right) + T_2$$



$$\vec{j}_{th} = -\lambda \cdot \vec{grad} T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{j}_{th} = \frac{\lambda R_1 R_2 (T_1 - T_2)}{(R_2 - R_1) r^2} \vec{e}_r$$

Le flux thermique envoyé de $\mathcal{S}_1$ vers $\mathcal{S}_2$ s'écrit: $d\Phi = \vec{j}_{th} \cdot ds \cdot \vec{e}_r$

$$\Rightarrow \Phi = \iint \vec{j}_{th} \cdot ds \cdot \vec{e}_r \quad ds = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

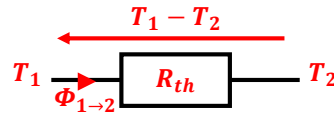
$$\Rightarrow \Phi = \iint \frac{\lambda R_1 R_2 (T_1 - T_2)}{(R_2 - R_1) r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{4\pi\lambda R_1 R_2}{R_2 - R_1} (T_1 - T_2)$$

V.2. Résistance thermique

On appelle résistance thermique R_{th} (conductance thermique $G_{th} = R_{th}^{-1}$) du conducteur thermique compris entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, le rapport :

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}} \quad (W^{-1} \cdot K)$$



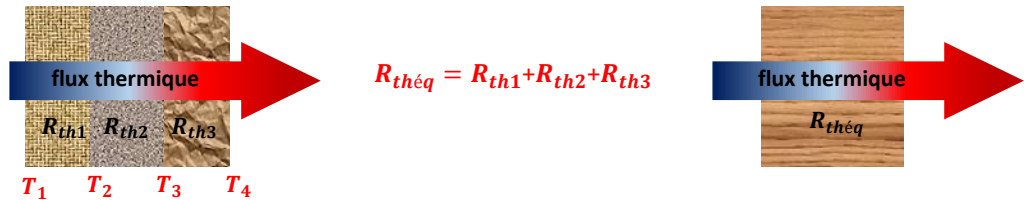
Où $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ est le flux thermique passant de $\mathcal{S}_1$ à $\mathcal{S}_2$.

a. Cas unidimensionnel $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mathcal{S} \lambda}{L} (T_1 - T_2)$ Or $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}} \Rightarrow R_{th} = \frac{L}{\mathcal{S} \lambda}$

b. Symétrie cylindrique $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{2\pi H \lambda}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} (T_1 - T_2)$ Or $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}} \Rightarrow R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi H \lambda}$

c. Symétrie sphérique $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{4\pi\lambda R_1 R_2}{R_2 - R_1} (T_1 - T_2)$ Or $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}} \Rightarrow R_{th} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi\lambda R_1 R_2}$

Quand deux ou plusieurs matériaux sont traversés successivement par le même flux thermique, on dit qu'ils sont en série, la résistance thermique équivalente est la somme des résistances thermiques.



Quand deux ou plusieurs matériaux sont soumis à la même différence de température, on dit qu'ils sont en parallèle, la conductance thermique équivalente est la somme des conductances thermiques.

