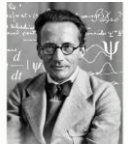


EVOLUTION D'UNE PARTICULE QUANTIQUE

I. Equation de Schrödinger

I.1. Enoncé

On considère le mouvement d'une particule quantique de masse m , dans un référentiel R . L'interaction de la particule avec les autres systèmes physiques est représentée par une énergie potentielle, notée $V(M, t)$. L'équation décrivant l'évolution dans l'espace et dans le temps de la fonction d'onde de la particule quantique a été proposée par *E. Schrödinger*. Elle s'écrit comme suit:



$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(M, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(M, t) + V(M, t) \Psi(M, t)$$

Dans le cas d'un problème unidimensionnel le long de Ox , cette équation devient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x, t) \Psi(x, t)$$

Remarque:

- L'équation de Schrödinger est linéaire, on peut superposer des solutions pour construire d'autres solutions.

- L'équation de Schrödinger est du premier ordre par rapport à la variable temporelle. Ainsi, si la fonction d'onde est complètement connue à un instant initial, elle le sera à tout instant ultérieur.
- L'équation de Schrödinger joue en mécanique ondulatoire le même rôle que la RFD en mécanique classique.

I.2. L'équation de Schrödinger des états stationnaires ou indépendante du temps

On appelle état stationnaire un état du système caractérisé par une fonction d'onde qui s'écrit sous la forme :

$$\Psi(x, t) = \Phi(x)f(t)$$

où $\Phi(x)$ et $f(t)$ sont a priori deux fonctions à valeurs complexes.

Si un système quantique se trouve dans un état stationnaire, il y reste sans changer de caractéristiques.

Déduire que la densité de probabilité de présence associée à un état stationnaire est indépendante du temps.

La fonction d'onde d'un état stationnaire s'écrit sous la forme: $\Psi(x, t) = \Phi(x)f(t)$

La densité de probabilité s'écrit: $|\Psi(x, t)|^2 = \Psi(x, t)\Psi(x, t)^* = \Phi(x)\Phi(x)^* f(t)f(t)^* = |f(t)|^2 |\Phi(x)|^2$

La fonction d'onde doit être normalisée sur D : domaine d'existence de la particule

$$\int_D |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \Rightarrow |f(t)|^2 \int_D |\Phi(x)|^2 dx = 1 \quad \forall t \Rightarrow |f(t)|^2 = cte$$

On peut choisir $|f(t)|^2 = 1$ et rentrer la constante dans $\Phi(x)$, on obtient $\int_D |\Phi(x)|^2 dx = 1$

⇒ La densité de probabilité de présence associée à un état stationnaire est indépendante du temps $|\Psi(x, t)|^2 = |\Phi(x)|^2$

On suppose que le potentiel n'est fonction que de l'espace. Déterminer l'équation vérifiée par $\Phi(x)$ appelée équation de Schrödinger des états stationnaires.

Dans le cas d'un problème unidimensionnel le long de Ox , l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x)\Psi(x, t) \quad \Psi(x, t) = \Phi(x)f(t)$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x)f(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x)f(t) + V(x)\Phi(x)f(t)$$

$$\Rightarrow i\hbar \Phi(x) \frac{df(t)}{dt} = -f(t) \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + f(t)V(x)\Phi(x) \quad \text{Soit en divisant par } \Psi(x, t) = \Phi(x)f(t)$$

$$\Rightarrow \frac{i\hbar}{f(t)} \frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{\Phi(x)} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + V(x)\Phi(x) \right] = E$$

Ne dépend que du temps

Ne dépend que de x

Pour qu'il y ait égalité quelque soient x et t , il faut que les deux membres soient constants. cette constante s'identifie à l'énergie E de la particule quantique. On obtient alors:

$$\frac{i\hbar}{f(t)} \frac{df(t)}{dt} = E \Rightarrow \frac{df(t)}{f(t)} = -i \frac{E}{\hbar} dt \Rightarrow f(t) = e^{-i \frac{E}{\hbar} t} = e^{-i\omega t} \quad \text{Puisque } |f(t)|^2 = 1$$

Où $\omega = \frac{E}{\hbar}$ est la pulsation de l'onde associée à la particule quantique d'énergie $E = \hbar\omega = h\nu$

La fonction d'onde s'écrit alors: $\Psi(x, t) = e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \Phi(x) = e^{-i\omega t} \Phi(x)$

Le deuxième membre $\frac{1}{\Phi(x)} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + V(x)\Phi(x) \right] = E$ donne

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + V(x)\Phi(x) = E\Phi(x) \quad \text{équation de Schrödinger des états stationnaires}$$

On définit l'opérateur Hamiltonien: $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \Rightarrow H\Phi(x) = E\Phi(x)$ Équation aux valeurs propres

$\Phi(x)$ sont les fonctions d'ondes propres de l'opérateur H associées aux valeurs propres E

L'équation de Schrödinger s'écrit alors: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = H\Psi(x, t)$

II. Evolution d'une particule quantique libre

II.1. Définition d'une particule quantique libre

On appelle particule quantique libre, une particule évoluant sans interaction $V(x) = 0$:

Dans le référentiel R , la quantité de mouvement de la particule quantique est notée $\vec{P}$ et son

énergie mécanique se confond avec son énergie cinétique: $E = E_c = \frac{P^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

II.2. Fonction d'onde associée à une particule libre

On considère une particule quantique libre. Déterminer la forme de la fonction propre $\Phi(x)$.

L'équation de Schrödinger des états stationnaires $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + V(x)\Phi(x) = E\Phi(x)$ Or $V(x) = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = E\Phi(x) \Rightarrow \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Phi(x) = 0 \quad \text{Or } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + k^2\Phi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

Interpréter la forme générale de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ associée à la particule libre.

$\Rightarrow \Psi(x, t) = e^{-i\omega t} \Phi(x) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)}$ La forme générale de la fonction d'onde qui décrit l'évolution dans le temps d'un état stationnaire d'une particule libre est celle d'une OPPM. La densité de probabilité s'écrit: $|\Psi(x, t)|^2 = \Psi(x, t)\Psi(x, t)^* = |\Phi(x)|^2$

$|\Psi(x, t)|^2 = (Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)})(Ae^{-i(kx - \omega t)} + Be^{i(kx + \omega t)}) = A^2 + AB e^{i2kx} + BA e^{-i2kx} + B^2$
 $|\Psi(x, t)|^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos(2kx)$ ne dépend pas du temps, il s'agit bien d'un état stationnaire.

Notons que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx \neq 1$ une fonction d'onde de type OPPM n'est pas normalisable, elle n'a donc aucune réalité physique.

En s'appuyant sur l'inégalité d'Heisenberg spatiale, montrer qu'une telle fonction d'onde correspond à une particule non localisée.

la fonction d'onde $\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)} = Ae^{\frac{i}{\hbar}(Px - Et)} + Be^{-\frac{i}{\hbar}(Px + Et)}$ $P = \hbar k$
et
 $E = \hbar \omega$
 $\Psi(x, t)$ correspond à une particule libre d'impulsion $P = \sqrt{2mE}$ exactement définie $\Rightarrow \Delta P = 0$

Or l'inégalité d'Heisenberg spatiale s'écrit: $\Delta P \cdot \Delta x \geq \hbar/2$ Si $\Delta P = 0$ Alors $\Delta x = \infty$

Donc, la particule quantique correspondante est non localisée, ce qui est absurde.

II.3. Représentation d'une particule quantique libre par un paquet d'ondes

Une particule quantique libre est décrite par un paquet d'onde : superposition d'états stationnaires (c'est-à-dire d'ondes planes progressives) d'énergies différentes :

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} A(p) e^{i(px - Et)/\hbar} dp; \quad p = \hbar k.$$

Montrer que la localisation de la particule peut s'obtenir par superposition d'ondes planes.

En créant un paquet d'onde, on obtient plusieurs impulsions $\Rightarrow \Delta P \neq 0$ Or $\Delta P \cdot \Delta x \geq \hbar/2$

Donc $\Delta x \neq \infty$ ce qui prouve la localisation de la particule

Déterminer la relation de dispersion ; en déduire la vitesse de phase et la vitesse du groupe

L'énergie: $E = \hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ La relation de dispersion: $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$
 La vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{P}{2m} = \frac{v}{2}$ La vitesse du groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{P}{m} = v$

Le paquet d'onde se déplace à la vitesse de la particule

II.4. Vecteur densité de courant de probabilité

Le vecteur densité de courant de probabilité est défini comme le produit de la densité de probabilité de présence de la particule et la vitesse du groupe du paquet d'onde représentant la particule, soit alors :

$$\vec{j}(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$$

III. Evolution d'une particule quantique dans un potentiel continu par morceau

On s'intéresse à un flux de particules d'énergie E évoluant dans un potentiel $V(x) = V_0$.

Déterminer la forme des fonctions d'ondes des états stationnaires $\Psi(x, t) = \Phi(x) \exp(-iEt/\hbar)$.

La fonction d'onde propre $\Phi(x)$ obéit à l'équation de Schrödinger des états stationnaires

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + V_0 \Phi(x) = E \Phi(x) \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + (E - V_0) \Phi(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \Phi(x) = 0$$

Deux cas se présentent: $E > V_0$ Ou bien $E < V_0$

1^{er} cas $E > V_0$ Soit $k^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$; $k \in \mathbb{R}$ 2^{ième} cas $E < V_0$ Soit $q^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$; $q \in \mathbb{R}$

L'équation de Schrödinger $\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + k^2 \Phi(x) = 0$

$$\Rightarrow \Phi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$\Psi(x, t) = (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})e^{-i\frac{E}{\hbar}t}; E = \hbar\omega$$

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)}$$

$\Rightarrow$ Si $E > V_0$, la forme des fonctions d'onde des états stationnaires est celle des OPPM

L'équation de Schrödinger $\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} - q^2 \Phi(x) = 0$

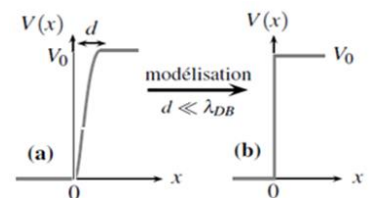
$$\Rightarrow \Phi(x) = Ae^{qx} + Be^{-qx}$$

$$\Psi(x, t) = (Ae^{qx} + Be^{-qx})e^{-i\frac{E}{\hbar}t}; E = \hbar\omega$$

$\Rightarrow$ Si $E < V_0$, la forme des fonctions d'onde des états stationnaires est celle des ondes évanescentes

III.1. Evolution dans une marche de potentiel

Le modèle de la marche de potentiel correspond au profil d'énergie potentielle représenté sur la figure (a). Dans le cas où la longueur d'onde de de Broglie des particules est très supérieure à la distance caractéristique de variation du potentiel, on peut considérer un profil idéalisé d'énergie potentielle représenté sur la figure (b).



$$\text{Le potentiel } V(x) \text{ correspondant est : } V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ V_0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Ce modèle permet d'étudier des situations d'intérêt pratique dont nous donnons ici quelques exemples :

- Potentiel d'extraction d'un électron hors d'un conducteur : l'électron est quasi-libre de se déplacer dans le métal, et voit une "frontière" potentiel importante pour sortir du conducteur.
- Surface de contact entre deux matériaux portés à des potentiels électriques différents.

On considère des particules incidentes, d'énergie E , venant de $x \rightarrow -\infty$ sur cette marche de potentiel. Déterminer les fonctions d'onde des états stationnaires $\Psi(x, t) = \Phi(x) \exp(-iEt/\hbar)$; $E = \hbar\omega$

La mécanique classique prévoit que les particules traversent la marche sans aucune chance de réflexion si et seulement si $E > V_0$.

Dans le cas contraire ($E < V_0$), la particule n'a aucune chance de franchir la barrière. L'analyse quantique doit passer par la résolution de l'équation de Schrödinger. La fonction d'onde propre

$\Phi(x)$ obéit à l'équation de Schrödinger des états stationnaires $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + V(x)\Phi(x) = E\Phi(x)$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + (E - V(x))\Phi(x) = 0 \quad \Rightarrow \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2} \Phi(x) = 0$$

Zone 1: $V(x) = 0$ $\Rightarrow \frac{d^2\Phi_1(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Phi_1(x) = 0$ soit $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow \frac{d^2\Phi_1(x)}{dx^2} + k_1^2 \Phi_1(x) = 0$

$$\Rightarrow \Phi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \Rightarrow \Psi_1(x, t) = e^{-i\omega t} \Phi_1(x) = Ae^{i(k_1x - \omega t)} + Be^{-i(k_1x + \omega t)} = \Psi_{1i}(x, t) + \Psi_{1r}(x, t)$$

Dans la zone 1, la fonction d'onde est la superposition de deux OPPM, une onde incidente qui s'écrit sous la forme $\Psi_{1i}(x, t) = Ae^{i(k_1x - \omega t)}$ et une autre réfléchie qui s'écrit $\Psi_{1r}(x, t) = Be^{-i(k_1x + \omega t)}$

Zone 2: $V(x) = V_0$

L'équation de Schrödinger

$$\Rightarrow \frac{d^2\Phi_2(x)}{dx^2} + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \Phi_2(x) = 0$$

Deux cas se présentent: $E > V_0$ Ou bien $E < V_0$

1^{er} cas: $E > V_0$ Soit $k_2^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$; $k \in \mathbb{R}$ L'éq de Schrödinger $\frac{d^2\Phi_2(x)}{dx^2} + k_2^2 \Phi_2(x) = 0$

$$\Rightarrow \Phi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} \Rightarrow \Psi_2(x, t) = e^{-i\omega t} \Phi_2(x) = Ce^{i(k_2x - \omega t)} + De^{-i(k_2x + \omega t)}$$

Or $D = 0$ car il n'y a pas des particules venant de $x \rightarrow +\infty$ $\Rightarrow \Psi_2(x, t) = \Psi_{2t}(x, t) = Ce^{i(k_2x - \omega t)}$

Pour déterminer les constantes A , B et C , on doit exploiter la continuité de la fonction d'onde, et de sa dérivée première si la discontinuité de l'énergie potentielle est finie.

➤ continuité de $\Phi(x)$ en $x = 0$: $\Phi_1(x = 0) = \Phi_2(x = 0) \Rightarrow A + B = C$ (1)

➤ continuité de $\frac{d\Phi}{dx}$ en $x = 0$: $\left. \frac{d\Phi_1}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\Phi_2}{dx} \right|_{x=0} \Rightarrow ik_1A - ik_1B = ik_2C \Rightarrow A - B = \frac{k_2}{k_1}C$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow 2A = (1 + \frac{k_2}{k_1})C \Rightarrow C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}A$ (1) $\Rightarrow B = C - A = \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2} - 1 \right)A \Rightarrow B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}A$

$$\Psi_{1i}(x, t) = Ae^{i(k_1x - \omega t)}$$

$$\Psi_{1r}(x, t) = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} Ae^{-i(k_1x + \omega t)}$$

$$\Rightarrow \Psi_1(x, t) = A \left\{ e^{i(k_1x - \omega t)} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-i(k_1x + \omega t)} \right\}$$

$$\Rightarrow \Psi_2(x, t) = \Psi_{2t}(x, t) = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} Ae^{i(k_2x - \omega t)}$$

$$\Phi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$

L'équation de Schrödinger

$$\Rightarrow \frac{d^2\Phi_2(x)}{dx^2} + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}\Phi_2(x) = 0$$

2^{ème} cas: $E < V_0$ Soit $q^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}; q \in \mathbb{R}$ L'éq de Schrödinger $\frac{d^2\Phi_2(x)}{dx^2} - q^2\Phi_2(x) = 0$

$$\Rightarrow \Phi_2(x) = \alpha e^{-qx} + \beta e^{qx} \quad \Rightarrow \Psi_2(x, t) = e^{-i\omega t} \Phi_2(x) = \alpha e^{-qx} e^{-i\omega t} + \beta e^{qx} e^{-i\omega t}$$

Or $\beta = 0$ car $\Phi_2(x)$ doit converger lorsque $x \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow \Psi_2(x, t) = \Psi_{2t}(x, t) = \alpha e^{-qx} e^{-i\omega t}$$

➤ continuité de $\Phi(x)$ en $x = 0$: $\Phi_1(x=0) = \Phi_2(x=0) \Rightarrow A + B = \alpha$ (1)

➤ continuité de $\frac{d\Phi}{dx}$ en $x = 0$: $\left. \frac{d\Phi_1}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\Phi_2}{dx} \right|_{x=0} \Rightarrow ik_1A - ik_1B = -q\alpha \Rightarrow A - B = \frac{iq}{k_1}\alpha$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow 2A = (1 + \frac{iq}{k_1})\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k_1}{k_1 + iq}A$ (1) $\Rightarrow B = \alpha - A = \left(\frac{2k_1}{k_1 + iq} - 1 \right)A \Rightarrow B = \frac{k_1 - iq}{k_1 + iq}A$

$$\Psi_{1i}(x, t) = Ae^{i(k_1x - \omega t)}$$

$$\Psi_{1r}(x, t) = \frac{k_1 - iq}{k_1 + iq} Ae^{-i(k_1x + \omega t)}$$

$$\Rightarrow \Psi_1(x, t) = A \left\{ e^{i(k_1x - \omega t)} + \frac{k_1 - iq}{k_1 + iq} e^{-i(k_1x + \omega t)} \right\}$$

$$\Rightarrow \Psi_2(x, t) = \Psi_{2t}(x, t) = \frac{2k_1}{k_1 + iq} Ae^{-qx} e^{-i\omega t}$$

Les résultats du 2^{ème} cas peuvent être déduits de ceux du 1^{er} cas en remplaçant k_2 par iq

Associer un courant de probabilité aux flux incident, réfléchi et transmis et déterminer les probabilités de réflexion R et de transmission T des flux. Commenter.

1^{er} cas: $E > V_0$ $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ $k_2^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$

$\Psi_{1i}(x, t) = Ae^{i(k_1x - \omega t)}$ Le courant de probabilité

$$\vec{j}_{1i}(x, t) = |\Psi_{1i}(x, t)|^2 \frac{\hbar \vec{k}_1}{m} = |A|^2 \frac{\hbar \vec{k}_1}{m}$$

$$\Psi_{1r}(x, t) = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} Ae^{-i(k_1x + \omega t)}$$

$$\Rightarrow \vec{j}_{1r}(x, t) = -|\Psi_{1r}(x, t)|^2 \frac{\hbar \vec{k}_1}{m} = -\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 |A|^2 \frac{\hbar \vec{k}_1}{m}$$

$$\Psi_{2t}(x, t) = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} Ae^{i(k_2x - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \vec{j}_{2t}(x, t) = |\Psi_{2t}(x, t)|^2 \frac{\hbar \vec{k}_2}{m} = \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right)^2 |A|^2 \frac{\hbar \vec{k}_2}{m}$$

La probabilité de réflexion est définie par

$$R = \frac{\|\vec{j}_{1r}(x, t)\|}{\|\vec{j}_{1i}(x, t)\|} \Rightarrow R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \left(\frac{1 - k_2/k_1}{1 + k_2/k_1} \right)^2$$

$$k_2/k_1 = \sqrt{(E - V_0)/E} = \sqrt{1 - V_0/E}$$

$$\Rightarrow R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}} \right)^2$$

La probabilité de transmission est définie par

$$T = \frac{\|\vec{j}_{2t}(x, t)\|}{\|\vec{j}_{1i}(x, t)\|} \Rightarrow T = k_2 \left\{ \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right\}^2 \frac{1}{k_1} \Rightarrow T = \frac{4k_1k_2}{\{k_1 + k_2\}^2} = \frac{4k_2/k_1}{\{1 + k_2/k_1\}^2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{4\sqrt{1 - V_0/E}}{\{1 + \sqrt{1 - V_0/E}\}^2}$$

Les expressions de **R** et **T** appellent les commentaires suivants:

$$\Rightarrow R = \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}} \right\}^2 \quad \Rightarrow T = \frac{4\sqrt{1 - V_0/E}}{\{1 + \sqrt{1 - V_0/E}\}^2}$$

- La probabilité de réflexion n'est jamais nulle, il est possible qu'une particule soit réfléchi. C'est un effet purement quantique et n'a pas d'équivalent classique.
- **R + T = 1** traduit la conservation de la probabilité. La particule est soit réfléchi soit transmise
- Dans la limite **V₀ << E**, **R → 0** et **T → 1**, l'influence de la marche est gommé

2^{ème} cas: **E < V₀**

$$\Psi_{1i}(x, t) = Ae^{i(k_1x - \omega t)}$$

Le courant de probabilité

$$\vec{j}_{1i}(x, t) = |\Psi_{1i}(x, t)|^2 \frac{\hbar \vec{k}_1}{m} = |A|^2 \frac{\hbar \vec{k}_1}{m}$$

$$\Psi_{1r}(x, t) = \frac{k_1 - iq}{k_1 + iq} Ae^{-i(k_1x + \omega t)}$$

$$\Rightarrow \vec{j}_{1r}(x, t) = -|\Psi_{1r}(x, t)|^2 \frac{\hbar \vec{k}_1}{m} = -|A|^2 \frac{\hbar \vec{k}_1}{m}$$

$$\text{Car } \left| \frac{k_1 - iq}{k_1 + iq} \right| = 1$$

$$\Psi_{2t}(x, t) = \frac{2k_1}{k_1 + iq} Ae^{-qx} e^{-i\omega t}$$

Ψ_{2t}(x, t) n'est pas une OPPM, on ne peut pas définir un courant de probabilité

La probabilité de réflexion est

$$R = \frac{\|\vec{j}_{1r}(x, t)\|}{\|\vec{j}_{1i}(x, t)\|} = 1$$

⇒ La particule est forcément réfléchi

Représenter la densité de probabilité de présence dans chaque zone. Commenter.

1^{er} cas: **E > V₀** Dans la zone 1, la fonction d'onde: $\Psi_1(x, t) = A \left\{ e^{i(k_1x - \omega t)} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-i(k_1x + \omega t)} \right\}$

La densité de probabilité s'écrit: $|\Psi_1(x, t)|^2 = \Psi_1(x, t) \cdot \Psi_1^*(x, t)$

$$\begin{aligned} |\Psi_1(x, t)|^2 &= A \left\{ e^{i(k_1x - \omega t)} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-i(k_1x + \omega t)} \right\} \cdot A \left\{ e^{-i(k_1x - \omega t)} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{i(k_1x + \omega t)} \right\} \\ &= A^2 \left\{ 1 + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{i2k_1x} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-i2k_1x} + \left[\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

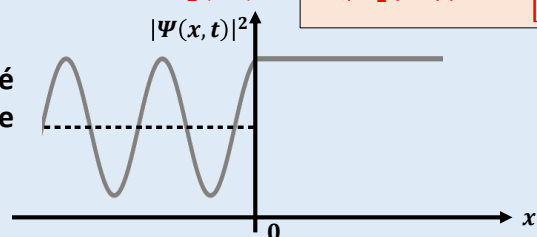
$$\Rightarrow |\Psi_1(x, t)|^2 = A^2 \left\{ 1 + \left[\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right]^2 + 2 \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \cos(2k_1x) \right\}$$

Dans la zone 2, la fonction d'onde: $\Psi_2(x, t) = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} Ae^{i(k_2x - \omega t)}$

La densité de probabilité s'écrit: $|\Psi_2(x, t)|^2 = \Psi_2(x, t) \cdot \Psi_2^*(x, t)$

$$\Rightarrow |\Psi_2(x, t)|^2 = A^2 \left[\frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right]^2$$

les oscillations de la densité de probabilité de présence résultent de l'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchi.



2^{ième} cas: $E < V_0$

Dans la zone1, la fonction d'onde: $\Psi_1(x, t) = A \left\{ e^{i(k_1 x - \omega t)} + \frac{k_1 - iq}{k_1 + iq} e^{-i(k_1 x + \omega t)} \right\}$

Or $\frac{k_1 - iq}{k_1 + iq} = \left| \frac{k_1 - iq}{k_1 + iq} \right| e^{-i\theta} = e^{-i\theta}$ Où $\theta = -\arg\left(\frac{k_1 - iq}{k_1 + iq}\right)$ $\Rightarrow \Psi_1(x, t) = A \{ e^{i(k_1 x - \omega t)} + e^{-i(k_1 x + \omega t + \theta)} \}$
 $= A e^{-i\omega t} \{ e^{ik_1 x} + e^{-i(k_1 x + \theta)} \}$

La densité de probabilité s'écrit: $|\Psi_1(x, t)|^2 = A e^{-i\omega t} \{ e^{ik_1 x} + e^{-i(k_1 x + \theta)} \} \cdot A e^{i\omega t} \{ e^{-ik_1 x} + e^{i(k_1 x + \theta)} \}$
 $\Rightarrow |\Psi_1(x, t)|^2 = A^2 \{ 1 + e^{i(2k_1 x + \theta)} + e^{-i(2k_1 x + \theta)} + 1 \}$ $\Rightarrow |\Psi_1(x, t)|^2 = 2A^2 \{ 1 + \cos(2k_1 x + \theta) \}$

Dans la zone 2: $\Psi_2(x, t) = \frac{2k_1}{k_1 + iq} A e^{-qx} e^{-i\omega t}$

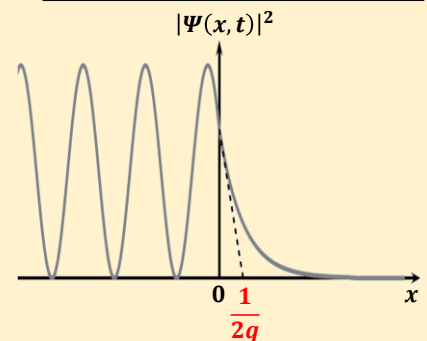
La densité de probabilité s'écrit:

$$|\Psi_2(x, t)|^2 = \frac{4k_1^2}{k_1^2 + q^2} A^2 e^{-2qx}$$

➤ Dans la zone2 (interdite au sens de la mécanique classique), la densité de probabilité de présence est non nulle. Elle s'étend dans la zone2 sur une distance de l'ordre de:

$$\delta = \frac{1}{2q} \quad \text{Or } q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad \Rightarrow \delta = \frac{\hbar}{\sqrt{8m(V_0 - E)}}$$

- $\delta \nearrow$ lorsque E se rapproche de V_0
- $\delta \nearrow$ si $m \searrow$, les effets quantiques sont plus prononcés pour les particules de faible masse

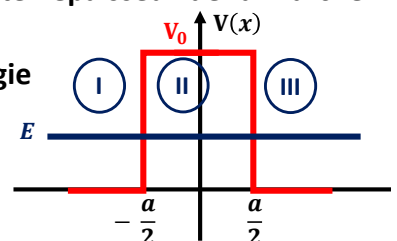
**III.2. Barrière de potentiel et effet tunnel**

L'étude de la marche de potentiel a mis en évidence la pénétration de la fonction d'onde, sous forme d'onde évanescente, dans des régions inaccessibles au sens de la mécanique classique. Que se passe-t-il pour la particule incidente si on limite l'épaisseur de la marche de potentiel ?

Le modèle de la barrière de potentiel correspond au profil d'énergie potentielle représenté sur la figure suivante.

Le potentiel $V(x)$ correspondant est :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -a/2 \text{ ou } x > a/2 \\ V_0 & \text{si } -a/2 \leq x \leq a/2 \end{cases}$$



On considère un flux de particules incidentes, d'énergie E , venant de $x \rightarrow -\infty$ sur cette barrière de potentiel. Déterminer la forme des fonctions d'onde des états stationnaires $\Psi(x, t) = \Phi(x) \exp(-iEt/\hbar)$ dans chaque région pour une énergie $E < V_0$.

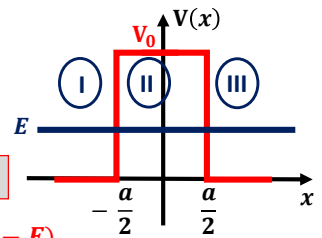
La fonction d'onde propre $\Phi(x)$ obéit à l'équation de Schrödinger des états stationnaires

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + V(x) \Phi(x) = E \Phi(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2} \Phi(x) = 0$$

Région I: $V(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \Phi_I(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Phi_I(x) = 0$ Soit $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}; k \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \Phi_I(x)}{dx^2} + k^2 \Phi_I(x) = 0 \Rightarrow \Phi_I(x) = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx}$$

$$\Rightarrow \Psi_I(x, t) = e^{-i\omega t} \Phi_I(x) = A_I e^{i(kx - \omega t)} + B_I e^{-i(kx + \omega t)} = \Psi_{II}(x, t) + \Psi_{Ir}(x, t)$$



Région II: $V(x) = V_0 \Rightarrow \frac{d^2 \Phi_{II}(x)}{dx^2} + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \Phi_{II}(x) = 0$ Soit $q^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}; q \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \Phi_{II}(x)}{dx^2} - q^2 \Phi_{II}(x) = 0 \Rightarrow \Phi_{II}(x) = A_{II} e^{qx} + B_{II} e^{-qx} \Rightarrow \Psi_{II}(x, t) = (A_{II} e^{qx} + B_{II} e^{-qx}) e^{-i\omega t}$$

Région III: $V(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \Phi_{III}(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Phi_{III}(x) = 0$ Or $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}; k \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{d^2 \Phi_{III}(x)}{dx^2} + k^2 \Phi_{III}(x) = 0$

$$\Rightarrow \Phi_{III}(x) = A_{III} e^{ikx} + B_{III} e^{-ikx} \Rightarrow \Psi_{III}(x, t) = A_{III} e^{i(kx - \omega t)} + B_{III} e^{-i(kx + \omega t)}$$

$B_{III} = 0$ car il n'y a pas des particules venant de $x \rightarrow +\infty$ $\Rightarrow \Psi_{III}(x, t) = A_{III} e^{i(kx - \omega t)}$

Remarque:

Pour un intervalle symétrique autour de $x = 0$, il est préférable d'écrire la solution sous la forme d'une combinaison linéaire d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Écrire les conditions de continuité de la fonction $\Phi(x)$ et de sa dérivée $d\Phi(x)/dx$.

Le potentiel $V(x)$ présente des discontinuités d'amplitude finie en $x = -a/2$ et en $x = a/2$. Nous devons donc imposer non seulement la continuité de la fonction d'onde propre, mais aussi la continuité de sa dérivée première en $x = -a/2$ et en $x = a/2$.

$$\Rightarrow \Phi_I(x) = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx} \quad \Rightarrow \Phi_{II}(x) = A_{II} e^{qx} + B_{II} e^{-qx} \quad \Rightarrow \Phi_{III}(x) = A_{III} e^{ikx}$$

➤ continuité de $\Phi(x)$ en $x = -\frac{a}{2}$:

$$\Phi_I\left(x = -\frac{a}{2}\right) = \Phi_{II}\left(x = -\frac{a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A_I e^{-i\frac{ka}{2}} + B_I e^{i\frac{ka}{2}} = A_{II} e^{-\frac{aq}{2}} + B_{II} e^{\frac{aq}{2}}$$

➤ continuité de $\frac{d\Phi}{dx}$ en $x = -\frac{a}{2}$:

$$\left. \frac{d\Phi_I}{dx} \right|_{x=-\frac{a}{2}} = \left. \frac{d\Phi_{II}}{dx} \right|_{x=-\frac{a}{2}}$$

$$\Rightarrow ik(A_I e^{-i\frac{ka}{2}} - B_I e^{i\frac{ka}{2}}) = q(A_{II} e^{-\frac{aq}{2}} - B_{II} e^{\frac{aq}{2}})$$

➤ continuité de $\Phi(x)$ en $x = \frac{a}{2}$:

$$\Phi_{II}\left(x = \frac{a}{2}\right) = \Phi_{III}\left(x = \frac{a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A_{II} e^{\frac{aq}{2}} + B_{II} e^{-\frac{aq}{2}} = A_{III} e^{i\frac{ka}{2}}$$

➤ continuité de $\frac{d\Phi}{dx}$ en $x = \frac{a}{2}$:

$$\left. \frac{d\Phi_{II}}{dx} \right|_{x=\frac{a}{2}} = \left. \frac{d\Phi_{III}}{dx} \right|_{x=\frac{a}{2}}$$

$$\Rightarrow q(A_{II} e^{\frac{aq}{2}} - B_{II} e^{-\frac{aq}{2}}) = ik A_{III} e^{i\frac{ka}{2}}$$

On obtient quatre équations pour cinq inconnues. On peut exprimer quatre des inconnues en fonction de la cinquième, quelles que soient les valeurs de k et de q .

On donne l'expression du coefficient de transmission :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(qa)} \quad \text{où } q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

Citer les étapes qu'on doit suivre pour aboutir à cette expression.

Pour aboutir à l'expression du coefficient de transmission, on doit passer par le courant de probabilité associé aux flux incident, réfléchi et transmis

$$\begin{aligned} \Psi_{II}(x, t) &= A_I e^{i(kx - \omega t)} & \Rightarrow \vec{j}_i(x, t) &= |\Psi_{II}(x, t)|^2 \frac{\hbar k}{m} \vec{u}_x = |A_I|^2 \frac{\hbar k}{m} \vec{u}_x \\ \Psi_{Ir}(x, t) &= B_I e^{-i(kx + \omega t)} & \Rightarrow \vec{j}_r(x, t) &= -|\Psi_{Ir}(x, t)|^2 \frac{\hbar k}{m} \vec{u}_x = -|B_I|^2 \frac{\hbar k}{m} \vec{u}_x \\ \Psi_{III}(x, t) &= A_{III} e^{i(kx - \omega t)} & \Rightarrow \vec{j}_t(x, t) &= |\Psi_{III}(x, t)|^2 \frac{\hbar k}{m} \vec{u}_x = |A_{III}|^2 \frac{\hbar k}{m} \vec{u}_x \end{aligned}$$

Les probabilités de transmission et de réflexion: $T = \frac{\|\vec{j}_t(x, t)\|}{\|\vec{j}_i(x, t)\|} = \frac{|A_{III}|^2}{|A_I|^2}$ et $R = \frac{\|\vec{j}_r(x, t)\|}{\|\vec{j}_i(x, t)\|} = \frac{|B_I|^2}{|A_I|^2}$

Du système des quatre équations (continuité de la fonction d'onde propre et de sa dérivée première), on peut extraire les rapports $\frac{A_{III}}{A_I}$ et $\frac{B_I}{A_I}$.

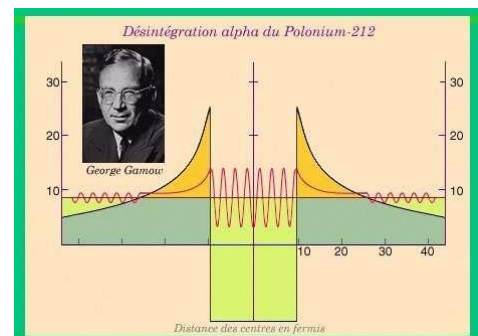
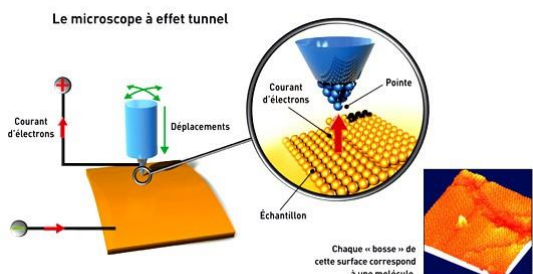
Connaissant T , on peut déduire R par conservation de la probabilité: $\Rightarrow R = 1 - T$

Commenter l'expression du coefficient de transmission

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(qa)}$$

La probabilité de transmission n'est jamais nulle.

une particule quantique a donc toujours la possibilité de traverser la barrière de potentiel même pour une énergie $E < V_0$. Cet effet, inexplicable par les lois de la mécanique classique, est purement quantique. Il porte le nom d'**effet tunnel**.



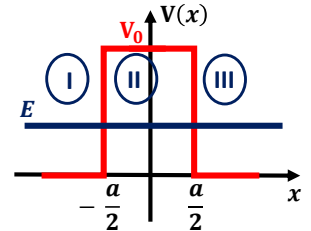
Décrire qualitativement l'influence de la hauteur et de la largeur de la barrière de potentiel sur le coefficient de transmission. Discuter le cas d'une barrière épaisse $qa \gg 1$ et haute $V_0 \gg E$.

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(qa)}$$

➤ Si $V_0 \nearrow$ alors $T \searrow$, de même si $a \nearrow$ alors $T \searrow$

Dans le cas d'une barrière épaisse $qa \gg 1$, on a $\sinh(qa) \approx \frac{e^{qa}}{2}$

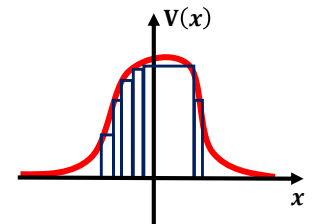
$$T \approx \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{16E(V_0 - E)} e^{2qa}} \approx \frac{1}{\frac{V_0^2}{16E(V_0 - E)} e^{2qa}} \Rightarrow T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2qa}$$



Si de plus la barrière est haute $V_0 \gg E$, alors

$$\Rightarrow T \approx \frac{16E}{V_0} e^{-2qa}$$

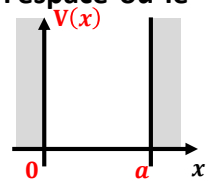
On pourra donc utiliser ces résultats pour traiter de façon approximative une barrière de forme quelconque en la considérant comme une succession de barrières rectangulaires



IV. Puits de potentiel infiniment profond

Si une particule quantique est astreinte à se déplacer dans un espace unidimensionnel limité, on dit qu'elle est confinée dans un puits de potentiel. Les régions de l'espace où le potentiel est infini sont interdites à la particule quantique.

La particule est alors soumise au potentiel suivant $V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > a \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq a \end{cases}$



On considère une particule confinée dans ce puits. Montrer que la fonction d'onde propre qui vérifie les conditions aux limites est sinusoïdale.

La fonction d'onde propre $\Phi(x)$ obéit à l'équation de Schrödinger des états stationnaires

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + V(x) \Phi(x) = E \Phi(x) \quad \text{Or } V(x) = 0 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} = E \Phi(x) \Rightarrow \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Phi(x) = 0$$

➤ Si $E < 0$ Soit $q^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}; q \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} - q^2 \Phi(x) = 0 \Rightarrow \Phi(x) = Ae^{qx} + Be^{-qx}$

Conditions aux limites: $\Phi(x=0) = A + B = 0 \Rightarrow B = -A$

$\Phi(x=a) = Ae^{qa} + Be^{-qa} = A(e^{qa} - e^{-qa}) = 2A \sinh(qa) = 0 \Rightarrow A = 0 = B$

$\Rightarrow$ L'énergie de la particule confinée dans le puits ne peut pas être négative.

➤ Si $E = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} = 0 \Rightarrow \Phi(x) = Ax + B$

Conditions aux limites: $\Phi(x=0) = B = 0 \Rightarrow B = 0$ et $\Phi(x=a) = Aa = 0 \Rightarrow A = 0$

⇒ L'énergie de la particule confinée dans le puits ne peut pas être nulle.

➤ Si $E > 0$ Soit $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + k^2 \Phi(x) = 0 \Rightarrow \Phi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$

Condition au limite en $x = 0$: $\Phi(x=0) = B = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow \Phi(x) = A \sin(kx)$

Montrer que les énergies des états stationnaires sont quantifiées

Condition au limite en $x = a$: $\Phi(x=a) = A \sin(ka) = 0 \Rightarrow \sin(ka) = 0 \Rightarrow k_n a = n\pi; n \in \mathbb{N}^*$

⇒ $k_n = \frac{n\pi}{a}; n \in \mathbb{N}^*$ Or $k_n^2 = \frac{2mE_n}{\hbar^2} = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2; n \in \mathbb{N}^*$

⇒ Du fait du confinement de la particule, son énergie est quantifiée.

Le niveau le plus bas ($n = 1$) s'appelle niveau fondamental d'énergie: $\Rightarrow E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$

L'existence d'un état d'énergie minimale est justifié par l'inégalité d'Heisenberg $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$
pour un puits de largeur a , $\Delta x \simeq a$ d'où $\Delta p \geq \frac{\hbar}{2a}$ donc $\Delta p_{\min} = \frac{\hbar}{2a}$.

L'énergie minimale (purement cinétique) s'écrit alors: $E_{c,\min} = \frac{\Delta p_{\min}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{8ma^2}$

Déterminer les fonctions d'onde des états stationnaires $\Psi_n(x, t)$.

À chaque valeur du nombre quantique n correspond une énergie $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$ associée à la fonction d'onde $\Psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$; $k_n = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow \Psi_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$

La constante A_n est déterminée par la condition de normalisation de la fonction d'onde

$\int_0^a |\Psi_n(x, t)|^2 dx = 1 \Rightarrow \int_0^a A_n^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = 1 \Rightarrow \frac{A_n^2}{2} a = 1$

$\Rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \Rightarrow \frac{A_n^2}{2} \left\{ \int_0^a dx - \int_0^a 2 \cos\left(\frac{2n\pi}{a} x\right) dx \right\} = 1$

$\Rightarrow \Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$

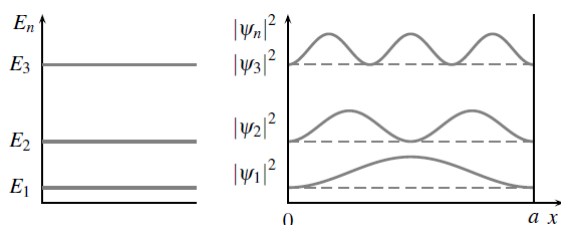
Représenter la densité de probabilité des trois premiers niveaux.

La densité de probabilité $|\Psi_n(x, t)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$

$E_3 = \frac{9\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$

$E_2 = \frac{4\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$

$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$



$|\Psi_1(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right)$

$|\Psi_2(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{2\pi}{a} x\right)$

$|\Psi_3(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{3\pi}{a} x\right)$

Déterminer les fonctions d'onde des états stationnaires $\Psi_n(x, t)$.

À chaque valeur du nombre quantique n correspond une énergie $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$ associée à la fonction d'onde $\Psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$; $k_n = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow \Psi_n(x, t) = A_n \sin(\frac{n\pi}{a} x) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$

La constante A_n est déterminée par la condition de normalisation de la fonction d'onde

$$\int_0^a |\Psi_n(x, t)|^2 dx = 1 \Rightarrow \int_0^a A_n^2 \sin^2(\frac{n\pi}{a} x) dx = 1 \Rightarrow \frac{A_n^2}{2} \left\{ \int_0^a dx - \int_0^a 2 \cos(\frac{2n\pi}{a} x) dx \right\} = 1 \Rightarrow \frac{A_n^2}{2} a = 1$$

$$\Rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\Rightarrow \Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{n\pi}{a} x) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$$

Représenter la densité de probabilité des trois premiers niveaux.

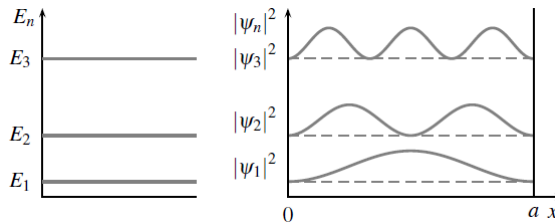
La densité de probabilité

$$|\Psi_n(x, t)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2(\frac{n\pi}{a} x)$$

$$E_3 = \frac{9\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

$$E_2 = \frac{4\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$



$$|\Psi_3(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2(\frac{3\pi}{a} x)$$

$$|\Psi_2(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2(\frac{2\pi}{a} x)$$

$$|\Psi_1(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2(\frac{\pi}{a} x)$$

V. Etats non stationnaires d'une particule

Considérons l'état du système construit comme la superposition des deux états stationnaires d'énergies différentes. Montrer que cet état particulier est non stationnaire. En déduire la période d'évolution de la densité de probabilité de présence.

La fonction d'onde relative à l'état construit par la superposition des deux états stationnaires

d'énergies différentes s'écrit sous la forme: $\Psi(x, t) = \Phi_1(x) e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} + \Phi_2(x) e^{-i \frac{E_2}{\hbar} t}$

La densité de probabilité $|\Psi(x, t)|^2 = \left\{ \Phi_1(x) e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} + \Phi_2(x) e^{-i \frac{E_2}{\hbar} t} \right\} \cdot \left\{ \Phi_1(x) e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} + \Phi_2(x) e^{-i \frac{E_2}{\hbar} t} \right\}$

$$\Rightarrow |\Psi(x, t)|^2 = |\Phi_1(x)|^2 + \Phi_1(x) \Phi_2(x) e^{i \frac{(E_2 - E_1)}{\hbar} t} + \Phi_2(x) \Phi_1(x) e^{-i \frac{(E_2 - E_1)}{\hbar} t} + |\Phi_2(x)|^2$$

$$\Rightarrow |\Psi(x, t)|^2 = |\Phi_1(x)|^2 + |\Phi_2(x)|^2 + 2\Phi_1(x) \Phi_2(x) \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right)$$

La superposition de deux états stationnaires d'énergie E_1 et $E_2 > E_1$ conduit à un état non stationnaire dont la probabilité de présence oscille entre les deux états stationnaires à la fréquence ν vérifiant la relation : $h\nu = E_2 - E_1$