

Chapitre IV



Induction électromagnétique



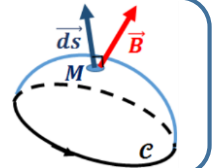
- Description et interprétation des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday
- Étude d'un circuit fixe soumis à un champ magnétique variable:
 - * Phénomènes d'auto-induction et induction mutuelle
 - * Transformateur de tension.
- Étude d'un circuit électrique mobile dans un champ magnétique permanent:
 - * Conversions des puissances: mécanique $\leftrightarrow$ électrique.
 - * Freinage par induction, Haut-parleur électrodynamique
- Effectuer un bilan énergétique pour chaque cas.

I. Lois de l'induction

I.1. Flux magnétique

le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit est la quantité du champ magnétique total qui passe à travers une surface qui s'appuie sur le circuit $\mathcal{C}$:

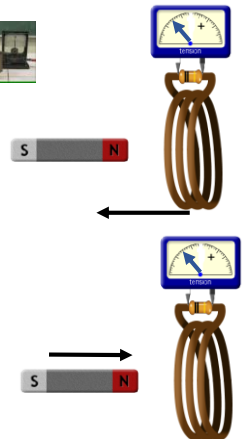
$$\varphi = \iint \vec{B}(\vec{M}) \cdot d\vec{s}(\vec{M}) \quad \text{S'exprime en weber, de symbole } \mathbf{Wb} = \mathbf{T \cdot m^2}$$



I.2. Phénomène d'induction

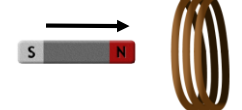
Expérience N°1: Bobine mobile dans un champ magnétique permanent

Un circuit se déplaçant dans un champ magnétique permanent se comporte comme un générateur électrocinétique capable de mettre en mouvement les charges mobiles du conducteur. On dit que le circuit est le siège d'un phénomène d'induction. Nous parlerons, dans ce cas, d'induction de Lorentz.



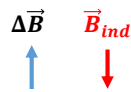
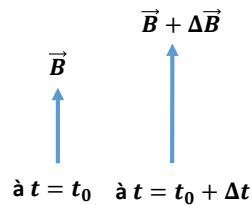
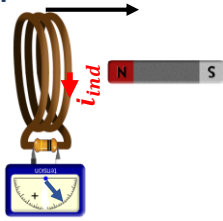
Expérience N°2: Bobine fixe dans un champ magnétique variable

Lorsqu'un circuit fixe est soumis à un champ magnétique variable, il est encore le siège d'un phénomène d'induction. Nous parlerons alors d'induction de Neumann.



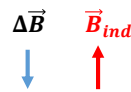
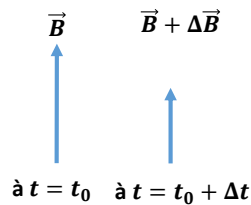
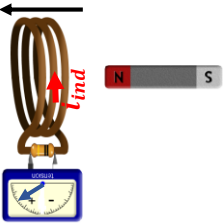
I.3. Loi de Lenz

Expérience N°1: La bobine entre dans la zone des champs forts



⇒ Le champ magnétique induit s'oppose à la variation du champ magnétique extérieur (la cause qui lui a donnée naissance).

Expérience N°1: La bobine entre dans la zone des champs faibles



⇒ Le champ magnétique induit s'oppose à la variation du champ magnétique extérieur (la cause qui lui a donnée naissance).

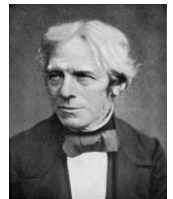
Loi de Lenz

Les effets de l'induction (magnétiques, électrocinétiques et mécaniques) sont orientés de façon à s'opposer à ses causes.

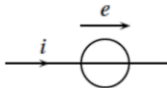
I.3. Loi de Faraday (1831)

En 1831, Faraday déduit de ses expériences la loi
La variation temporelle du flux magnétique envoyé à travers un circuit engendre dans ce dernier une f.è.m induite telle que

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$



- Le signe (-) traduit la loi de Lenz.
- La f.é.m. induite est comptée positive dans le sens conventionnel positif du courant



ce qui correspond à une convention générateur.

II. Circuit fixe dans un champ magnétique variable

Dans ce paragraphe, on étudie des phénomènes d'induction dans des circuits fixes plongés dans des champs magnétiques variant dans le temps.

II.1. Auto-induction

II.1.a. Inductance propre



Soit un circuit parcouru par un courant d'intensité $i(t)$. Il crée un champ magnétique $\vec{B}(t)$, ce champ magnétique traverse le circuit qui lui a donné naissance, il crée donc un flux magnétique à travers son propre circuit, nommé **flux propre** φ_p .

φ_p est proportionnel à la norme de $\vec{B}(t)$, qui est elle même proportionnelle à $i(t)$; $\Rightarrow \varphi_p$ est finalement proportionnel à $i(t)$.

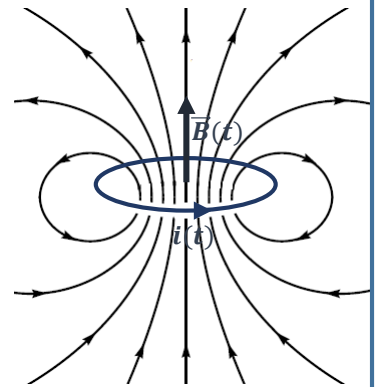
$$\varphi_p = L \cdot i$$

L : coefficient d'auto-inductance ou inductance propre du circuit.

L : s'exprime en **Henry** de symbole **H**.

L est toujours positif.

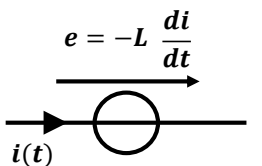
L est une constante pour un circuit rigide.



II.1.b. Circuit électrique équivalent

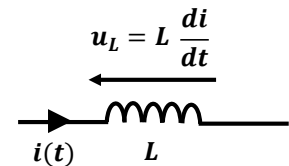
Si l'intensité du courant traversant le circuit varie dans le temps, le flux propre varie, on parle de phénomène d'auto-induction. La f.é.m d'auto-induction s'exprime selon la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\varphi_p}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad \text{dans le cas d'un circuit rigide}$$



Convention générateur

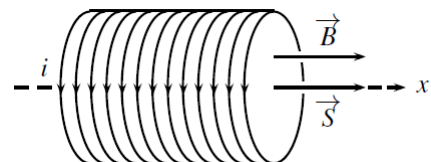
Le circuit électrique équivalent sera alors



Convention récepteur

II.1.c. Calcul d'une inductance propre

Établir l'expression de l'inductance propre L d'un solénoïde de longueur ℓ supposée infinie, constituée de N spires, de surface S , chacune parcourue par un courant d'intensité i .



Le champ magnétique créé dans le solénoïde a pour expression: $\vec{B}(t) = \mu_0 n i \vec{u}_x$

Le flux de ce champ à travers une seule spire est: $\varphi = \iint \vec{B}(\vec{M}) \cdot d\vec{s}(\vec{M}) = \iint \mu_0 n i \vec{u}_x \cdot d\vec{s} \vec{u}_x = \mu_0 n s i$

Le flux propre à travers le solénoïde sera alors: $\varphi_p = N \cdot \varphi = \mu_0 N n s i = \frac{N^2}{\ell} \mu_0 s i$

On identifie alors l'expression de l'inductance propre : $\varphi_p = L \cdot i = \frac{N^2}{\ell} \mu_0 s i \Rightarrow L = \frac{N^2}{\ell} \mu_0 s$

Exemple: solénoïde de 1000 spires de rayon 3 cm, réparties sur une longueur 10 cm. $\Rightarrow L = 35 \text{ mH}$

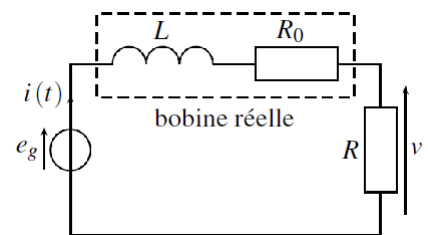
II.1.d. Mesure d'une inductance propre

On peut mesurer expérimentalement la valeur de l'auto-inductance L à l'aide du circuit suivant:

La loi des mailles s'écrit: $e_g = L \frac{di}{dt} + R i$ Où on a choisi $R \gg R_0$

$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{e_g}{L}$ soit $\frac{R}{L} = \frac{1}{\tau}$ et $i = \frac{v}{R}$ On obtient $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{R}{L} \cdot e_g$

On choisit le signal e_g un créneau d'amplitude E et de période T très grande par rapport à τ .



Pour $t \in [0, T/2]$, l'équation différentielle s'écrit: $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{E}{\tau}$

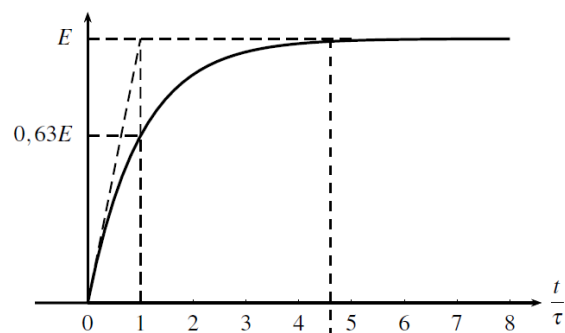
L'équation sans second membre s'écrit: $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \Rightarrow v = A e^{-t/\tau}$

Comme solution particulière, on choisit celle du régime permanent: $v_p = E$

La solution générale s'écrit alors: $v = A e^{-t/\tau} + E$

Condition initiale: $v(t=0) = A + E = 0 \Rightarrow A = -E$ D'où $v = E(1 - e^{-t/\tau})$

Sachant que $v(t=\tau) = 0,63 \cdot E$, on peut mesurer à l'aide d'un oscilloscope la constante de temps τ . La valeur de τ mène à celle de $L = R\tau$, attendu que celle de R est connue.



II.1.e. Étude énergétique

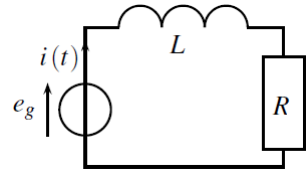
Soit le circuit suivant, la loi des mailles s'écrit: $e_g = L \frac{di}{dt} + Ri$

En multipliant par i , on obtient: $e_g \cdot i = L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} + Ri^2$

$e_g \cdot i$ est la puissance délivrée par le générateur

Ri^2 est la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance

$L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$ est la dérivée par rapport au temps de l'énergie magnétique stockée dans la bobine.



⇒ L'énergie magnétique stockée dans un circuit d'inductance propre L et parcouru par un courant d'intensité i est : $\mathcal{E}_{\text{magné}} = \frac{1}{2} Li^2$

Pour un solénoïde, on a: $L = \frac{N^2}{\ell} \mu_0 S \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{magné}} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{\ell} \mu_0 S i^2$ or $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \Rightarrow i = \frac{\ell}{N} \frac{B}{\mu_0}$

$\Rightarrow \mathcal{E}_{\text{magné}} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{\ell} \mu_0 S \frac{\ell^2 B^2}{N^2 \mu_0^2} \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{magné}} = \frac{B^2}{2\mu_0} \ell \cdot S$ Volume du solénoïde, où règne le champ magnétique

⇒ La densité d'énergie magnétique est définie par $u_{\text{magné}} = \frac{B^2}{2\mu_0} \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{magné}} = \iiint u_{\text{magné}} \cdot d\tau$

II.2. Deux circuits en interaction

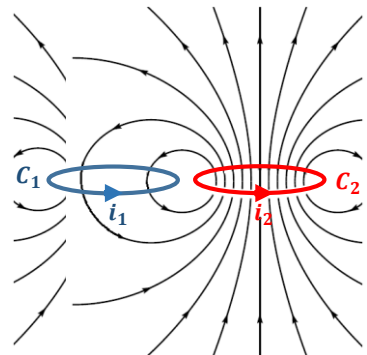
II.2.a. Inductance mutuelle

Soit deux circuits, C_1 parcouru par un courant i_1 et C_2 par i_2 .

C_1 envoie un flux magnétique à travers C_2 noté $\varphi_{1 \rightarrow 2}$ qui est proportionnel à B_1 donc proportionnel à i_1 .

De même C_2 envoie un flux magnétique à travers C_1 noté $\varphi_{2 \rightarrow 1}$ qui est proportionnel à i_2 .

Les coefficients de proportionnalité entre $\varphi_{1 \rightarrow 2}$ et i_1 et entre $\varphi_{2 \rightarrow 1}$ et i_2 sont identiques : leur valeur commune est notée M . (théorème de Neumann)



Les flux magnétiques envoyés réciproquement par un circuit C_1 et un circuit C_2 l'un à travers l'autre sont donnés par les formules :

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = M \cdot i_1 \text{ et } \varphi_{2 \rightarrow 1} = M \cdot i_2$$

- M est appelé **inductance mutuelle** entre les deux circuits C_1 et C_2
- M s'exprime en Henry H
- M est une grandeur algébrique

II.2.b. Circuit électrique équivalent

Soit deux circuits C_1 et C_2 couplés par inductance mutuelle.

Le flux total envoyé à travers C_1 s'écrit: $\varphi_1 = \varphi_{1 \rightarrow 1} + \varphi_{2 \rightarrow 1}$

Avec: $\varphi_{1 \rightarrow 1} = L_1 \cdot i_1$ est le flux propre envoyé par C_1 à travers lui-même,

$\varphi_{2 \rightarrow 1} = M \cdot i_2$ est le flux envoyé par C_2 à travers C_1

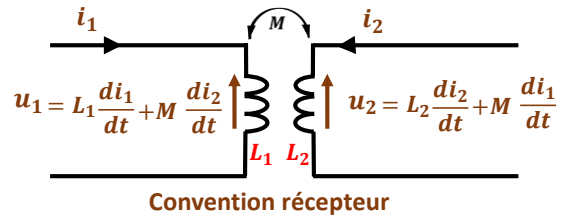
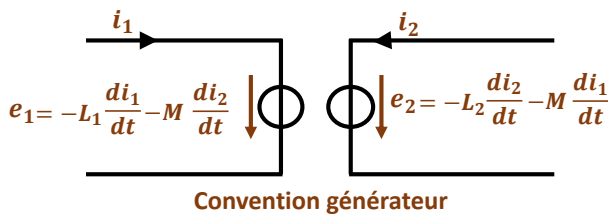
$\varphi_1 = L_1 \cdot i_1 + M \cdot i_2 \Rightarrow$ La f.è.m e_1 induite dans le circuit C_1 s'écrit: $e_1 = -\frac{d\varphi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$

Le flux total envoyé à travers C_2 s'écrit: $\varphi_2 = \varphi_{2 \rightarrow 2} + \varphi_{1 \rightarrow 2}$

Avec: $\varphi_{2 \rightarrow 2} = L_2 \cdot i_2$ est le flux propre envoyé par C_2 à travers lui-même,

$\varphi_{1 \rightarrow 2} = M \cdot i_1$ est le flux envoyé par C_1 à travers C_2

$\varphi_2 = L_2 \cdot i_2 + M \cdot i_1 \Rightarrow$ La f.è.m e_2 induite dans le circuit C_2 s'écrit: $e_2 = -\frac{d\varphi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$



II.2.c. Calcul d'une inductance mutuelle

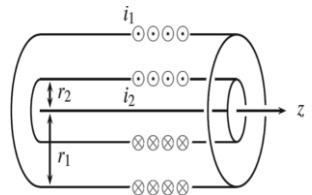
On considère deux solénoïdes Σ_1 et Σ_2 coaxiaux, d'axe (Oz) , de même longueur ℓ , de rayons r_1 et r_2 et comportant respectivement N_1 et N_2 spires jointives, enroulées dans le même sens.

Déterminer l'expression de l'inductance mutuelle

Le flux envoyé par le solénoïde Σ_1 à travers le solénoïde Σ_2 s'écrit :

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \iint \vec{B}_1(M) \cdot d\vec{s}_2(M) = N_2 \iint \mu_0 n_1 i_1 \vec{u}_z \cdot d\vec{s}_2 \vec{u}_z = \mu_0 N_2 n_1 s_2 i_1 = \frac{1}{\ell} \mu_0 N_1 N_2 s_2 i_1$$

Par identification avec la relation: $\varphi_{1 \rightarrow 2} = M \cdot i_1$ on obtient: $M = \frac{1}{\ell} \mu_0 N_1 N_2 s_2$

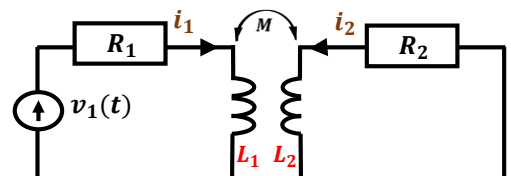


II.2.d. Étude harmonique

Soit deux circuits C_1 et C_2 couplés par inductance mutuelle.

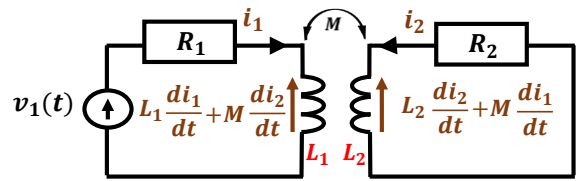
Le circuit C_1 est alimenté par un générateur qui impose la tension $v_1(t) = v_0 \cos(\omega t)$

Déterminer l'expression de l'impédance équivalente vu du circuit C_1



La loi des mailles s'écrit:

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$



En régime sinusoïdal permanent à la pulsation ω , imposé par $v_1(t)$, le système d'équation s'écrit en notation complexe, sachant que $\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + jL_1 \omega i_1 + jM \omega i_2 \\ 0 = R_2 i_2 + jL_2 \omega i_2 + jM \omega i_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = (R_1 + jL_1 \omega) i_1 + jM \omega i_2 \\ 0 = (R_2 + jL_2 \omega) i_2 + jM \omega i_1 \end{cases} \Rightarrow i_2 = -\frac{jM \omega}{R_2 + jL_2 \omega} i_1$$

$$\Rightarrow v_1 = (R_1 + jL_1 \omega) i_1 + jM \omega \left(-\frac{jM \omega}{R_2 + jL_2 \omega} \right) i_1 \Rightarrow v_1 = \left(R_1 + jL_1 \omega + \frac{M^2 \omega^2}{R_2 + jL_2 \omega} \right) i_1 \Rightarrow v_1 = Z i_1$$

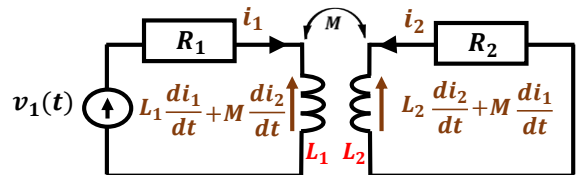
$$Z = R_1 + jL_1 \omega + \frac{M^2 \omega^2}{R_2 + jL_2 \omega}$$

Le couplage entre les deux circuits est équivalent, vu du circuit C_1 à un unique dipôle d'impédance Z , dans lequel intervient les caractéristiques du circuit C_2 via le couplage inductif.

II.2.e. Étude énergétique

La loi des mailles mène aux équations suivantes:

$$\begin{cases} (v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}) * i_1 \\ (0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}) * i_2 \end{cases}$$



$$v_1 i_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}$$

$$v_1 i_1 = \underbrace{R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2}_{\text{Puissance dissipée}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)}_{\text{Dérivée de l'énergie magnétique stockée}}$$

Puissance délivrée par le générateur extérieur.

Puissance dissipée par effet Joule dans les résistances.

Dérivée par rapport au temps de l'énergie magnétique stockée dans $C_1 (\frac{1}{2} L_1 i_1^2)$, $C_2 (\frac{1}{2} L_2 i_2^2)$ et du couplage entre les deux circuits ($M i_1 i_2$).

$\Rightarrow$ L'énergie magnétique stockée dans deux circuits $C_1(L_1)$ et $C_2(L_2)$ couplés par mutuelle inductance M , s'écrit:

$$\mathcal{E}_{\text{magné}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

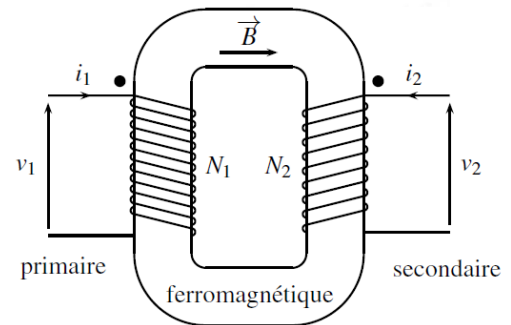
II.3. Transformateur de tension

II.3.a. Constitution

Un **transformateur** est un appareil qui modifie l'amplitude de tensions et de courants alternatifs.

Il se compose d'une carcasse **ferromagnétique**, et de **deux enroulements**.

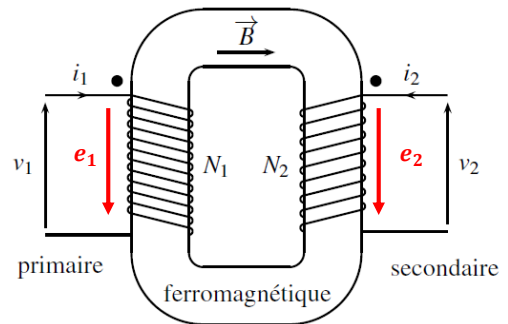
- L'enroulement primaire, ou plus simplement le **primaire**, ici constitué de N_1 spires, est celui qui reçoit l'énergie électrique. L'enroulement secondaire, ou **secondaire** est constitué de N_2 spires.
- Le matériau ferromagnétique sert à canaliser les lignes de champ magnétique du primaire vers le secondaire



II.3.b. Principe de fonctionnement



Le primaire, soumis à la tension alternative $v_1(t)$, est parcouru par le courant alternatif d'intensité $i_1(t)$. Ce courant $i_1(t)$ crée un champ magnétique variable $\vec{B}(t)$. Le ferromagnétique canalise ce champ jusqu'au secondaire. Le champ variable $\vec{B}(t)$ crée alors un flux variable dans l'enroulement secondaire. Une f.é.m. est donc induite au secondaire.



Quel est le lien entre $v_2(t)$, tension au secondaire, et $v_1(t)$, tension au primaire ?

$$e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} \quad \phi_1 = N_1 \iint \vec{B} d\vec{s} = N_1 s B \Rightarrow e_1 = -N_1 s \frac{dB}{dt} \quad \text{Or } e_1 = -v_1 \quad \Rightarrow v_1 = N_1 s \frac{dB}{dt}$$

$$e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} \quad \phi_2 = N_2 \iint \vec{B} d\vec{s} = N_2 s B \Rightarrow e_2 = -N_2 s \frac{dB}{dt} \quad \text{Or } e_2 = -v_2 \quad \Rightarrow v_2 = N_2 s \frac{dB}{dt}$$

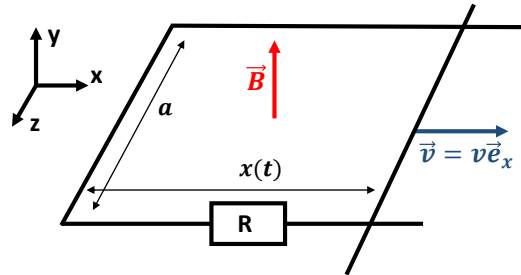
Les tensions primaire et secondaire, dans un transformateur en régime alternatif, sont reliées par le rapport de transformation: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1}$

III. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

III.1. conversion de puissance mécanique-électrique

III.1.a. Freinage par induction

Une tige, de masse m , conductrice, glisse sans frottement sur deux rails conducteurs, à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_y$ uniforme et stationnaire orthogonal au plan des rails.



Analyse physique

La tige est en mouvement $\Rightarrow$ le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit est variable

$\Rightarrow$ création d'une f.è.m induite $\Rightarrow$ courant induit $\propto \vec{B}$

$\Rightarrow$ force de Laplace qui (d'après la loi de Lenz) va s'opposer au mouvement

$\Rightarrow$ c'est le freinage par induction

Déterminer l'expression de la vitesse de la tige ainsi que l'expression du courant induit.

On commence par orienter le circuit

La force de Laplace s'écrit:

$$\vec{f}_L = \int_0^a i_{ind} d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_0^a i_{ind} dz \vec{e}_z \wedge B \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{f}_L = -i_{ind} a B \vec{e}_x$$

Le flux magnétique envoyé à travers le circuit s'écrit:

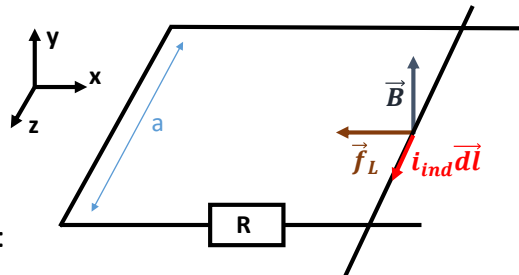
$$\varphi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_0^a \int_0^x B \vec{e}_y \cdot dx dz (-\vec{e}_y) \Rightarrow \varphi = -Bax$$

La f.è.m induite s'écrit:

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = Ba \frac{dx}{dt} \Rightarrow e = Bav$$

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la tige s'écrit:

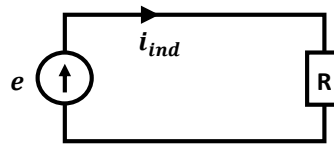
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R} + m\vec{g} + \vec{f}_L \quad \text{La projection suivant l'axe } Ox \text{ donne: } m \frac{dv}{dt} = -i_{ind} a B \quad (EM)$$



Le circuit électrique équivalent est:

La loi des mailles s'écrit: $e = R \cdot i_{ind}$

Or $e = Bav$ $\Rightarrow Bav = R \cdot i_{ind}$ (EE)

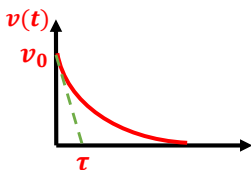


L'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) sont couplées : la vitesse $v(t)$ intervient dans (EE), l'intensité du courant i_{ind} dans (EM). Il faut les découpler pour établir les expressions de $v(t)$ et de i_{ind} .

$$(EE) Bav = R \cdot i_{ind} \Rightarrow i_{ind} = \frac{Bav}{R}$$

$$(EM) m \frac{dv}{dt} = -i_{ind} aB \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -\frac{Bav}{R} \cdot aB \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{(Ba)^2}{Rm} \cdot v \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \quad \text{où } \frac{1}{\tau} = \frac{(Ba)^2}{Rm}$$

$$v(t) = A \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{À } t = 0, v(t = 0) = v_0 = A \Rightarrow v(t) = v_0 \cdot e^{-t/\tau}$$



Au bout de quelques τ , la tige sera freinée. L'application d'un champ magnétique conduit au freinage de la tige: c'est le freinage par induction.

$$t \Rightarrow \vec{f}_L = -i_{ind} aB \vec{e}_x \quad \text{or } i_{ind} = \frac{Bav}{R} \Rightarrow \vec{f}_L = -\frac{(Ba)^2}{R} v \vec{e}_x \Rightarrow \vec{f}_L = -\frac{(Ba)^2}{R} \vec{v}$$

Dans tous les dispositifs où il y a conversion de puissance mécanique en puissance électrique, l'action mécanique de Laplace est une action de freinage.

L'intensité du courant induit s'écrit alors: $i_{ind} = \frac{Bav}{R} \Rightarrow i_{ind} = \frac{Bav_0}{R} \cdot e^{-t/\tau}$

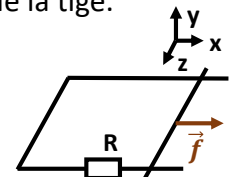
La f.è.m induite s'écrit alors: $e = Bav_0 \cdot e^{-t/\tau}$

L'établissement de la f.è.m et du courant induit s'effectue sur un temps très court, pour maintenir le générateur fictif dans le circuit on doit maintenir le mouvement de la tige.

III.1.b. Rails de Laplace générateurs

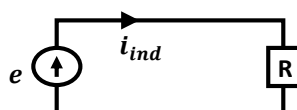
Pour maintenir le mouvement de la tige, on applique une force $\vec{f} = f \vec{e}_x$; $f > 0$.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la tige s'écrit:



$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + \vec{R} + m\vec{g} + \vec{f}_L \quad \text{La projection sur } o\vec{x}: \quad m \frac{dv}{dt} = f - i_{ind} aB \quad (EM)$$

Le circuit électrique équivalent est:



La loi des mailles s'écrit: $e = R \cdot i_{ind}$

Or $e = Bav$ $\Rightarrow Bav = R \cdot i_{ind}$ (EE)

$$(EE) \Rightarrow v = \frac{R i_{ind}}{Ba}$$

$$(EM) \Rightarrow \frac{mR}{Ba} \frac{di_{ind}}{dt} = f - i_{ind} aB \Rightarrow \frac{mR}{Ba} \frac{di_{ind}}{dt} + aB \cdot i_{ind} = f \Rightarrow \frac{di_{ind}}{dt} + \frac{i_{ind}}{\tau} = \frac{Baf}{mR}; \tau = \frac{mR}{(Ba)^2}$$

L'équation sans second membre s'écrit: $\Rightarrow \frac{di_{ind}}{dt} + \frac{i_{ind}}{\tau} = 0$ La solution est: $\Rightarrow i_{ind} = A \cdot e^{-t/\tau}$

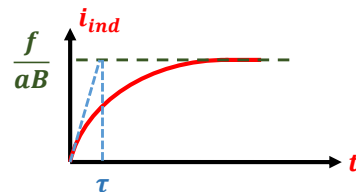
La solution particulière (régime permanent): $\frac{mR}{Ba} \frac{di_{ind,p}}{dt} = f - i_{ind,p} aB = 0 \Rightarrow i_{ind,p} = \frac{f}{aB}$

La solution générale est la somme, elle s'écrit alors: $\Rightarrow i_{ind}(t) = A \cdot e^{-t/\tau} + \frac{f}{aB}$

À $t = 0$ avant d'appliquer la force, $i_{ind}(0) = A + \frac{f}{aB} = 0 \Rightarrow A = -\frac{f}{aB} \Rightarrow i_{ind}(t) = \frac{f}{aB} (1 - e^{-t/\tau})$

$$\text{Or } i_{ind,p} = \frac{f}{aB}$$

$$\Rightarrow i_{ind}(t) = i_{ind,p} (1 - e^{-t/\tau})$$



La f.è.m induite s'écrit: $e = R \cdot i_{ind}(t) = R \cdot i_{ind,p} (1 - e^{-t/\tau})$ Soit: $e(t) = e_p (1 - e^{-t/\tau})$; $e_p = R \cdot i_{ind,p}$

La vitesse de la tige est: $v(t) = \frac{e(t)}{Ba}$ Soit: $v(t) = v_p (1 - e^{-t/\tau})$; $v_p = \frac{R \cdot i_{ind,p}}{Ba} = \frac{R \cdot f}{(Ba)^2}$

Bilan de puissance:

La RFD s'écrit: $m \frac{dv}{dt} = f - i_{ind} aB$ En multipliant la RFD par v , on obtient: $mv \frac{dv}{dt} = f v - i_{ind} aB v$

$$\text{Or: } mv \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \text{ et: } i_{ind} aB v = e \cdot i_{ind} \quad \text{D'où } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = f v - e \cdot i_{ind}$$

$$\text{On obtient donc le bilan de puissance: } f v = e \cdot i_{ind} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

Puissance mécanique fournie
par le mouvement de la tige

Puissance électrique
fournie au circuit

Dérivée par rapport au temps
de l'énergie cinétique

En régime permanent ($\frac{d}{dt} = 0$), le bilan de puissance s'écrit: $f v_p = e_p \cdot i_{ind,p}$

$\Rightarrow$ En régime permanent, toute la puissance mécanique est convertie en puissance électrique.

Remarque:

- La puissance des f.è.m s'écrit: $P_{em} = e \cdot i \Rightarrow P_{em} = B \cdot a \cdot v \cdot i$
 ➤ La puissance de Laplace s'écrit: $P_L = \vec{f}_L \cdot \vec{v} \Rightarrow P_L = -B \cdot a \cdot i \cdot v$
- $\Rightarrow P_{em} + P_L = 0$

Pour un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, on a toujours: $P_{em} + P_L = 0$

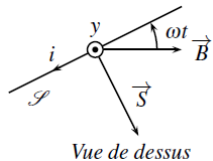
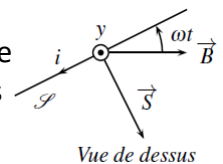
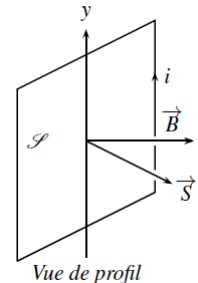
III.1.c. Alternateur

Un alternateur sert à transformer une puissance mécanique en une puissance électrique. Il est modélisé par une spire rectangulaire, de surface s , conductrice de résistance électrique R et d'inductance L . La spire, en rotation autour de Oy à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_y$, est plongée dans un champ magnétique uniforme est stationnaire $\vec{B} = B \vec{e}_x$.

Analyse physique

La rotation de la spire $\Rightarrow$ le flux de $\vec{B}$ à travers la spire est variable

$\Rightarrow$ création d'une f.è.m induite $\Rightarrow$ courant induit + $\vec{B} \Rightarrow$ Moment de Laplace
 qui va s'opposer au mouvement $\Rightarrow$ Pour maintenir le générateur fictif dans le circuit on doit maintenir la rotation de la spire, on doit donc appliquer le couple $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_y$; $\Gamma > 0$

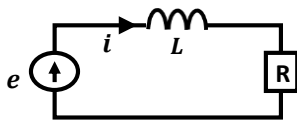


Le flux envoyé à travers la spire s'écrit:

$$\varphi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot s \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) \Rightarrow \varphi = B \cdot s \cdot \sin(\omega t)$$

La f.è.m induite dans la spire s'écrit: $e = -\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow e = -B \cdot s \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$

Le circuit électrique équivalent est:



La loi des mailles s'écrit:

$$e = L \cdot \frac{di}{dt} + Ri$$

$$\Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri = -B \cdot s \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \quad (EE)$$

La solution de cette équation s'écrit: $i(t) = I \cos(\omega t + \phi)$; Où on doit chercher I ? et ϕ ?

En notation complexe: $\underline{i}(t) = I e^{j(\omega t + \phi)}$ avec $i(t) = \text{Re}(\underline{i}(t))$

Et l'équation différentielle devient: $\Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri = -B \cdot s \cdot \omega \cdot e^{j\omega t}$

$$\Rightarrow (jL\omega + R)I e^{j(\omega t + \phi)} = -B \cdot s \cdot \omega \cdot e^{j\omega t} \Rightarrow (jL\omega + R)I e^{j\phi} = -B \cdot s \cdot \omega \Rightarrow I e^{j\phi} = -\frac{B \cdot s \cdot \omega}{jL\omega + R}$$

$$\Rightarrow I = \frac{B \cdot s \cdot \omega}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2}}$$

$$\text{et } e^{j\phi} = -\frac{1}{I} \frac{B \cdot s \cdot \omega}{R + jL\omega}$$

$$\text{Or } \frac{B \cdot s \cdot \omega}{I} = \sqrt{(L\omega)^2 + R^2}$$

$$\Rightarrow e^{j\phi} = -\frac{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2}}{R + jL\omega} = -\frac{R - jL\omega}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2}} \quad \text{Soit donc: } \boxed{\cos \phi = -\frac{R}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin \phi = \frac{L\omega}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2}}}$$

L'équation mécanique s'écrit (TMC), avec J est le moment d'inertie de la spire: $J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\Gamma}_L + \vec{\Gamma}$ (EM)

Le moment de Laplace: $\vec{\Gamma}_L = \vec{m} \wedge \vec{B} = i\vec{s} \wedge \vec{B} = is(\sin\omega t \vec{e}_x + \cos\omega t \vec{e}_z) \wedge B\vec{e}_y \Rightarrow \vec{\Gamma}_L = iBscos\omega t \vec{e}_y$

En régime permanent, l'EM s'écrit:

$$\vec{\Gamma}_L + \vec{\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\Gamma} = -iBscos\omega t \vec{e}_y \Rightarrow \vec{\Gamma} = -I.B.s.cos(\omega t)cos(\omega t + \phi)\vec{e}_y$$

La puissance mécanique fournie: $P_{mec} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega} = -I.B.s.\omega.cos(\omega t)cos(\omega t + \phi)$

$$\text{Or } cos(\omega t)cos(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}(cos(\phi) + cos(2\omega t + \phi)) \Rightarrow P_{mec} = -\frac{1}{2}I.B.s.\omega.(cos(\phi) + cos(2\omega t + \phi))$$

$$\Rightarrow \langle P_{mec} \rangle = -\frac{I.B.s.\omega}{2}.cos(\phi)$$

La puissance électrique s'écrit: $P_{elec} = e.i = -B.s.\omega.cos(\omega t).Icos(\omega t + \phi)$

$$\Rightarrow P_{elec} = -\frac{1}{2}I.B.s.\omega.(cos(\phi) + cos(2\omega t + \phi)) \Rightarrow \langle P_{elec} \rangle = -\frac{I.B.s.\omega}{2}.cos(\phi)$$

$$\Rightarrow \langle P_{mec} \rangle = \langle P_{elec} \rangle$$

En moyenne, toute la puissance mécanique est convertie en puissance électrique.

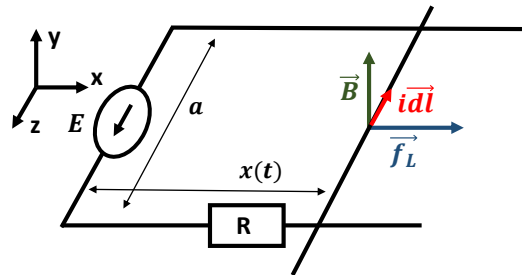
III.2. conversion de puissance électrique-mécanique

III.2.a. Rails de Laplace moteurs



Analyse physique

- Le générateur impose la tension E et fait circuler un courant d'intensité i dans le circuit
- i et $\vec{B}$ créent la force de Laplace $\vec{f}_L$ et la tige est mise en mouvement



Ce système a converti une puissance électrique $E.i$ en une puissance mécanique $\vec{f}_L \cdot \vec{v}$

$\Rightarrow$ c'est un moteur

La force de Laplace s'écrit: $\vec{f}_L = \int_a^0 i d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_a^0 idz\vec{e}_z \wedge B\vec{e}_y \Rightarrow \vec{f}_L = iaB\vec{e}_x$

Le flux envoyé à travers le circuit s'écrit: $\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_0^a \int_0^x B\vec{e}_y \cdot dx dz \cdot \vec{e}_y \Rightarrow \phi = Bax$

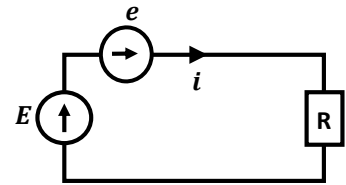
La f.è.m induite s'écrit: $e = -\frac{d\phi}{dt} = -Ba\frac{dx}{dt} \Rightarrow e = -Bav$

La RFD appliquée à la tige s'écrit: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R} + m\vec{g} + \vec{f}_L$

La projection suivant l'axe ox donne: $m \frac{dv}{dt} = iaB$ (EM)

Le circuit électrique équivalent est:

La loi des mailles : $E + e = Ri$ Or $e = -Bav$ $\Rightarrow E - Bav = Ri$ (EE)



$$(EE) \Rightarrow Ri = E - Bav \Rightarrow i = \frac{E - Bav}{R}$$

$$(EM) \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = iaB \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = \frac{EaB - (Ba)^2 v}{R} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{EaB - (Ba)^2 v}{mR} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{(Ba)^2}{mR} v = \frac{EaB}{mR}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{BaE}{mR} ; \tau = \frac{mR}{(Ba)^2}$$

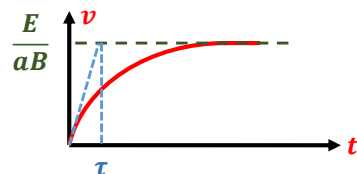
L'équation sans second membre s'écrit: $\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$ La solution est: $\Rightarrow v = A \cdot e^{-t/\tau}$

La solution particulière (régime permanent): $m \frac{dv_p}{dt} = \frac{EaB - (Ba)^2 v_p}{R} = 0$ $\Rightarrow v_p = \frac{E}{Ba}$

La solution générale est la somme, elle s'écrit alors: $\Rightarrow v = A \cdot e^{-t/\tau} + \frac{E}{Ba}$

À $t = 0$ avant d'appliquer la tension, $v(0) = A + \frac{E}{aB} = 0 \Rightarrow A = -\frac{E}{aB} \Rightarrow v(t) = \frac{E}{aB} (1 - e^{-t/\tau})$

Or $v_p = \frac{E}{aB}$ $\Rightarrow v(t) = v_p(1 - e^{-t/\tau})$



L'intensité de courant s'écrit, sachant que

$$i = \frac{E - Bav}{R} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

Bilan d'énergie:

Pour effectuer un bilan d'énergie, on doit intégrer le bilan de puissance entre 0 et un temps très supérieur à τ

Bilan de puissance:

$$\left. \begin{array}{l} (EE) \times i \Rightarrow (E - Bav = Ri) \times i \Rightarrow Ei - Bavi = Ri^2 \\ (EM) \times v \Rightarrow \left(m \frac{dv}{dt} = iaB\right) \times v \Rightarrow mv \frac{dv}{dt} = ivaB \end{array} \right\} \Rightarrow Ei - mv \frac{dv}{dt} = Ri^2 \Rightarrow Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)$$

$$\boxed{Ei} = \boxed{Ri^2} + \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}$$

Puissance électrique fournie par le générateur Puissance dissipée par effet Joule Puissance cinétique

$$\Rightarrow \int_0^\infty Ei dt = \int_0^\infty Ri^2 dt + \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) dt \Rightarrow \mathcal{E}_{g\acute{e}} = \mathcal{E}_J + \mathcal{E}_c$$

$$\mathcal{E}_{g\acute{e}} = \int_0^\infty Ei dt = \frac{E^2}{R} \int_0^\infty e^{-t/\tau} dt = \frac{\tau E^2}{R} \left[-e^{-t/\tau}\right]_0^\infty = \frac{\tau E^2}{R} ; \tau = \frac{mR}{(Ba)^2} \Rightarrow \mathcal{E}_{g\acute{e}} = \frac{mE^2}{(Ba)^2}$$

$$\mathcal{E}_J = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{E^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{\tau E^2}{2R} \left[-e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty = \frac{\tau E^2}{2R} \Rightarrow \mathcal{E}_J = \frac{mE^2}{2(Ba)^2}$$

$$\mathcal{E}_c = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) dt = \frac{1}{2}m[v^2]_0^{v_p} = \frac{1}{2}mv_p^2 ; v_p = \frac{E}{aB} \Rightarrow \mathcal{E}_c = \frac{mE^2}{2(Ba)^2}$$

L'énergie du générateur est répartie à parts égales entre l'énergie cinétique de la tige et l'énergie perdue par effet Joule dans le circuit.

III.2.b. Haut-parleur électrodynamique

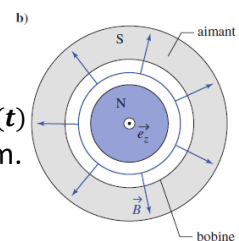
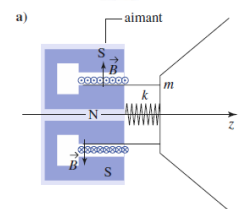
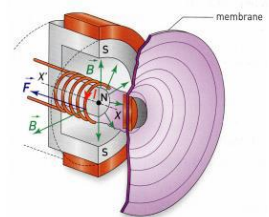
Présentation

Un haut-parleur est un transducteur qui produit un signal sonore image d'un signal électrique. Il est constitué par:

- Un aimant qui produit un champ magnétique radial $\vec{B} = B\vec{u}_r$.
- Une bobine de résistance R et d'inductance L solidaire d'une membrane qui crée des ondes sonores lorsqu'elle est en mouvement
- L'ensemble {bobine + membrane} de masse m est relié au bâti par un ressort de raideur k
- La bobine est reliée à un générateur qui délivre le signal électrique à transformer en signal sonore

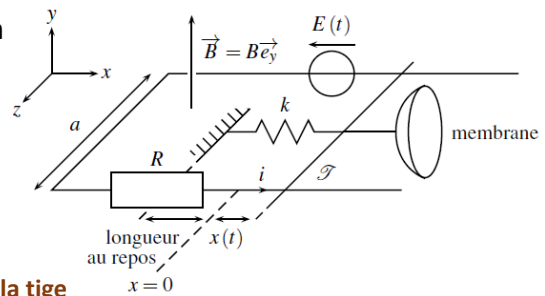
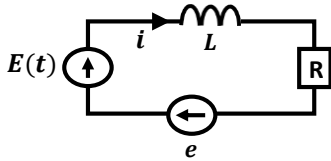
Principe de fonctionnement

- Le générateur impose la tension $E(t)$ et fait circuler un courant $i(t)$
- $i(t)$ et $\vec{B}$ créent une force de Laplace
- La membrane vibre et émet une onde sonore image du signal électrique $E(t)$
- Le circuit mobile dans un $\vec{B}$ stationnaire : il apparaît dans le circuit une f.é.m. induite e , qui s'oppose à la tension $E(t)$ du générateur (loi de Lenz).



dans la géométrie simplifiée des rails de Laplace, un haut parleur peut être modéliser par:

Le circuit électrique équivalent est:



La loi des mailles: $E + e = Ri + L \frac{di}{dt}$ Or $e = -B a v$ $E - Bav = Ri + L \frac{di}{dt}$ (EE)

La RFD:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R} + m\vec{g} + \vec{f}_L + \vec{f}_{rap} + \vec{f}_{ac}$$

Réaction $R\vec{e}_y$ Poids $-mg\vec{e}_y$ Force de Laplace $\vec{f}_L = iaB\vec{e}_x$ Force de rappel $\vec{f}_{rap} = -kx\vec{e}_x$ Force acoustique: couplage de la membrane avec l'air: $\vec{f}_{ac} = -\alpha v\vec{e}_x$

La projection suivant ox donne: $m \frac{dv}{dt} = iaB - kx - \alpha v$ (EM)

Bilan de puissance:

$$(EM) \times v \Rightarrow mv \frac{dv}{dt} = iaBv - kxv - \alpha v^2 \quad (EE) \times i \Rightarrow Ei - Bav i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow iaBv = kxv + \alpha v^2 + mv \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow Ei = Ri^2 + \alpha v^2 + mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} + Li \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow Ei = Ri^2 + \alpha v^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Li^2 \right)$$

Puissance électrique fournie par le générateur Ei Puissance dissipée par effet Joule Ri^2 Puissance acoustique αv^2 Énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$ Énergie potentielle élastique $\frac{1}{2}kx^2$ Énergie magnétique $\frac{1}{2}Li^2$

Rappel: $\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{df}{dt} dt = \frac{1}{T} (f(T) - f(0)) = 0$

$$\Rightarrow \langle Ei \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle + \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Li^2 \right) \right\rangle \Rightarrow \langle Ei \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle$$

On définit le rendement du haut parleur :

$$\eta = \frac{\text{Puissance utile}}{\text{Puissance consommée}} \quad \eta = \frac{\langle \alpha v^2 \rangle}{\langle Ei \rangle} = \frac{\langle Ei \rangle - \langle Ri^2 \rangle}{\langle Ei \rangle} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{\langle Ri^2 \rangle}{\langle Ei \rangle}$$

Régime sinusoïdal permanent

En régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω , et en notation complexe, (EE) et (EM) deviennent:

$$(EE) \Rightarrow \underline{E} - B a \underline{v} = R \underline{i} + L \frac{d\underline{i}}{dt} \Rightarrow \underline{E} - B a \underline{v} = (R + jL\omega) \underline{i} \Rightarrow \underline{E} = B a \underline{v} + (R + jL\omega) \underline{i}$$

$$(EM) \Rightarrow m \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{i} a B - k \underline{x} - \alpha \underline{v} \Rightarrow j m \omega \underline{v} = \underline{i} a B - \frac{k}{j\omega} \underline{v} - \alpha \underline{v} \Rightarrow (\alpha + j m \omega + \frac{k}{j\omega}) \underline{v} = \underline{i} a B$$

$$\Rightarrow \underline{v} = \frac{a B}{\alpha + j m \omega + \frac{k}{j\omega}} \underline{i} \quad (EE) \text{ devient: } \Rightarrow \underline{E} = (R + jL\omega + \frac{(aB)^2}{\alpha + j m \omega + \frac{k}{j\omega}}) \underline{i}$$

On définit l'impédance électrique du haut parleur: $Z = R + jL\omega + \frac{(aB)^2}{\alpha + j m \omega + \frac{k}{j\omega}} = R + jL\omega + Z_{cin}$

Apparition d'une impédance cinétique Z_{cin} , qui marque le couplage entre les grandeurs mécaniques et les grandeurs électriques.

$$\frac{1}{Z_{cin}} = \underbrace{\frac{a}{(aB)^2}}_{\frac{1}{R_{cin}}} + j\omega \underbrace{\left\{ \frac{m}{(aB)^2} \right\}}_{C_{cin}} + \frac{1}{j\omega} \underbrace{\left\{ \frac{k}{(aB)^2} \right\}}_{\frac{1}{L_{cin}}}$$

⇒ Le haut parleur est électriquement équivalent à:

