

[illegible]

- Lois locales de l'électrostatique et la magnétostatique.
- Équation locale de la conservation de la charge.
- Équations de Maxwell.
- Approximation des régimes quasi-permanents
- Énergie électromagnétique.

I. Régime statique

En régime statique, il-y-a découplage entre les champs électrostatique et magnétostatique.

I.1. Propriété du champ électrostatique

I.1.a. Flux du champ électrostatique – Théorème de Gauss

Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée est lié à la charge totale

intérieur à cette surface par la relation:

$$\oiint_{M \in S} \vec{E}(M) \vec{ds}(M) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Exemple: Calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace crée par une sphère chargé uniformément en volume.

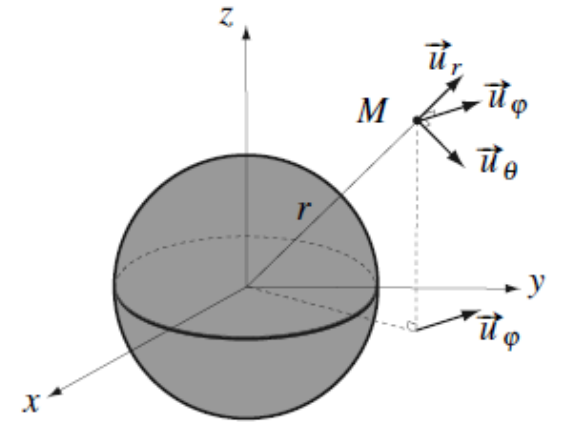
En un point M de l'espace le champ électrostatique s'écrit

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\varphi$$

Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont pairs $\Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$

Tout plan contenant le point O est pair, donc $\vec{E}(O)$ appartient à tous ses plans $\Rightarrow \vec{E}(O) = \vec{0}$

La distribution est invariante par toute rotation des angles θ et $\varphi \Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r$



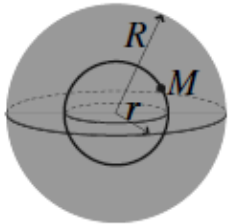
Choix de la surface de Gauss: on choisit la surface de Gauss de telle sorte qu'on puisse sortir

le champ électrostatique de l'intégrale $\oiint_{M \in S} \vec{E}(M) \vec{ds}(M) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

La surface de Gauss est une sphère de rayon r , soit $\vec{ds}(M) = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$ et $d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

$$\oiint_{M \in S} \vec{E}(M) \vec{ds}(M) = \oiint_{M \in S} E_r(r) \vec{u}_r r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r = E_r(r) r^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \quad \boxed{\oiint_{M \in S} \vec{E}(M) \vec{ds}(M) = 4\pi r^2 E_r(r)}$$

1^{er} cas: $r < R$

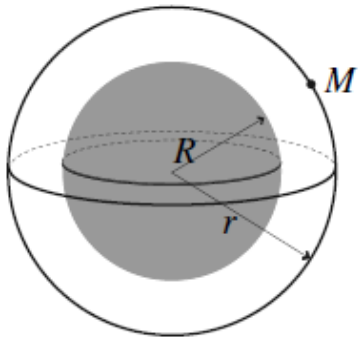


$$Q_{int} = \iiint \rho d\tau = \iiint \rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \rho \int_0^r r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E_r (r < R) = \rho \frac{4}{3\epsilon_0} \pi r^3$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r < R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r$$

2^{ième} cas: $r > R$



$$Q_{int} = \iiint \rho d\tau = \iiint \rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E_r (r > R) = \rho \frac{4}{3\epsilon_0} \pi R^3$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r > R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Soit $\mathcal{S}$ une surface qui délimite le volume $\mathcal{V}$, alors le théorème de Green-Ostrogradski donne:

$$\oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P) d\vec{s}(P) = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \text{div} \vec{E}(M) d\tau \quad \text{D'autre part:} \quad Q_{int} = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \rho(M) d\tau$$

On obtient donc: $\iiint_{M \in \mathcal{V}} \text{div} \vec{E}(M) d\tau = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} d\tau$ Quelque soit le volume $\mathcal{V}$

Ce qui conduit à: $\boxed{\text{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}}$ C'est le théorème de Gauss sous sa forme locale

Exemple: sphère chargée uniformément en volume. $\Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r$

le théorème de Gauss s'écrit: $\text{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$

$$\text{div} \vec{E}(M) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta E_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(E_\phi)}{\partial \phi} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E_r)}{dr} \quad \text{D'où} \quad \boxed{\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E_r)}{dr} = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}}$$

1^{er} cas: $r < R$ $\rho(M) = \rho \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E_r)}{dr} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{d(r^2 E_r)}{dr} = \frac{\rho r^2}{\epsilon_0} \Rightarrow r^2 E_r = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int r^2 dr$

$$\Rightarrow r^2 E_r = \frac{\rho r^3}{3\epsilon_0} + cte \quad E_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} + \frac{cte}{r^2} \quad \text{Or} \quad E_r(r=0) = 0 \Rightarrow cte = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r < R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r}$$

2^{ième} cas: $r > R$ $\rho(\mathbf{M}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E_r)}{dr} = 0 \Rightarrow r^2 E_r = cte \Rightarrow E_r = \frac{cte}{r^2}$

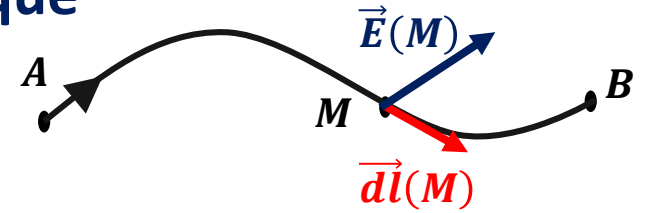
La continuité de la composante normale du champ électrostatique en $r = R$ donne:

$$E_r(r = R^+) = E_r(r = R^-) \Rightarrow \frac{cte}{R^2} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \Rightarrow cte = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r > R) = \frac{\rho R^3}{3r^2 \epsilon_0} \vec{u}_r$$

I.1.b. Circulation du champ électrostatique – Potentiel électrostatique

On définit le potentiel électrostatique V de manière à ce que la circulation du champ électrostatique entre deux points A et B soit:

$$\int_A^B \vec{E}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{l}(\mathbf{M}) = V(A) - V(B)$$



Dans le cas où A et B sont infiniment proche de M , cette relation devient: $\vec{E}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{l}(\mathbf{M}) = -dV(\mathbf{M})$

Or $dV(\mathbf{M}) = \vec{g} \cdot d\vec{l}(\mathbf{M}) \Rightarrow \vec{E}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{l}(\mathbf{M}) = -\vec{g} \cdot d\vec{l}(\mathbf{M}) \Rightarrow \vec{E}(\mathbf{M}) = -\vec{g}$

La circulation le long d'un contour s'écrit: $\oint \vec{E}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{l}(\mathbf{M}) = \int_A^A \vec{E}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{l}(\mathbf{M}) = V(A) - V(A) = 0$

On dit que le champ électrostatique est à circulation conservative

Soit S une surface qui s'appuie sur le contour Γ , alors le théorème de Stokes-Ampère s'écrit:

$$\oint_{P \in \Gamma} \vec{E}(\mathbf{P}) \cdot d\vec{l}(\mathbf{P}) = \iint_{M \in S/\Gamma} \text{rot} \vec{E}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{s}(\mathbf{M}) = 0 \Rightarrow \text{rot} \vec{E}(\mathbf{M}) = \vec{0}$$

I.1.c. Équation de Poisson – Équation de Laplace

Le théorème de Gauss sous sa forme locale s'écrit: $\text{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$ Or $\vec{E}(M) = -\text{grad}(V(M))$

$$\text{div}[-\text{grad}(V(M))] = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \Rightarrow -\Delta V(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{Équation de Poisson}$$

Si au point M , $\rho(M) = 0$ On obtient: $\Rightarrow \Delta V(M) = 0$ Équation de Laplace

Exemple: sphère chargée uniformément en volume. $\Rightarrow V(M) = V(r)$

$$\Delta V(M) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right)$$

1^{er} cas: $r > R$ $\rho(M) = 0 \Rightarrow \Delta V(M) = 0$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r^2 \frac{dV}{dr} = c_3 \Rightarrow V = \int \frac{c_3}{r^2} dr \Rightarrow V = \frac{c_4}{r} + c_5 \Rightarrow V = \frac{c_4}{r} \quad \text{car } V \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

Or pour $r \gg R$, la sphère est équivalente à un point qui porte la charge $Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$

$$\Rightarrow V = \frac{c_4}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} \Rightarrow c_4 = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \quad \Rightarrow V(r > R) = \frac{\rho R^3}{3r\epsilon_0}$$

2^{ème} cas: $r < R$ $\rho(M) = \rho \neq 0 \Rightarrow \Delta V(M) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho r^2}{\epsilon_0} \Rightarrow r^2 \frac{dV}{dr} = -\int \frac{\rho r^2}{\epsilon_0} dr = -\frac{\rho r^3}{3\epsilon_0} + c_1 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho r}{3\epsilon_0} + \frac{c_1}{r^2}$$

$$\Rightarrow V = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} - \frac{c_1}{r} + c_2 \quad \text{En } r = 0, V \text{ doit être défini} \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow V = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + c_2$$

La continuité du potentiel en $r = R$ donne: $V(r = R^-) = V(r = R^+)$

$$\Rightarrow -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + c_2 = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \Rightarrow c_2 = \frac{3\rho R^2}{6\epsilon_0} \Rightarrow V = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{3\rho R^2}{6\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow V(r < R) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - 3R^2)$$

I.2. Propriété du champ magnétostatique

I.2.a. Conservation du flux magnétique

Le flux du champ magnétostatique à travers une surface fermée est nul: $\oiint_{M \in S} \vec{B}(M) \overrightarrow{ds}(M) = 0$

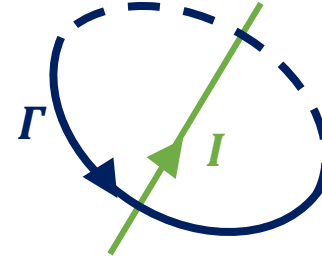
Soit S une surface qui délimite le volume V , alors le théorème de Green-Ostrogradski donne:

$$\oiint_{P \in S} \vec{B}(P) \overrightarrow{ds}(P) = \iiint_{M \in V} \text{div } \vec{B}(M) d\tau = 0 \quad \text{Quelque soit le volume } V$$

Ce qui conduit à: $\text{div } \vec{B}(M) = 0$ C'est l'équation de Maxwell flux

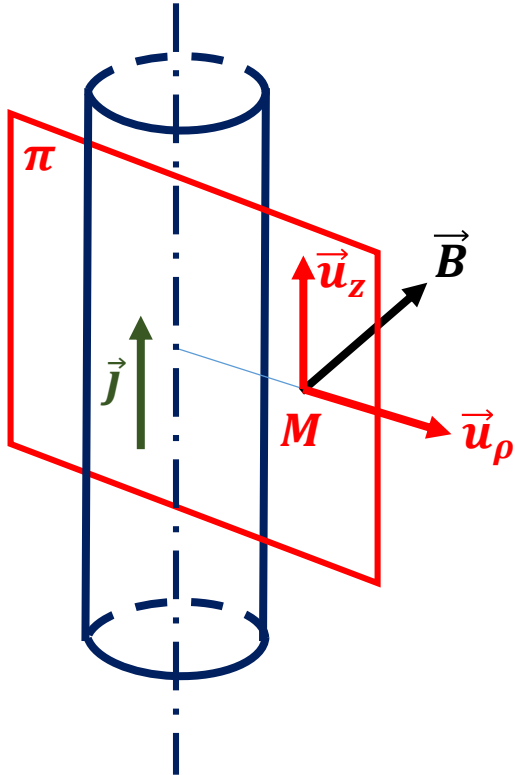
I.2.b. Circulation du champ magnétostatique – théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétostatique le long d'une courbe fermée orientée Γ est liée au courant qui a traversé ce contour via le théorème d'Ampère:



$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}(M) = \mu_0 \Sigma I$$

Exemple: Calculer le champ magnétostatique créé par un cylindre infini de rayon R parcouru par un courant d'intensité I et de vecteur densité volumique de courant $\vec{j} = J\vec{u}_z$ uniforme.



En un point M de l'espace le champ magnétostatique s'écrit

$$\vec{B}(M) = B_\rho(\rho, \varphi, z)\vec{u}_\rho + B_\varphi(\rho, \varphi, z)\vec{u}_\varphi + B_z(\rho, \varphi, z)\vec{u}_z$$

$$\text{Le plan } (M, \vec{u}_\rho, \vec{u}_z) \text{ est pair} \quad \Rightarrow \vec{B}(M) = B_\varphi(\rho, \varphi, z)\vec{u}_\varphi$$

Tout plan contenant l'axe Oz est pair, donc $\vec{B}(\rho = 0)$ est perpendiculaire à tous ses plans $\Rightarrow \vec{B}(\rho = 0) = \vec{0}$

La distribution est invariante par rotation de l'angles φ et par translation parallèle à Oz $\Rightarrow \vec{B}(M) = B_\varphi(\rho)\vec{u}_\varphi$

Choix du contour d'Ampère: on choisit le contour de telle sorte qu'on puisse sortir le champ magnétostatique de l'intégrale $\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}(M) = \mu_0 \Sigma I = \mu_0 \iint_{S/\Gamma} \vec{J} d\vec{s}$

Le contour d'Ampère est un cercle de rayon ρ , soit $d\vec{l}(M) = \rho d\varphi \vec{u}_\varphi$ et $d\vec{s} = \rho d\rho d\varphi \vec{u}_z$

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}(M) = \int_0^{2\pi} B_\varphi(\rho) \vec{u}_\varphi \rho d\varphi \vec{u}_\varphi = \rho B_\varphi(\rho) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \rho B_\varphi(\rho)$$

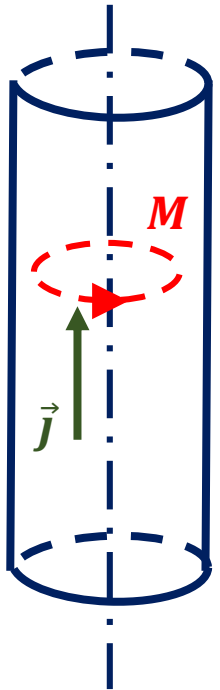
1^{er} cas: $\rho < R$

$$\Sigma I = \iint_{S/\Gamma} \vec{J} d\vec{s} = \iint_{S/\Gamma} J \vec{u}_z \rho d\rho d\varphi \vec{u}_z = J \int_0^\rho \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi \rho^2 J$$

$$\Rightarrow 2\pi \rho B_\varphi(\rho) = \mu_0 \pi \rho^2 J \quad \Rightarrow B_\varphi(\rho) = \frac{\mu_0 \rho J}{2} \quad \Rightarrow \vec{B}(\rho < R) = \frac{\mu_0 \rho J}{2} \vec{u}_\varphi$$

Or $I = \int_0^R \int_0^{2\pi} \vec{J} d\vec{s} = J \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^2 J \quad \Rightarrow J = \frac{I}{\pi R^2}$

$$\Rightarrow \vec{B}(\rho < R) = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2} \vec{u}_\varphi$$



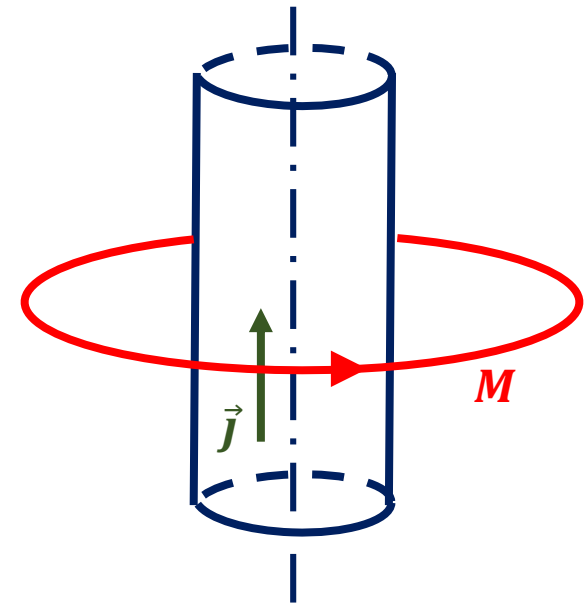
2^{ième} cas: $\rho > R$

$$\Sigma I = \iint_{S/\Gamma} \vec{J} d\vec{s} = \iint_{S/\Gamma} J \vec{u}_z \rho d\rho d\varphi \vec{u}_z = J \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^2 J = I$$

$$\Rightarrow 2\pi\rho B_\varphi(\rho) = \mu_0 I \quad \Rightarrow B_\varphi(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \quad \Rightarrow \vec{B}(\rho > R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{u}_\varphi$$

Or $I = \pi R^2 J$

$$\Rightarrow \vec{B}(\rho > R) = \frac{\mu_0 J R^2}{2\rho} \vec{u}_\varphi$$



Soit S une surface qui s'appuie sur le contour Γ , alors le théorème de Stokes-Ampère s'écrit:

$$\oint_{P \in \Gamma} \vec{B}(P) \cdot d\vec{l}(P) = \iint_{M \in S/\Gamma} r \vec{\text{rot}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{s}(M)$$

$$\text{Or } \oint_{P \in \Gamma} \vec{B}(P) \cdot d\vec{l}(P) = \mu_0 \iint_{M \in S/\Gamma} \vec{J}(M) \cdot d\vec{s}(M)$$

On obtient:

$$r \vec{\text{rot}} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{J}(M)$$

Le théorème d'Ampère sous sa forme locale

Exemple: cylindre infini de rayon R parcouru par un courant d'intensité I et de vecteur densité volumique de courant $\vec{j} = J\vec{u}_z$ uniforme $\Rightarrow \vec{B}(M) = B_\varphi(\rho)\vec{u}_\varphi$ et $\vec{B}(\rho = 0) = \vec{0}$

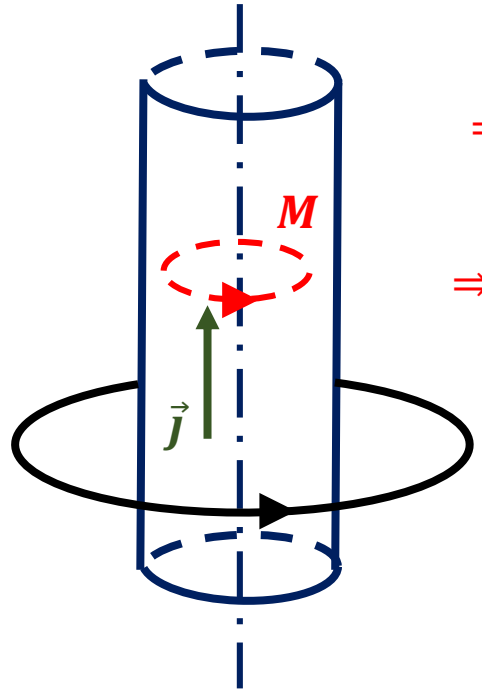
$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}(M)) = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right] \vec{u}_\rho + \left[\frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right] \vec{u}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho \cdot B_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial B_\rho}{\partial \varphi} \right] \vec{u}_z = \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho \cdot B_\varphi)}{d\rho} \vec{u}_z = \mu_0 \vec{j}(M)$$

1^{er} cas: $\rho < R$ $\vec{j}(M) = J\vec{u}_z$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho \cdot B_\varphi)}{d\rho} = \mu_0 J \Rightarrow \frac{d(\rho \cdot B_\varphi)}{d\rho} = \mu_0 J \rho \Rightarrow \rho \cdot B_\varphi = \int \mu_0 J \rho d\rho \Rightarrow \rho \cdot B_\varphi = \frac{\mu_0 J \rho^2}{2} + cte$$

$$\Rightarrow B_\varphi = \frac{\mu_0 J \rho^2}{2\rho} + \frac{cte}{\rho} \quad cte = 0 \quad \text{car } B_\varphi(\rho = 0) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\rho < R) = \frac{\mu_0 \rho J}{2} \vec{u}_\varphi$$



2^{ième} cas: $\rho > R$ $\vec{j}(M) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho \cdot B_\varphi)}{d\rho} = 0 \Rightarrow \rho \cdot B_\varphi = cte \Rightarrow B_\varphi = \frac{cte}{\rho}$$

Continuité en $\rho = R$: $B(\rho = R^+) = B(\rho = R^-) \Rightarrow \frac{cte}{R} = \frac{\mu_0 R J}{2} \Rightarrow cte = \frac{\mu_0 R^2 J}{2}$

$$\Rightarrow \vec{B}(\rho > R) = \frac{\mu_0 J R^2}{2\rho} \vec{u}_\varphi$$

II. La loi de la conservation de la charge électrique

On se place en régime variable. Le champ électrique, le champ magnétique, la densité volumique de charge et la densité volumique de courant dépendront de la position $\mathbf{M}$ dans l'espace et de l'instant t .

II.1. Cas unidimensionnel

On fait un bilan des charges électriques présentes dans le cylindre de section S , de longueur dx et de volume $d\tau = Sdx$ entre t et $t + dt$.

➤ la charge électrique qui est entrée par la face située à l'abscisse x est :

$$\delta Q_x = I(x, t)dt = \vec{j}(x, t) \cdot \vec{S}(x)dt = j(x, t)\vec{u}_x S \vec{u}_x dt = j(x, t)Sdt$$

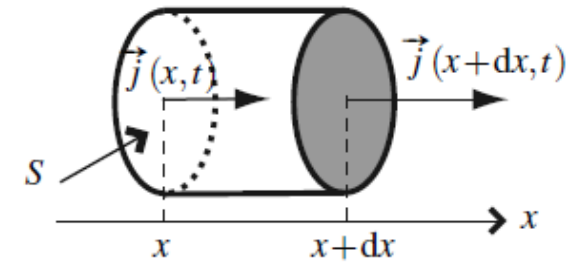
➤ la charge électrique qui est entrée par la face située à l'abscisse $x + dx$ est :

$$\delta Q_{x+dx} = I(x + dx, t)dt = \vec{j}(x + dx, t) \cdot \vec{S}(x + dx)dt = j(x + dx, t)\vec{u}_x (-S\vec{u}_x)dt = -j(x + dx, t)Sdt$$

⇒ La charge électrique qui est entrée dans le volume Sdx entre t et $t + dt$ est donc :

$$\delta Q_{ext \rightarrow sdx} = \delta Q_x + \delta Q_{x+dx} = j(x, t)Sdt - j(x + dx, t)Sdt = [j(x, t) - j(x + dx, t)]Sdt$$

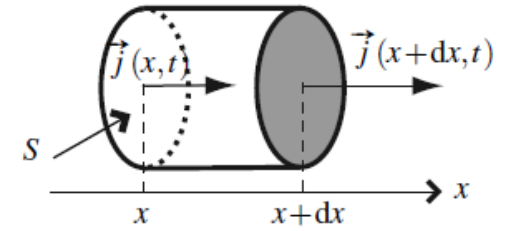
$$\Rightarrow \delta Q_{ext \rightarrow sdx} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} Sdxdt$$



Or pendant dt la charge électrique contenue dans le volume Sdx a augmentée de la quantité :

$$dQ = Q(x, t + dt) - Q(x, t) = \rho(x, t + dt)Sdx - \rho(x, t)Sdx$$

$$= [\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)]Sdx \quad \Rightarrow dQ = \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} Sdxdt$$



Cette augmentation s'explique par le transfert des charges de l'extérieur vers Sdx

$$\Rightarrow dQ = \delta Q_{ext \rightarrow Sdx} \Rightarrow \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} Sdxdt = - \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} Sdxdt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0$$

II.2. Cas général

Dans le cas général, $\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} = \text{div } \vec{j}(M, t)$

Et l'équation locale de la conservation de la charge électrique s'écrit:

$$\text{div } \vec{j}(M, t) + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0$$

III. Les équations de Maxwell

Le champ électromagnétique $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$ vérifie les quatre **équations de Maxwell**, qui constituent le postulat de base de l'électromagnétisme.

III.1. Équation de Maxwell flux: $\mathbf{M}\Phi$

La forme locale de l'équation de Maxwell flux est: $\text{div}(\vec{B}(M, t)) = 0$

$$\Rightarrow \iiint_v \text{div}(\vec{B}(M, t)) d\tau(M) = 0 \Rightarrow \oiint_s \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{S}(M) = 0$$
 La forme intégrale de l'équation de $\mathbf{M}\Phi$

- Le champ magnétique est à flux conservatif.
- Les lignes de champ sont des courbes fermées. (Il n'y a pas des monopôles magnétiques)

III.2. Équation de Maxwell Gauss: $\mathbf{MG}$

La forme locale de l'équation de Maxwell Gauss est: $\text{div}(\vec{E}(M, t)) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \iiint_v \text{div}(\vec{E}(M, t)) d\tau(M) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_v \rho(M, t) d\tau(M) \Rightarrow \oiint_{P \in \Sigma} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{S}_{ext}(P) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

La forme intégrale de l'équation de Maxwell Gauss

- Le théorème de Gauss reste valable en régime variable

III.3. Équation de Maxwell Faraday: MF

L'équation de Maxwell Faraday est:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}(M, t)) = - \frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$$

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}(M, t)) \cdot d\vec{S}(M) = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}(M) \quad \Rightarrow \oint_C \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{l}(P) = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S}(M) = - \frac{d\varphi}{dt}$$

- Le champ électrique est à circulation non conservative
- La variation dans le temps du champ magnétique représente une source du champ électrique
- L'équation de Maxwell Faraday est en accord avec la loi expérimentale de Faraday $e = - \frac{d\varphi}{dt}$
le signe (−) traduit la loi de Lenz

III.4. Équation de Maxwell Ampère: MA

Supposons que le théorème d'Ampère reste valable en régime variable: $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 \vec{j}(M, t)$

Si on applique la divergence: $\text{div} [\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}(M, t))] = \mu_0 \text{div} [\vec{j}(M, t)]$ Or $\text{div} [\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a})] = 0$

$\Rightarrow \text{div} [\vec{j}(M, t)] = 0$ Qui est incompatible avec l'équation de conservation de la charge

Pour pallier ce défaut, l'idée de Maxwell fut d'introduire un terme supplémentaire au second membre, appelé **courant de déplacement** noté: $\vec{J}_D$

L'équation de Maxwell Ampère s'écrit alors: $\overrightarrow{rot}(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 (\vec{j}(M, t) + \vec{J}_D(M, t))$

$$\text{div} [\overrightarrow{rot}(\vec{B}(M, t))] = \mu_0 \text{div} [\vec{j}(M, t) + \vec{J}_D(M, t)] = 0 \quad \Rightarrow \text{div} [\vec{J}_D(M, t)] = -\text{div} [\vec{j}(M, t)]$$

Or l'équation de conservation de la charge $\text{div} \vec{j}(M, t) + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow -\text{div} [\vec{j}(M, t)] = \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t}$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{J}_D(M, t) = \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} \quad \text{Or d'après MG} \quad \text{div}(\vec{E}(M, t)) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho(M, t) = \epsilon_0 \text{div}(\vec{E}(M, t))$$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{J}_D(M, t) = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \text{div}(\vec{E}(M, t))) \Rightarrow \text{div} \vec{J}_D(M, t) = \text{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \right) \quad \Rightarrow \vec{J}_D(M, t) = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$$

L'équation de Maxwell Ampère s'écrit alors:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 \left(\vec{j}(M, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \right)$$

➤ La variation dans le temps du champ électrique représente une source du champ magnétique

➤ $\vec{J}_D(M, t) = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$ est homogène à une densité de courant, mais elle n'est ni une densité de courant ni un déplacement de quoi que ce soit.

$$\iint_s (MA) \overrightarrow{dS}(M) \Rightarrow \iint_s \overrightarrow{rot}(\vec{B}(M, t)) \overrightarrow{dS}(M) = \mu_0 \iint_s \vec{j}(M, t) \overrightarrow{dS}(M) + \mu_0 \epsilon_0 \iint_s \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \overrightarrow{dS}(M)$$

$$\Rightarrow \oint_{P \in C} \vec{B}(P, t) \cdot \overrightarrow{dl}(P) = \mu_0 I_{\text{enlacée}} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{M \in S/C} \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \overrightarrow{dS}(M)$$

Le théorème d'Ampère généralisé

III.5. Bilan récapitulatif

$$\mathbf{MG} \quad \text{div}(\vec{E}(M, t)) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oint_{P \in \Sigma} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{S}_{ext}(P) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{M\Phi} \quad \text{div}(\vec{B}(M, t)) = 0 \Leftrightarrow \oint_S \vec{B}(P, t) d\vec{S}(M) = 0$$

$$\mathbf{MF} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}(M, t)) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{l}(P) = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S}(M) = -\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\mathbf{MA} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 \left(\vec{j}(M, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \oint_C \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{l}(P) = \mu_0 I_{en} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{S/C} \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}(M)$$

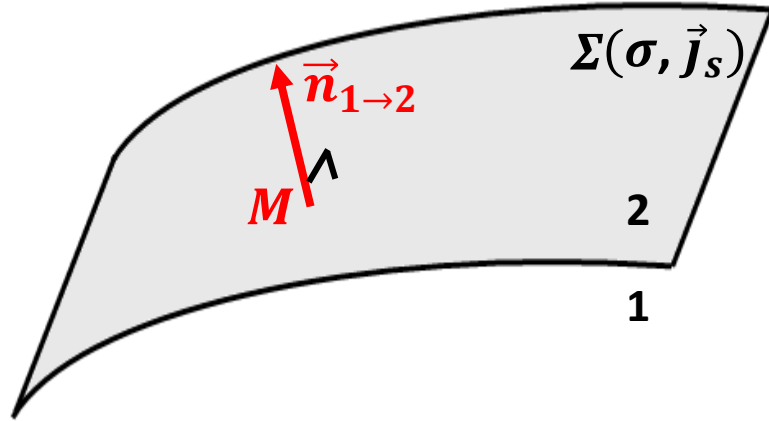
- Les équations de Maxwell assurent un lien entre les champs électrique et magnétique qui deviennent une seule entité appelé champ électromagnétique
- Les équations de Maxwell sont compatibles avec la loi de conservation de la charge:

$$\begin{aligned} \text{div}(MA) = 0 &\Rightarrow \text{div} \left(\vec{j}(M, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \text{div}(\vec{j}(M, t)) + \text{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \text{div}(\vec{j}(M, t)) + \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}(M, t)) = 0 \quad \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}(M, t)) = \rho(M, t) \Rightarrow \text{div} \vec{j}(M, t) + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

- Les équations de Maxwell sont des équations linéaires, le principe de superposition s'applique donc au champ électromagnétique.

IV. Les relations de passage

Soit une surface Σ séparant deux milieux **1** et **2** et portant des charges et courants surfaciques caractérisés par les densités σ et $\vec{j}_s$. Alors, les relations de passage s'écrivent:



$$\vec{E}_2(M, t)|_{\Sigma} - \vec{E}_1(M, t)|_{\Sigma} = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\text{Projection } \perp \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow \vec{E}_{2T}(M, t)|_{\Sigma} - \vec{E}_{1T}(M, t)|_{\Sigma} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ **Continuité de la composante tangentielle du champ électrique**

$$\text{Projection } \parallel \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow \vec{E}_{2N}(M, t)|_{\Sigma} - \vec{E}_{1N}(M, t)|_{\Sigma} = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$\Rightarrow$ **Discontinuité de la composante normale du champ électrique**

$$\vec{B}_2(M, t)|_{\Sigma} - \vec{B}_1(M, t)|_{\Sigma} = \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\text{Projection } \perp \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow \vec{B}_{2T}(M, t)|_{\Sigma} - \vec{B}_{1T}(M, t)|_{\Sigma} = \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$\Rightarrow$ **Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique**

$$\text{Projection } \parallel \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow \vec{B}_2(M, t)|_{\Sigma} - \vec{B}_1(M, t)|_{\Sigma} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ **Continuité de la composante normale du champ magnétique**

Dans le cas d'une modélisation volumique le champ électromagnétique est continu.

V. Équations de propagation des champs dans une région vide de charges et de courant

L'équation de **MF** montre un couplage entre les variations temporelles de $\vec{B}(M, t)$ et les variations spatiales de $\vec{E}(M, t)$. L'équation de **MA** montre un couplage entre les variations temporelles de $\vec{E}(M, t)$ et les variations spatiales de $\vec{B}(M, t)$.

Il en résulte la possibilité d'une propagation du champ électromagnétique.

Dans une région vide de charge $\rho(M, t) = 0$ et de courant $\vec{j}_s(M, t) = \vec{0}$, les équations de Maxwell

$$\text{MG } \text{div}(\vec{E}(M, t)) = 0$$

$$\text{M}\Phi \text{ } \text{div}(\vec{B}(M, t)) = 0$$

$$\text{MF } \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}(M, t)) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$$

$$\text{MA } \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\text{MF}) \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}(M, t))\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}\right) \quad \text{or} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{T})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{T})) - \Delta(\vec{T})$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\underbrace{\text{div}(\vec{E}(M, t))}_{=0}\right) - \Delta(\vec{E}(M, t)) = -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}(M, t)) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(M, t)}{\partial t^2}$$

$$\Delta(\vec{E}(M, t)) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(M, t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Équations de propagation
du champ électrique

$$\overrightarrow{rot}(MA) \Rightarrow \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{B}(M, t))) = \overrightarrow{rot}\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}\right) \quad \text{or } \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{T})) = \overrightarrow{grad}(\text{div}(\vec{T})) - \Delta(\vec{T})$$

$$\overrightarrow{grad}\left(\underbrace{\text{div}(\vec{B}(M, t))}_{=0}\right) - \Delta(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{rot}(\vec{E}(M, t)) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(M, t)}{\partial t^2}$$

$$\Delta(\vec{B}(M, t)) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(M, t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Équations de propagation
du champ magnétique

Équation aux dimensions $\frac{[B]}{L^2} - [\mu_0 \epsilon_0] \frac{[B]}{T^2} = 0 \Rightarrow [\mu_0 \epsilon_0] = L^{-2} T^2 \Rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \right] = L \cdot T^{-1}$

$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ est homogène à une vitesse, elle s'identifie à la célérité de la lumière dans le vide

$$\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$$

Le champ électromagnétique $(\vec{E}(M, t); \vec{B}(M, t))$ satisfait l'équation de D'Alembert $\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \vec{0}$
qui traduit une onde progressive à la vitesse $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.

VI. Approximation des régimes quasi-stationnaires

Soient D une distance caractéristique de la propagation et T un temps caractéristique de l'évolution de la source et du champ électromagnétique, alors:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{1}{T} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sim \frac{1}{T^2} \quad \text{div}; \|\overrightarrow{rot}\| \text{ et } \|\overrightarrow{grad}\| \sim \frac{1}{D} \quad \Delta \sim \frac{1}{D^2}$$

L'équation de **MF** donne: $\overrightarrow{rot}(\vec{E}(M, t)) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\|\vec{E}(M, t)\|}{D} \sim \frac{\|\vec{B}(M, t)\|}{T}$

Dans l'équation de **MA**, on va comparer les termes: $\overrightarrow{rot}(\vec{B}(M, t))$ et $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$

$$\|\overrightarrow{rot}(\vec{B}(M, t))\| \sim \frac{\|\vec{B}(M, t)\|}{D} \text{ et } \mu_0 \epsilon_0 \left\| \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \right\| \sim \frac{\|\vec{E}(M, t)\|}{c^2 T}$$

L'ARQS magnétique consiste à négliger $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$ devant $\overrightarrow{rot}(\vec{B}(M, t))$ dans l'équation de MA

$$\frac{\|\overrightarrow{rot}(\vec{B}(M, t))\|}{\mu_0 \epsilon_0 \left\| \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \right\|} \gg 1 \Rightarrow \frac{\|\vec{B}(M, t)\|}{D} \frac{c^2 T}{\|\vec{E}(M, t)\|} \gg 1 \quad \text{Or} \quad \frac{\|\vec{B}(M, t)\|}{\|\vec{E}(M, t)\|} \sim \frac{T}{D} \Rightarrow \left(\frac{cT}{D} \right)^2 \gg 1$$

L'ARQS magnétique $\frac{cT}{D} \gg 1$

$D \ll cT = \lambda$ Où λ est une grandeur qui caractérise l'évolution spatiale du champ.

$\frac{D}{c} = \tau \ll T$ Où τ est le temps de retard, c'est le temps mis pour que le champ progresse d'une distance de l'ordre de D

L'équation de **MA** s'écrit alors: $\overrightarrow{rot}(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 \vec{j}(M, t)$

Ceci revient à négliger $\vec{j}_D(M, t) = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$ devant $\vec{j}(M, t)$ si ce dernier est non nul

Exemple:

Conducteur en ARQS: $\left\| \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \right\| \ll \|\vec{j}(M, t)\|$ **MA** s'écrit alors: $\overrightarrow{rot}(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 \vec{j}(M, t)$

Condensateur en ARQS: $\|\vec{j}(M, t)\| = 0$ **MA** s'écrit alors: $\overrightarrow{rot}(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$

VII. Énergie du champ électromagnétique

VII.1. Puissance cédée par $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$ à la matière

Soit un matériau placé dans une région où règne un champ $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$. Un élément de volume $d\tau$ contenant la charge $\rho d\tau$, mobile à la vitesse $\vec{v}$, subit l'action de la force de Lorentz: $d\vec{F} = \rho d\tau (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

On définit la densité volumique de force électromagnétique par: $\vec{f}_v = \frac{d\vec{F}}{d\tau} = \rho (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

La puissance cédée par le champ au volume élémentaire $d\tau$ est:

$$dP_{\text{cédée}} = d\vec{F} \cdot \vec{v} = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} d\tau \quad \text{or} \quad \rho \vec{v} = \vec{j} \quad \text{Vecteur densité volumique de courant}$$

$$dP_{\text{cédée}} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

La puissance volumique cédée par le champ à la matière est: $\frac{dP_{\text{cédée}}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

La puissance totale cédée par le champ à la matière est: $P_{\text{cédée}} = \iiint_v \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$

Exemple: conducteur ohmique

Un conducteur est dit ohmique s'il obéit à la loi d'Ohm locale:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

γ est la conductivité électrique du milieu, s'exprime en siemens par mètre:

$$S.m^{-1} = \Omega^{-1}.m^{-1}$$

Soit un conducteur ohmique placé dans une région où règne un champ électrique.

Soient q charge d'un porteur de charge m sa masse et n le nombre par unité de volume.

Un porteur de charge est soumis à:

➤ Force électrique: $\vec{F}_e = q\vec{E}$

➤ Force qui modélise les interactions du porteur de charge avec son milieu: $\vec{F}_f = -h\vec{v}$, $h > 0$

La RFD s'écrit:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_e + \vec{F}_f \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - h\vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{h}{m}\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E} \quad \text{Soit} \quad \frac{h}{m} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

En régime permanent: $\frac{1}{\tau}\vec{v}_p = \frac{q}{m}\vec{E} \Rightarrow \vec{v}_p = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$ or $\vec{j} = nq\vec{v}_p \Rightarrow \vec{j} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E} \Rightarrow \gamma = \frac{nq^2\tau}{m}$

La puissance volumique cédée à un conducteur ohmique, appelée aussi puissance volumique dissipée par effet Joule est:

$$\frac{dP_J}{d\tau} = \vec{j}\vec{E} = \gamma E^2$$

VII.2. Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting

Le champ électromagnétique possède une énergie appelée énergie électromagnétique: U_{em}

La densité volumique d'énergie électromagnétique est: $u_{em} = \frac{dU_{em}}{d\tau}$ $\Rightarrow U_{em} = \iiint_v u_{em} d\tau$

On décrit le déplacement d'énergie électromagnétique par le vecteur densité volumique de courant d'énergie appelé vecteur de Poynting $\vec{\pi}$ tel que son flux à travers une surface s'identifie à la puissance rayonnée à travers cette surface:

$$P_{ray} = \iint_s \vec{\pi} \cdot \vec{ds}$$

VII.3. Bilan de puissance et identité de Poynting

On considère un matériau de volume V placé dans un champ électromagnétique. La puissance fournie par une diminution de l'énergie électromagnétique du champ se trouve sous forme de puissance cédée à la matière et de puissance rayonnée à travers la surface qui délimite le volume, soit alors:

$$-\frac{dU_{em}}{dt} = P_{cédée} + P_{ray} \quad \Rightarrow \quad -\frac{dU_{em}}{dt} = \iiint_v \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau + \oiint_s \vec{\pi} \cdot \vec{ds} \quad \text{Équation intégrale de conservation de l'énergie}$$

$$\text{Or } U_{em} = \iiint_v u_{em} d\tau \quad \text{et} \quad \oiint_s \vec{\pi} \cdot \vec{ds} = \iiint_v \text{div}(\vec{\pi}) d\tau \quad \Rightarrow \quad -\iiint_v \frac{du_{em}}{dt} d\tau = \iiint_v \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau + \iiint_v \text{div}(\vec{\pi}) d\tau \quad \forall v$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \vec{j} \cdot \vec{E} + \text{div}(\vec{\pi}) \quad \Rightarrow \text{div}(\vec{\pi}) + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{Équation locale de conservation de l'énergie}$$

Expression de $\vec{\pi}$ et u_{em}

$$\mathbf{MA} \times \frac{\vec{E}}{\mu_0} - \mathbf{MF} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad \left\{ \frac{\vec{E}}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \frac{\vec{E}}{\mu_0} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right\} - \left\{ \frac{\vec{B}}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\vec{B}}{\mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\left\{ \vec{E} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) - \vec{B} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) \right\}}_{\text{div}(\vec{B} \wedge \vec{E})} = \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}}_{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right)} + \epsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{B}}{\mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow -\text{div} \left(\frac{\vec{B} \wedge \vec{E}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow \text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{Par identification avec} \quad \text{div}(\vec{\pi}) + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = u_e + u_m$$

$$div(\vec{B})=0\qquad div(\vec{E})=\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B})=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E})=\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} e=\oint_C \vec{E}.\overrightarrow{dl} &= \frac{-d}{dt}\iint_S \vec{B}(P,t).\overrightarrow{dS}(P)=-\iint_S \frac{\partial \vec{B}(P,t)}{\partial t}.\overrightarrow{dS}\\ &= \iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{E}(P,t)\right) d\vec{S}(P) \end{aligned}$$

$$(\vec{E}(\boldsymbol{M},t),\vec{B}(\boldsymbol{M},t))$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{T})\right)=\overrightarrow{grad}\left(div(\vec{T})\right)-\Delta(\vec{T})$$

$$\oiint_{M\in\Sigma}\vec{E}(M)\cdot d\vec{S}_{ext}(M)=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\iiint div \vec{a} \; \mathrm{d}\tau = \oiint \vec{a} d\vec{S}$$

$$\iint \overrightarrow{rot}(\vec{u})\overrightarrow{dS}=\oint \vec{u}\overrightarrow{dl}$$