

PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE



- *Structure d'une onde plane et d'une onde plane progressive monochromatique dans l'espace vide de charge et de courant*
- *Etats de polarisation d'une onde plane et d'une onde plane progressive monochromatique*
- *Propagation de l'énergie d'une onde plane progressive monochromatique dans le vide*

I. Equation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide

I.1. Les équations de Maxwell dans le vide

Dans un milieu vide de charges et de courants, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\mathbf{MG} \quad \text{div}(\vec{E}(M, t)) = 0$$

$$\mathbf{M\Phi} \quad \text{div}(\vec{B}(M, t)) = 0$$

$$\mathbf{MF} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}(M, t)) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$$

$$\mathbf{MA} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}(M, t)) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$$

I.2. Equation de propagation

Le couplage spatiotemporel dans les équations de MF et MA est à l'origine du phénomène de propagation. Les équations de propagations pour le champ électrique et le champ magnétique s'écrivent alors :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\mathbf{MF}) \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}(M, t))) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}\right) \quad \text{or} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{T})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{T})) - \Delta(\vec{T})$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\underbrace{\text{div}(\vec{E}(M, t))}_{=0}) - \Delta(\vec{E}(M, t)) = -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}(M, t)) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(M, t)}{\partial t^2}$$

$$\Delta(\vec{E}(M, t)) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(M, t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Équations de propagation
du champ électrique

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\mathbf{MA}) \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{B}(M, t)\right)\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}\right)$$

$$\text{or } \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{T})\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}(\vec{T})\right) - \Delta(\vec{T})$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\underbrace{\text{div}(\vec{B}(M, t))}_{=0}\right) - \Delta(\vec{B}(M, t)) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}(M, t)) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(M, t)}{\partial t^2}$$

$$\Delta(\vec{B}(M, t)) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(M, t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

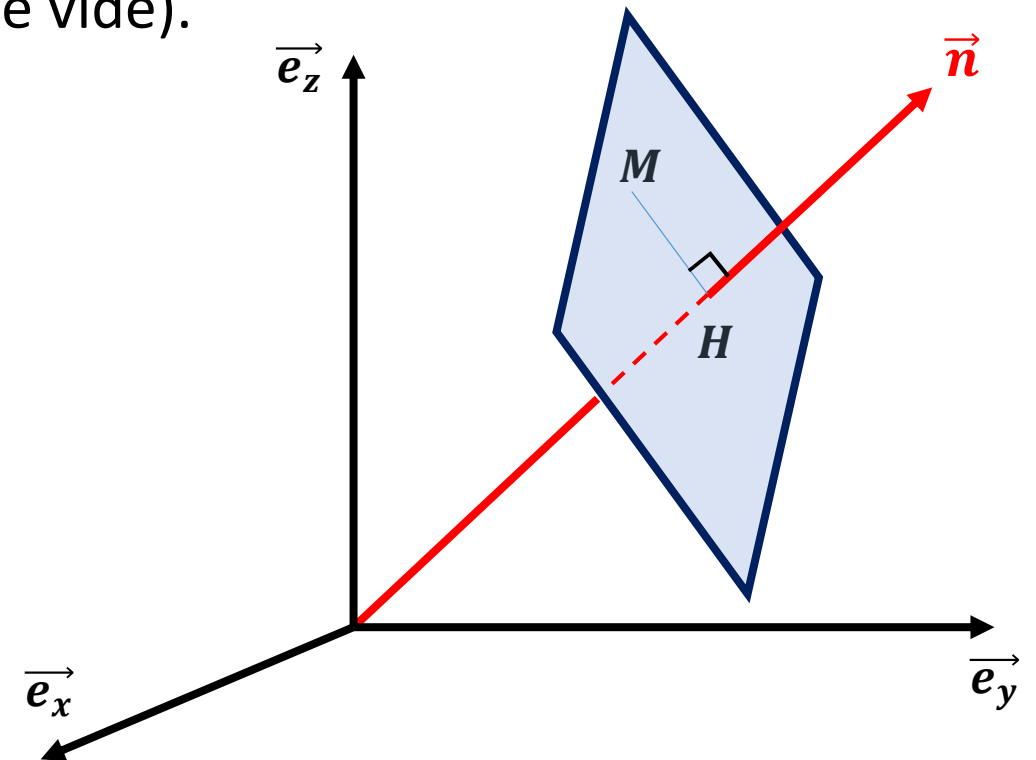
Équations de propagation
du champ magnétique

C'est l'équation de d'Alembert. Les solutions de cette équation traduisent un phénomène de propagation à la célérité c (vitesse de la lumière dans le vide).

II. Solutions en ondes planes progressives

II.1 Définition de l'onde plane

Une onde est plane si elle ne dépend que de l'abscisse sur l'axe de propagation et du temps. La fonction d'onde a alors même valeur à un instant donné quelconque en tout point d'un plan quelconque perpendiculaire à la direction de propagation. **Un tel plan s'appelle le plan d'onde.**



II.1 Résolution de l'équation de d'Alembert

Considérons une onde plane $S(x, t)$ qui se propage suivant Ox , l'équation d'onde s'écrit :

$$\Delta(S(x, t)) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Soit: } \begin{cases} v = x + ct \\ u = x - ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(v + u) \\ t = \frac{1}{2c}(v - u) \end{cases}$$

Et soit $h(x, t)$ une fonction: $dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial t} dt$

$$\Rightarrow dh = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} (dv + du) + \frac{1}{2c} \frac{\partial h}{\partial t} (dv - du) \Rightarrow dh = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial h}{\partial t} \right) du + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial h}{\partial t} \right) dv = \frac{\partial h}{\partial u} du + \frac{\partial h}{\partial v} dv$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \end{cases}$$

Remarquons aussi que:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial s}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial s}{\partial t} \right) = 4 \frac{\partial^2 s}{\partial v \partial u} = 0$$

Une première intégration donne: $\Rightarrow \frac{\partial s}{\partial v} = g_1(v)$

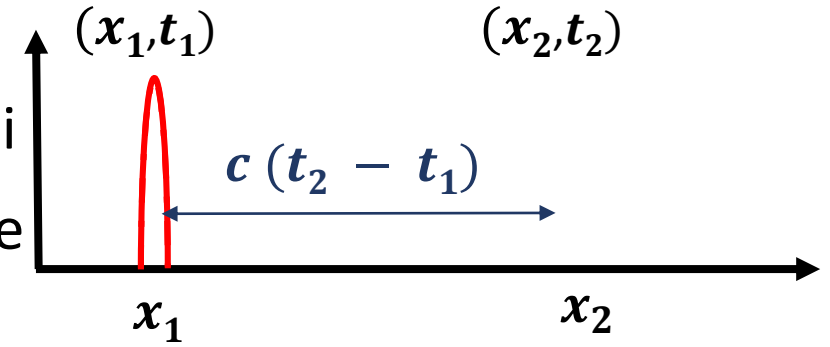
Une deuxième intégration donne: $\Rightarrow s(u, v) = \int g_1(v) dv + f(u)$

$$\Rightarrow s(u, v) = g(v) + f(u)$$

$$\Rightarrow s(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Conclusions

- $f(x - ct)$ a la même valeur en x_2 à t_2 qu'en x_1 à t_1 si $x_2 - ct_2 = x_1 - ct_1$ ou $x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1)$. Donc le phénomène s'est propagé en bloc à la vitesse c le long de l'axe ox .
- $f(x - ct)$ (respectivement $g(x + ct)$) représente une onde plane progressive (OPP) se propageant avec la célérité c le long de l'axe Ox dans le sens des x croissants (respectivement des x décroissants).
- Le couplage entre les coordonnées spatiales et le temps traduit un phénomène de propagation.
- Les dépendances $x - ct$, $ct - x$, $t - x/c$ ou $x/c - t$ traduisent une propagation à la vitesse c le long de l'axe ox .
- La solution générale de l'équation d'onde de d'Alembert est la superposition de deux ondes planes se propageant à la célérité c dans deux sens opposés.
- Dans le cas où la direction de propagation de l'onde est quelconque, suivant $\vec{n}$, la solution générale s'écrit : $S(M, t) = f(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} - ct) + g(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} + ct)$.



III. Ondes planes progressives monochromatiques (ou harmoniques) OPPM

III.1. Expression

Une OPPM se propageant avec la célérité c dans le sens des x croissants s'écrit :

$$S(x, t) = S_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right) = S_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \varphi_0\right) \text{ avec :}$$

S_0 est l'amplitude de l'onde et ω est la pulsation de l'onde

Cette OPPM est caractérisée par une **double périodicité** :

- période temporelle $T = \frac{2\pi}{\omega}$ s'exprime en seconde s
- période spatiale appelée longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ s'exprime en mètre m

On définit :

- Le nombre d'onde : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ s'exprime en mètre m^{-1}
- Le vecteur d'onde : $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_x$ Indique la direction de propagation de l'onde
- La phase de l'onde : $\phi(x, t) = \omega t - \frac{\omega}{c}x + \varphi_0$
- Le plan d'onde : l'ensemble des points M vérifiant à $t = \text{fixé}; \phi(x, t) = cte$
- φ_0 est la à l'origine du temps

Généralement, une OEMPPM de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0Ex}) \\ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0Ey}) \\ E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0Ez}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \begin{cases} B_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0Bx}) \\ B_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0By}) \\ B_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0Bz}) \end{cases}$$

III.2. Représentation complexe

En notation complexe, le champ électromagnétique s'écrit :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \begin{cases} \underline{E}_x = \underline{E}_{0x} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \underline{E}_y = \underline{E}_{0y} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \underline{E}_z = \underline{E}_{0z} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \end{cases} ; \underline{E}_{0x} = E_{0x} e^{j\varphi_{0Ex}} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \begin{cases} \underline{B}_x = \underline{B}_{0x} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \underline{B}_y = \underline{B}_{0y} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \underline{B}_z = \underline{B}_{0z} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \end{cases} ; \underline{B}_{0x} = B_{0x} e^{j\varphi_{0Bx}}$$

III.3. Équivalence des opérateurs en notation complexe

$$\text{div} \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} \quad \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\underline{E}_{0x} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}) = -jk_x (\underline{E}_{0x} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}) = -jk_x \underline{E}_x$$

$$\text{div} \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = -jk_x \underline{E}_x - jk_y \underline{E}_y - jk_z \underline{E}_z$$

$$\text{div} \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = -j\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}$$

Or $\text{div} \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t)$ donc

$$\vec{\nabla} \cdot \mapsto -j\vec{k} \cdot$$

$$\vec{rot} = \vec{\nabla} \wedge$$

$$\vec{rot} \mapsto -j\vec{k} \wedge$$

$$\Delta = \vec{\nabla}^2$$

$$\Delta \mapsto -k^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto j\omega$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mapsto -\omega^2$$

Remarque: Si la phase de l'onde s'écrit $\phi(\vec{M}, t) = (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ on doit ajouter un signe (-) devant les opérateurs de premier ordre.

III.4. Structure d'une onde électromagnétique plane progressive monochromatique

Dans une région vide de charge $\rho(\vec{M}, t) = 0$ et de courant $\vec{j}(\vec{M}, t) = \vec{0}$, les équations de Maxwell

➤ **MG** $\text{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \Rightarrow -j\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}$ Le champ électrique est perpendiculaire à la direction de propagation: **l'onde est transverse électrique.**

➤ **MΦ** $\text{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \Rightarrow -j\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}$ Le champ magnétique est perpendiculaire à la direction de propagation: **l'onde est transverse magnétique.**

➤ **MF** $\vec{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \Rightarrow -j\vec{k} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = -j\omega \vec{B}(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t)}{\omega} \Rightarrow \|\vec{B}(\vec{r}, t)\| = \frac{k}{\omega} \|\vec{E}(\vec{r}, t)\|$

➤ **MA** $\vec{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \Rightarrow -j\vec{k} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) = j \frac{\omega}{c^2} \vec{E}(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{c^2}{\omega} \vec{B}(\vec{r}, t) \wedge \vec{k}$

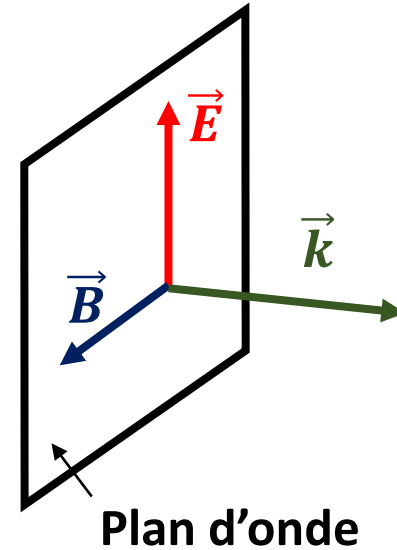
$(\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t), \vec{k})$ forme un trièdre directe.

➤ $\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0} \Rightarrow -k^2 \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k = \frac{\omega}{c}$

$k = f(\omega)$ est la relation de dispersion de l'onde dans le milieu, dans le vide $k = \frac{\omega}{c}$

Conclusion

- $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en phase
- L'OEMPPM est transverse électromagnétique **TEM**
- $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ dans le vide $\vec{B} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c}$
- $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ forme un trièdre direct
- $\|\vec{B}\| = \frac{k}{\omega} \|\vec{E}\|$ dans le vide $\|\vec{B}\| = \frac{1}{c} \|\vec{E}\|$



IV. Paquet d'onde : Vitesse de phase et vitesse de groupe

L'onde plane progressive monochromatique n'est qu'une solution rigoureuse de l'équation de D'Alembert, elle n'a pas de réalité physique puisqu'elle est infinie dans l'espace et dans le temps. En réalité, l'OEM se propage sous forme d'un paquet d'onde qui est un ensemble d'ondes planes progressives harmoniques de pulsations voisines. Leurs pulsations sont comprises dans l'intervalle $\left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right]$ où $\omega_0 \gg \Delta\omega$.

L'onde résultante peut s'écrire sous la forme : $\vec{E}(x, t) = \int \vec{E}(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega$

Au voisinage de ω_0 la relation de dispersion s'écrit : $k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}$; $k_0 = k(\omega_0)$

La phase de l'onde s'écrit alors: $\omega t - kx = \omega t - k_0 x - (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} x + \omega_0 t - \omega_0 t$

$$\Rightarrow \omega t - kx = \omega_0 t - k_0 x + (\omega - \omega_0) t - (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} x$$

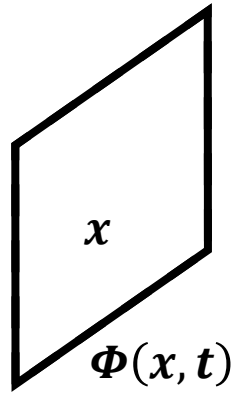
$$\vec{E}(x, t) = \left\{ \int \vec{E}(\omega) e^{j((\omega - \omega_0)t - (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} x)} d\omega \right\} e^{j(\omega_0 t - k_0 x)}$$

Amplitude ou enveloppe
Vitesse de groupe

Phase
Vitesse de phase

- **La vitesse de phase** : elle correspond à la vitesse de propagation de la phase.

Pendant dt , le plan d'onde d'équation $\Phi(x, t) = \omega t - kx$ a déplacé de dx , alors :



$x + dx$

$\Phi(x + dx, t + dt)$

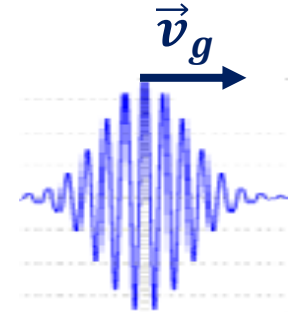
$$\Phi(x, t) = \Phi(x + dx, t + dt) \Rightarrow d\Phi = 0$$

$$\Rightarrow \omega dt - k dx = 0 \quad v_\phi = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

dans le vide $v_\phi = c$

- **La vitesse de groupe** : elle représente la vitesse de propagation de l'enveloppe de l'onde, elle s'identifie à la vitesse de propagation de l'**énergie**, elle est égale à :

$$\Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk}$$



- Si $v_\phi \neq f(\omega) \Rightarrow k = f(\omega)$ est linéaire $\Rightarrow$ le milieu se comporte de la même façon avec des ondes qui n'ont pas la même pulsation, le paquet d'onde se déplace en bloc.

$\Rightarrow$ Le milieu est dit non dispersif

- Si $v_\phi = f(\omega) \Rightarrow k = f(\omega)$ est non linéaire $\Rightarrow$ le milieu ne se comporte pas de la même façon avec des ondes qui n'ont pas la même pulsation, le paquet d'onde se déforme en se déplaçant.

$\Rightarrow$ Le milieu est dit dispersif

V. Propagation de l'énergie

Le vecteur de Poynting, la densité d'énergie électromagnétique et la puissance volumique cédée au milieu ne dépendent pas linéairement de $\vec{E}$, mais de manière quadratique. Ceci interdit l'usage de la notation complexe

Considérons une **OPPM** se propageant dans le sens des z croissants : $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$

Le champ magnétique s'écrit : $\vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$

V.1. Densité volumique d'énergie électromagnétique

La densité volumique d'énergie électrique: $u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \cos^2(\omega t - kz)$ $\Rightarrow \langle u_e \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4}$

La densité volumique d'énergie magnétique: $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t - kz)$ $\Rightarrow \langle u_m \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4}$

$\Rightarrow \langle u_e \rangle = \langle u_m \rangle$ équipartition de l'énergie sous les formes électrique et magnétique.

La densité volumique d'énergie électromagnétique: $u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \cos^2(\omega t - kz) + \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t - kz) = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \quad \Rightarrow \langle u_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

On peut directement établir les valeurs moyennes, en utilisant la notation complexe en remarquant que l'on a : $\langle \vec{A} \wedge \vec{B} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{A} \wedge \vec{B}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{A}^* \wedge \vec{B})$ et $\langle \vec{A} \cdot \vec{B} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{A} \cdot \vec{B}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{A}^* \cdot \vec{B})$

En notation complexe, le champ s'écrit: $\vec{E}(M, t) = \underline{E}_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{B}(M, t) = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_y$

$$\langle u_e \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}(M, t) \cdot \vec{E}^*(M, t)) = \frac{\epsilon_0}{4} \text{Re}(\underline{E}_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_x \cdot \underline{E}_0^* e^{-j(\omega t - kz)} \vec{u}_x) = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4}$$

$$\langle u_m \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{B}(M, t) \cdot \vec{B}^*(M, t)) = \frac{1}{4\mu_0} \text{Re}\left(\frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_y \cdot \frac{E_0^*}{c} e^{-j(\omega t - kz)} \vec{u}_y\right) = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4}$$

V.2. Vecteur de Poynting et puissance moyenne rayonnée

Le vecteur de Poynting s'écrit: $\vec{\pi} = \frac{\text{Re}(\vec{E}) \wedge \text{Re}(\vec{B})}{\mu_0}$

$$\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x \wedge \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y \Rightarrow \vec{\pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z \Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z \Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} c \vec{u}_z$$

$\Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \langle u_{em} \rangle c \vec{u}_z \Rightarrow$ l'énergie électromagnétique se propage à la vitesse de la lumière

On définit l'intensité de l'onde par: $I = \|\langle \vec{\pi} \rangle\| = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$

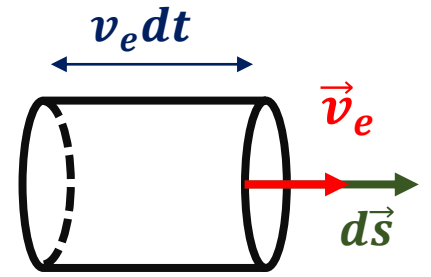
La puissance moyenne rayonnée à travers une section droite perpendiculaire à la direction de propagation est:

$$\langle P_{ray} \rangle = \iint \langle \vec{\pi} \rangle d\vec{s} = \frac{s E_0^2}{2\mu_0 c}$$

V.3. Vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique

Evaluons de deux manières l'énergie qui a traversée $d\vec{s}$ pendant dt avec la vitesse v_e :

D'une part : $\langle U_{em} \rangle = \langle P_{ray} \rangle dt = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} c ds dt$



D'autre part, avant de traverser la surface $d\vec{s}$, l'énergie était dans le cylindre de base $d\vec{s}$ et de longueur $v_e dt$:

$$\langle U_{em} \rangle = \langle u_{em} \rangle ds v_e dt = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} ds v_e dt$$

Par identification, on obtient:

$$\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} ds v_e dt = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} c ds dt \Rightarrow v_e = c$$

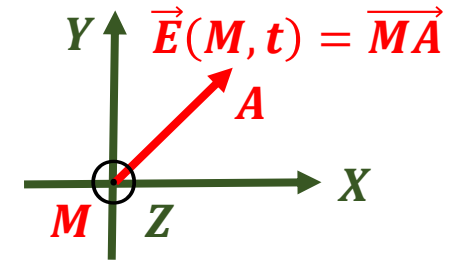
⇒ Dans le vide, l'énergie électromagnétique se propage à la vitesse de la lumière

VI. Polarisation d'une onde électromagnétique plane progressive monochromatique

Une **OPPM** est dite polarisée si l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{MA} = \vec{E}(M, t)$ décrit une courbe fermée invariante dans le temps. Le type de polarisation est déterminé par la nature de la trajectoire du point $A(X, Y, Z)$ (le point M est choisi comme origine) dans un plan d'onde vue par un observateur l'onde progresse vers lui.

Considérons une **OPPM** se propageant dans le sens des z croissants :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{cases} \alpha = \omega t - kz + \varphi_x \\ \varphi = \varphi_x - \varphi_y \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\alpha) \\ E_{0y} \cos(\alpha - \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$



VI.1. Trajectoire de l'extrémité du champ électrique

$$\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \vec{E} \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\alpha) \\ E_{0y} \cos(\alpha - \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X = E_{0x} \cos(\alpha) \\ Y = E_{0y} \cos(\alpha - \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{X}{E_{0x}} = \cos(\alpha) \\ \frac{Y}{E_{0y}} = \cos(\alpha - \varphi) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{cases} \left\{ \sin(\varphi) \frac{X}{E_{0x}} = \cos(\alpha) \sin(\varphi) \right\}^2 \\ \left\{ \frac{Y}{E_{0y}} - \frac{X}{E_{0x}} \cos(\varphi) = \sin(\alpha) \sin(\varphi) \right\}^2 \end{cases} \right] \quad \sin^2(\varphi) \left(\frac{X}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{Y}{E_{0y}} - \frac{X}{E_{0x}} \cos(\varphi) \right)^2 = \sin^2(\varphi) [\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)]$$

$$\sin^2(\varphi) \left(\frac{X}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{Y}{E_{0y}} - \frac{X}{E_{0x}} \cos(\varphi) \right)^2 = \sin^2(\varphi) [\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)]$$

$$\sin^2(\varphi) \left(\frac{X}{E_{0x}} \right)^2 + \cos^2(\varphi) \left(\frac{X}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{Y}{E_{0y}} \right)^2 - \frac{2XY}{E_{0x}E_{0y}} \cos(\varphi) = \sin^2(\varphi)$$

$$\left(\frac{X}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{Y}{E_{0y}} \right)^2 - \frac{2XY}{E_{0x}E_{0y}} \cos\varphi = \sin^2\varphi$$

VI.2. Différents états de polarisation

VI.2.a. Polarisation rectiligne: $\varphi = 0, \pi$

$$\left(\frac{X}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{Y}{E_{0y}} \right)^2 \mp \frac{2XY}{E_{0x}E_{0y}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{Y}{E_{0y}} \mp \frac{X}{E_{0x}} \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{Y}{E_{0y}} = \pm \frac{X}{E_{0x}} \Rightarrow Y = \pm \frac{E_{0y}}{E_{0x}} X$$

Équation d'une droite
Polarisation rectiligne

VI.2.b. Polarisation elliptique: $\varphi \neq 0, \pi$

$$\left(\frac{X}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{Y}{E_{0y}} \right)^2 - \frac{2XY}{E_{0x}E_{0y}} \cos\varphi = \sin^2\varphi$$

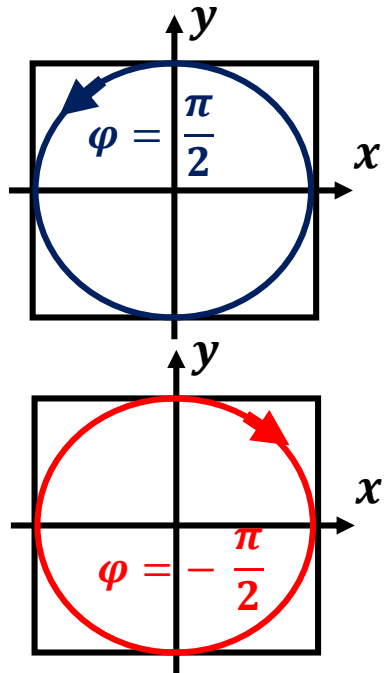
Équation d'une ellipse
Polarisation elliptique

VI.2.c. Polarisation circulaire: $\varphi = \pm \pi/2$ et $E_{0x} = E_{0y} = E_0$

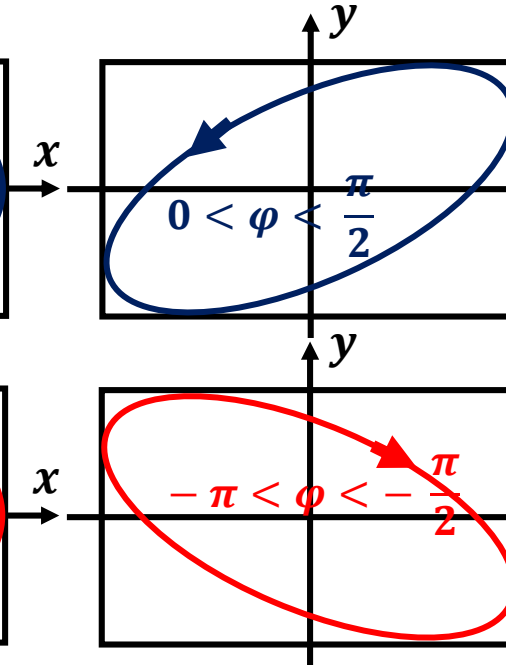
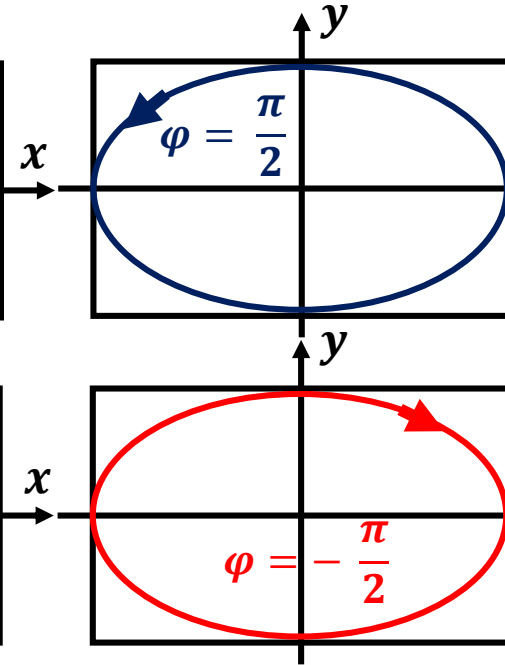
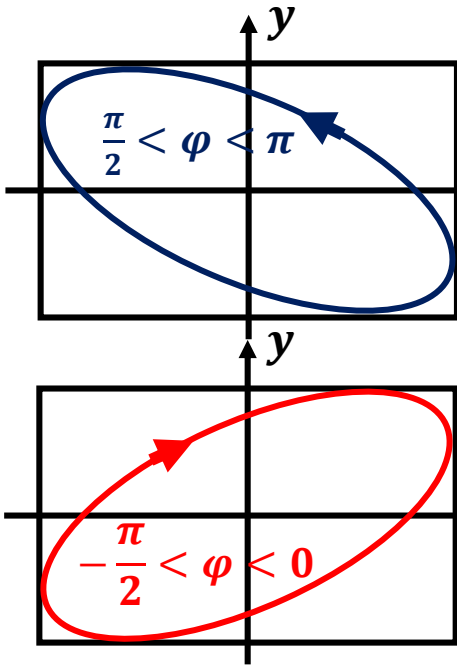
$$\left(\frac{X}{E_0}\right)^2 + \left(\frac{Y}{E_0}\right)^2 = 1 \Rightarrow (X)^2 + (Y)^2 = (E_0)^2$$

Équation d'un cercle
Polarisation circulaire

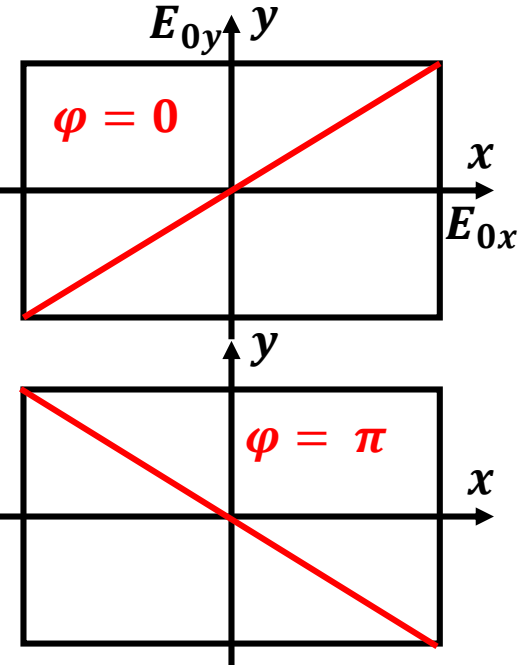
Polarisation circulaire



Polarisation elliptique



Polarisation rectiligne



Remarque:

Si le champ tourne dans le sens trigonométrique, la polarisation est dite gauche

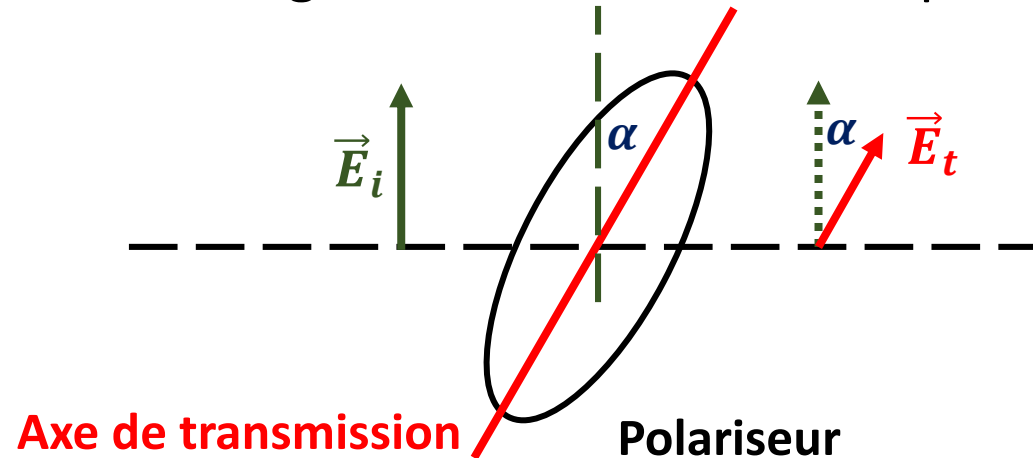
Si le champ tourne dans le sens indirecte, la polarisation est dite droite

VI.3. Production d'une onde polarisée rectilignement – Loi de Malus

On peut produire une onde polarisée rectilignement en utilisant un polariseur.

Un **polariseur** idéal est une lame qui, traversée par une lumière se propageant perpendiculairement à ses faces,

- transmet la totalité de l'énergie associée à un champ électrique parallèle à une direction particulière de son plan, appelée **direction de transmission privilégiée**,
- absorbe la totalité de l'énergie associée à un champ électrique perpendiculaire à cette direction.



$$\|\vec{E}_t\| = \|\vec{E}_i\| \cos \alpha \quad \Rightarrow I_t = I_i \cos^2 \alpha \quad \text{Loi de Malus}$$