

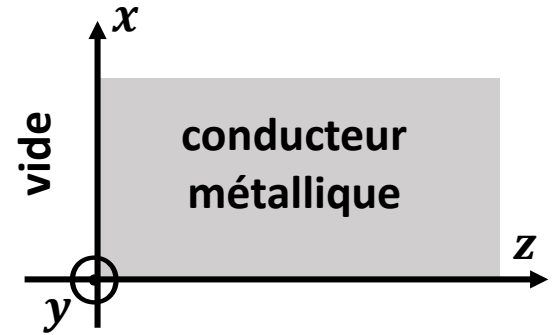
- Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique en régime lentement variable.
- Réflexion sous incidence normale d'une OPPM polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait.
- Structure de l'onde stationnaire
- Applications aux cavités à une dimension.

I. Propagation d'une OEM dans un conducteur

Un conducteur métallique est formé d'atomes ionisés fixes et d'électrons libres de densité N . Un électron de masse m et de charge $-e$ est soumis aux forces d'interaction avec les ions modélisées par $-m\vec{v}/\tau$. $\vec{v}$ étant la vitesse de l'électron et τ une constante.

I.1. Conductivité en régime variable

Soit une OPPM de pulsation ω , de vecteur d'onde $\vec{k}$. Cette onde est polarisée rectilignement selon $\vec{u}_x$, qui se propage dans le métal selon $\vec{u}_z$.



Ecrire le champ électrique de cette onde, en notation complexe.

En notation complexe. le champ électrique s'écrit: $\vec{E}(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$

En supposant la vitesse de phase de l'onde $v_\phi \sim c$, comparer les ordres de grandeur des forces électrique et magnétique. Conclure.

$$\left. \begin{aligned} \|\vec{F}_e\| &= e\|\vec{E}\| \\ \|\vec{F}_m\| &= ev\|\vec{B}\| \end{aligned} \right\} \frac{\|\vec{F}_e\|}{\|\vec{F}_m\|} = \frac{e\|\vec{E}\|}{ev\|\vec{B}\|} \approx \frac{v_\phi}{v} \gg 1$$

⇒ L'action du champ magnétique est négligeable par rapport à celle du champ électrique

Déterminer la conductivité complexe du milieu σ

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à un électron: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - m\vec{v}/\tau$

Le mouvement est forcé par le champ $\vec{E}$, alors l'électron vibre avec la même pulsation que $\vec{E}$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = im\omega\vec{v} = -e\vec{E} - m\vec{v}/\tau \Rightarrow (im\omega + m/\tau)\vec{v} = -e\vec{E} \Rightarrow m/\tau (i\tau\omega + 1)\vec{v} = -e\vec{E} \Rightarrow \vec{v} = \frac{-e\tau/m}{1 + i\tau\omega} \vec{E}$$

$$\text{Or } \vec{j} = -Ne\vec{v} \Rightarrow \vec{j} = \frac{Ne^2\tau/m}{1 + i\tau\omega} \vec{E} \Rightarrow \sigma = \frac{Ne^2\tau/m}{1 + i\tau\omega} = \frac{\sigma_0}{1 + i\tau\omega} ; \sigma_0 = \frac{Ne^2\tau}{m} \text{ Conductivité statique}$$

Dans l'ARQS $\omega\tau \ll 1$ D'où $\sigma = \sigma_0$

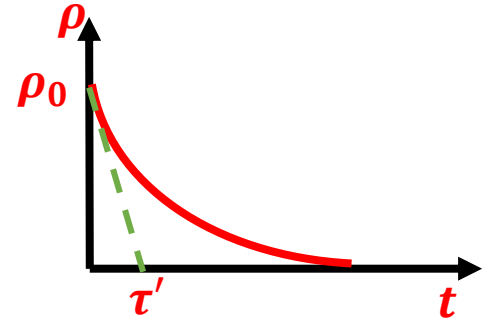
Dans la suite, on suppose que l'ARQS est satisfaite

I.2. Equations de Maxwell dans le conducteur

Montrer que la charge volumique tend rapidement vers zéro.

l'équation de la conservation de la charge électrique s'écrit: $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \sigma_0 \text{div} \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \sigma_0 \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau'} = 0 ; \tau' = \frac{\epsilon_0}{\sigma_0} \Rightarrow \rho = \rho_0 e^{-t/\tau'}$$



Exemple: Pour le cuivre on a $\tau \sim 10^{-14} \text{ s}$ et $\tau' \sim 10^{-19} \text{ s}$

Dans l'ARQS $\omega\tau \ll 1 \Rightarrow T \gg \tau \gg \tau' \Rightarrow \rho \xrightarrow{\text{rapidement}} 0$

Dans la suite, on prendra $\rho = 0$

Comparer le courant de conduction avec celui de déplacement.

$$\left. \begin{aligned} \vec{J}_D &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \|\vec{J}_D\| = \varepsilon_0 \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| = \varepsilon_0 \omega \|\vec{E}\| \\ \vec{J} &= \sigma_0 \vec{E} \Rightarrow \|\vec{J}\| = \sigma_0 \|\vec{E}\| \end{aligned} \right\} \frac{\|\vec{J}_D\|}{\|\vec{J}\|} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma_0} = \frac{\tau'}{T} \ll 1$$

$\Rightarrow$ Dans le régime quasi-stationnaire, le courant de déplacement est négligeable devant celui de conduction

Ecrire alors les équations de Maxwell dans le conducteur

$$\text{MG} \quad \boxed{\text{div}(\vec{E}(M, t)) = 0} \quad \text{M}\Phi \quad \boxed{\text{div}(\vec{B}(M, t)) = 0} \quad \text{MF} \quad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}(M, t)) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}}$$

$$\text{MA} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 \vec{J}(M, t) \quad \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 \sigma_0 \vec{E}(M, t)}$$

En déduire l'équation différentielle vérifiée par le champ électrique

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}(M, t))) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}\right) \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E}(M, t))) - \Delta(\vec{E}(M, t)) = -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}(M, t))$$

$$-\Delta(\vec{E}(M, t)) = -\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \quad \Rightarrow \boxed{\Delta \vec{E}(M, t) - \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} = \vec{0}} \quad \text{Équation de la chaleur}$$

I.3. Relation de dispersion dans le conducteur-Effet de peau

Etablir la relation de dispersion

$$\Delta \vec{E}(M, t) - \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow -k^2 - i\omega \mu_0 \sigma_0 = 0 \Rightarrow k^2 = -i\mu_0 \sigma_0 \omega$$

le nombre d'onde est complexe

Interpréter le fait que le vecteur d'onde est complexe

Soit $k = k_1 - ik_2$; $k_1, k_2 > 0$ Or $\vec{E}(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{E}(M, t) = E_0 e^{-k_2 z} e^{i(\omega t - k_1 z)} \vec{u}_x$

$$E_0 e^{-k_2 z}$$

- L'amplitude de l'onde décroît au cours de la propagation
- La partie imaginaire de k traduit la dissipation de l'énergie de l'onde dans le milieu
- La longueur $1/k_2$ est la profondeur de pénétration de l'onde dans le milieu

$$e^{i(\omega t - k_1 z)}$$

- La partie réelle de k traduit la progression de l'onde dans le milieu
- La vitesse de phase de l'onde dans le milieu est $v_\varphi = \frac{\omega}{\text{Re}(k)}$
- Si est $\text{Re}(k) = f(\omega)$ est linéaire, alors le milieu est non dispersif
- Si est $\text{Re}(k) = f(\omega)$ est non linéaire, alors le milieu est dispersif

Justifier que l'unique solution acceptable est $k = \frac{1-i}{\delta}$. Donner l'expression de δ

On a $k^2 = -i\mu_0\sigma_0\omega = e^{-i\pi/2}\mu_0\sigma_0\omega \Rightarrow k = \pm e^{-i\pi/4}\sqrt{\mu_0\sigma_0\omega} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\sigma_0\omega}$

$\Rightarrow k = \pm \frac{1-i}{\delta}; \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma_0\omega}}$ L'onde progresse le long de $+\vec{u}_z$, donc $Re(k) > 0 \Rightarrow k = \frac{1-i}{\delta}$

O.D.G Cuivre $\sigma_0 = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1}m^{-1}$
 Onde centimétrique $\omega \sim 5 \text{ GHz}$ } $\delta \approx 1\mu m \Rightarrow \delta$ est appelée épaisseur de peau

Déterminer l'expression la vitesse de phase. Interpréter.

La vitesse de phase est $v_\phi = \frac{\omega}{Re(k)} \Rightarrow v_\phi = \delta\omega$ $v_\phi = f(\omega)$ alors le milieu est dispersif

Déterminer l'expression du champ magnétique

On a $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ Où $\vec{k} = \frac{1-i}{\delta}\vec{u}_z$ et $\vec{E}(M, t) = E_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_x$

$\vec{B} = \frac{1-i}{\delta\omega} \vec{u}_z \wedge E_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_x$ Or $1-i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4} \Rightarrow \vec{B}(M, t) = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} E_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \vec{u}_y$

En notation réelle, on a:

$$\vec{E}(M, t) = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta}) \vec{u}_x$$

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}) \vec{u}_y$$

Calculer la puissance moyenne transmise à une section S du métal en $z = 0$

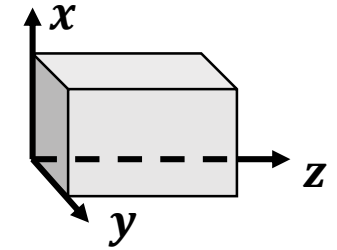
$$\langle P_{tr} \rangle = \iint \langle \vec{\pi} \rangle_{z=0} d\vec{s}; \quad d\vec{s} = dx dy \vec{u}_z \quad \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}^*(M, t))$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(E_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_x \wedge \frac{\sqrt{2}}{\delta \omega} E_0 e^{-z/\delta} e^{-i(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \vec{u}_y)$$

$$\Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{\sqrt{2} E_0^2 e^{-2z/\delta}}{2\mu_0 \delta \omega} \text{Re}(e^{i\frac{\pi}{4}}) \vec{u}_z \Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2 e^{-2z/\delta}}{2\mu_0 \delta \omega} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle_{z=0} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \delta \omega} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \langle P_{tr} \rangle = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0 \delta \omega}$$



Calculer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans une portion du métal de section S et de longueur infinie. Conclure

$$\langle P_J \rangle = \iiint \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}^*(M, t)) dx dy dz = \frac{\sigma_0}{2} \iiint \text{Re}(\vec{E}(M, t) \cdot \vec{E}^*(M, t)) dx dy dz$$

$$\Rightarrow \langle P_J \rangle = \frac{\sigma_0}{2} \iiint \text{Re}(E_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_x \cdot E_0 e^{-z/\delta} e^{-i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_x) dx dy dz = \frac{\sigma_0 E_0^2}{2} \iint dx dy \int_0^\infty e^{-2z/\delta} dz$$

$$\Rightarrow \langle P_J \rangle = \frac{\sigma_0 E_0^2 S}{2} \frac{\delta}{2} [-e^{-2z/\delta}]_0^\infty \Rightarrow \langle P_J \rangle = \frac{\sigma_0 E_0^2 S \delta}{4} \quad \frac{\langle P_{tr} \rangle}{\langle P_J \rangle} = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0 \delta \omega} \frac{4}{\sigma_0 E_0^2 S \delta} = \frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega \delta^2} = 1$$

$$\Rightarrow \langle P_{tr} \rangle = \langle P_J \rangle$$

la puissance moyenne transmise au conducteur est totalement dissipée par effet Joule

II. Réflexion d'une OPPM sur un conducteur parfait

II.1. Hypothèse du conducteur parfait

Un conducteur est dit parfait si sa conductivité est infinie. La puissance dissipée par effet Joule est alors nulle

Montrer que le champ électromagnétique est nul dans un conducteur parfait.

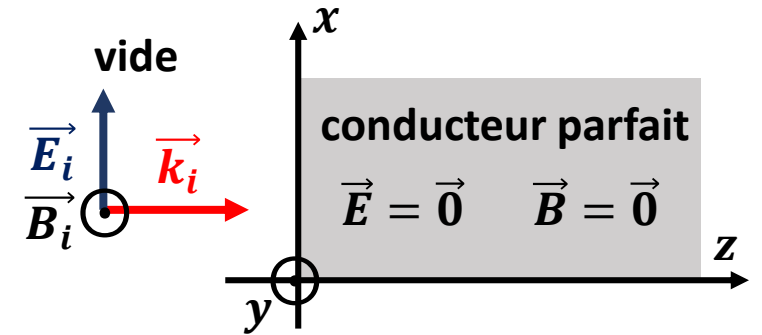
La puissance dissipée par effet Joule est nulle $\frac{dP_J}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = 0 \Rightarrow E = 0$ $\Rightarrow \vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{B} = \text{cte}$ Homogène à un champ magnétostatique qui est nul en absence du courant permanent. $\Rightarrow B = 0$

$\Rightarrow$ dans un conducteur parfait, le champ électromagnétique est nul

II.2. Réflexion normale d'une OPPM sur un conducteur parfait

Soit une OPPM polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_x$, qui se propage dans le vide selon $\vec{u}_z$. Cette onde incidente arrive sur un conducteur parfait qui occupe le demi-espace $z > 0$.



Donner l'expression du champ électromagnétique incident.

$$\vec{E}_i(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \quad k = |\vec{k}_i| = \frac{\omega}{c} \quad \vec{k}_i = \frac{\omega}{c} \vec{u}_z \quad \vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega}$$

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c}$$

$$\vec{B}_i(M, t) = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$$

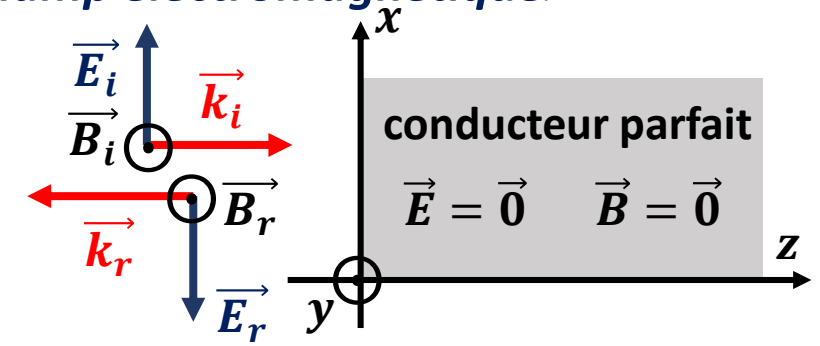
Justifier l'existence d'une onde réfléchie et établir l'expression de son champ électromagnétique.

La continuité du champ électrique en $z = 0$ s'écrit:

$$E_i(z = 0, t) = 0 \Rightarrow E_0 = 0 \text{ Ce qui est absurde.}$$

⇒ D'où l'existence d'une onde réfléchie qui se superpose à l'onde incidente pour satisfaire la relation de passage:

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_r)_{z=0} = \vec{0} \quad \forall t$$



➤ la relation de passage est satisfaite $\forall t \Rightarrow \omega_i = \omega_r = \omega$

➤ Les deux ondes se propagent dans le même milieu avec la même pulsation, elles auront donc le même nombre d'onde $\Rightarrow k_i = k_r = k = \frac{\omega}{c}$

➤ L'onde réfléchie se propage selon $-\vec{u}_z \Rightarrow \vec{k}_r = -\frac{\omega}{c}\vec{u}_z$ Soit donc: $\vec{E}_r(M, t) = \vec{E}_{0r} e^{i(\omega t + kz)}$

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_r)_{z=0} = \vec{0} \Rightarrow E_0 e^{i(\omega t)} \vec{u}_x + \vec{E}_{0r} e^{i(\omega t)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_{0r} = -E_0 \vec{u}_x \quad \vec{E}_r(M, t) = -E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} \Rightarrow \vec{B}_r = \frac{-\vec{u}_z \wedge (-E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x)}{c}$$

$$\vec{B}_r(M, t) = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y$$

II.3. Onde stationnaire

Donner l'expression du champ résultant. Dédire la structure de l'onde stationnaire.

Le champ électrique résultant:

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x - E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x = E_0 e^{i(\omega t)} (e^{-ikz} - e^{ikz}) \vec{u}_x$$

$$\vec{E}(M, t) = -2iE_0 \sin(kz) e^{i(\omega t)} \vec{u}_x$$

En notation réelle:

$$\vec{E}(M, t) = 2E_0 \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{u}_x$$

Le champ magnétique résultant:

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_i(M, t) + \vec{B}_r(M, t) = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y + \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t)} (e^{-ikz} + e^{ikz}) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}(M, t) = \frac{2E_0}{c} \cos(kz) e^{i(\omega t)} \vec{u}_y$$

En notation réelle:

$$\vec{B}(M, t) = \frac{2E_0}{c} \cos(kz) \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

➤ L'onde résultante (superposition de deux OPPM identiques qui se propagent en sens opposé) est stationnaire (découplage entre z et t).

➤ $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ ne sont plus en phase

➤ La relation ~~$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$~~ n'est plus valable

En certains points, appelées nœuds, l'amplitude du champ est toujours nul. En d'autres points, appelées ventres, l'amplitude est maximale.

Trouver les positions des nœuds et des ventres de $\vec{E}$ (respectivement ventres et nœuds de $\vec{B}$)

➤ Positions des nœuds de $\vec{E}$ (respectivement ventres de $\vec{B}$)

$$\|\vec{E}\| = 0 \Rightarrow \sin(kz) = 0 \Rightarrow kz_n = n\pi; n \in \mathbb{N}$$
$$\|\vec{B}\| = \frac{2E_0}{c} \Rightarrow \cos(kz) = \pm 1 \Rightarrow kz_n = n\pi; n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow z_n = n \frac{\pi}{k} \quad \Rightarrow z_n = n \frac{\lambda}{2}$$

La distance qui sépare deux nœuds successive de $\vec{E}$ (respectivement deux ventres de $\vec{B}$) est $\frac{\lambda}{2}$

➤ Positions des ventres de $\vec{E}$ (respectivement nœuds de $\vec{B}$)

$$\|\vec{E}\| = 2E_0 \Rightarrow \sin(kz) = \pm 1 \Rightarrow kz_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{N}$$
$$\|\vec{B}\| = 0 \Rightarrow \cos(kz) = 0 \Rightarrow kz_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow z_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2k} \quad \Rightarrow z_n = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$$

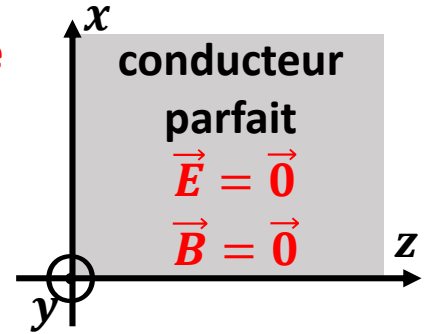
La distance qui sépare deux ventres successive de $\vec{E}$ (respectivement deux nœuds de $\vec{B}$) est $\frac{\lambda}{2}$

Justifier l'existence d'un courant électrique sur la surface $z = 0$ et calculer sa densité.

La discontinuité de $\vec{B}$ en $z = 0$ prouve l'existence d'un courant surfacique: **vide**

$$\underbrace{\vec{B}(z = 0^+, t) - \vec{B}(z = 0^-, t)}_{\vec{0}} = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{u}_z \Rightarrow -\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_y = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{J}_s = \frac{2E_0}{c\mu_0} \cos(\omega t) \vec{u}_x$$



Ces courants, créés par le champ incident, sont à l'origine de l'onde réfléchie. Cela explique pourquoi l'onde réfléchie a la même pulsation que l'onde incidente.

II.4. Aspect énergétique de l'onde stationnaire

Calculer la moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique.

La densité d'énergie électromagnétique s'écrit:

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \Rightarrow u_{em} = 2\epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kz) + \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t) \cos^2(kz)$$

$$\Rightarrow \langle u_{em} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz) + \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(kz) = \epsilon_0 E_0^2 (\sin^2(kz) + \cos^2(kz))$$

$$\Rightarrow \langle u_{em} \rangle = \epsilon_0 E_0^2$$

Calculer la moyenne du vecteur de Poynting. Interpréter.

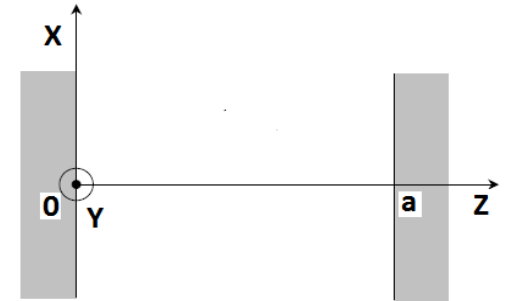
$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}^*(M, t)) \quad \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(-2iE_0 \sin(kz) e^{i(\omega t)} \vec{u}_x \wedge \frac{2E_0}{c} \cos(kz) e^{-i(\omega t)} \vec{u}_y)$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{4E_0^2 \sin(kz) \cos(kz)}{2\mu_0 c} \text{Re}(-ie^{i(\omega t)} e^{-i(\omega t)}) \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y \quad \Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \vec{0}$$

Ce résultat est attendu car l'onde est stationnaire, il n'y a pas propagation de l'énergie

II.5. Application aux cavités unidimensionnelles - modes propres

Considérons un ensemble de deux plans conducteurs parfaits parallèles formant une cavité unidimensionnelle remplie de vide entre les abscisses $z = 0$ et $z = a$.



On suppose que l'onde à l'intérieur de la cavité est polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_x$.

Ecrire les équations de Maxwell dans la cavité et déduire l'équation d'onde.

Dans la cavité $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$ MG $\text{div} \vec{E} = 0$ MΦ $\text{div} \vec{B} = 0$ MF $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ MA $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta(\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta(\vec{E}(M, t)) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(M, t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Établir l'expression du champ électrique dans la cavité

$$\text{On a } \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{Or } \vec{E} = E_0(z) e^{i\omega t} \vec{u}_x \quad \Rightarrow \frac{d^2 E_0(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E_0(z) = 0$$

$$\text{La solution s'écrit: } \Rightarrow E_0(z) = A \cos\left(\frac{\omega}{c} z\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{c} z\right)$$

Continuité de $\vec{E}$

$$\text{en } \mathbf{z = 0} \quad E_0(z=0) = A = 0 \quad \Rightarrow E_0(z) = B \sin\left(\frac{\omega}{c} z\right)$$

$$\text{en } \mathbf{z = a} \quad E_0(z=a) = 0 \quad \Rightarrow B \sin\left(\frac{\omega}{c} a\right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{\omega_n}{c} a = n\pi; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi c}{a}; n \in \mathbb{N}^*$$

- Les pulsations permises dans la cavité sont quantifiées
- Chaque valeur de n définit un mode propre dans la cavité
- Le champ électrique relatif au $n^{\text{ième}}$ mode propre s'écrit: $\vec{E}_n = E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) e^{i\frac{n\pi c}{a} t} \vec{u}_x$
- La solution générale est alors la superposition de tous les modes:

$$\vec{E} = \sum_n E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) e^{i\frac{n\pi c}{a} t} \vec{u}_x$$