

ONDE ELECTROMAGNETIQUE DANS UN PLASMA PEU DENSE

I. Définition

Un plasma est un gaz ionisé **globalement neutre**, constitué par des ions positifs (charge $+e$, masse M , N nombre par unité de volume) et des électrons négatifs (charge $-e$, masse m , N nombre par unité de volume). Ce **plasma est dilué**; ainsi les interactions entre les charges sont négligées. Les **particules sont non-relativistes** : leurs vitesses sont très faibles devant celle de la lumière dans le vide.

II. Conductivité complexe du plasma

Soit une OPPM de pulsation ω , de vecteur d'onde $\vec{k}$. Cette onde est polarisée rectilignement selon $\vec{u}_x$, qui se propage selon $\vec{u}_z$.

Ecrire le champ électrique de cette onde, en notation complexe

En notation complexe. le champ électrique s'écrit: $\vec{E}(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$

En supposant la vitesse de phase de l'onde $v_\phi \geq c$ (on le vérifiera à la fin), comparer les ordres de grandeur des forces électrique et magnétique. Conclure.

$$\left. \begin{aligned} \|\vec{F}_e\| &= q \|\vec{E}\| \\ \|\vec{F}_m\| &= qv \|\vec{B}\| \end{aligned} \right\} \frac{\|\vec{F}_e\|}{\|\vec{F}_m\|} = \frac{q \|\vec{E}\|}{qv \|\vec{B}\|} \approx \frac{v_\phi}{v} \gg 1$$

$\Rightarrow$ L'action du champ magnétique est négligeable par rapport à celle du champ électrique

Déterminer la conductivité complexe du milieu.

La RFD appliquée à un électron: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$ à un ion: $M \frac{d\vec{V}}{dt} = e\vec{E}$

Le mouvement est forcé par le champ $\vec{E}$

$$\Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = im\omega\vec{v} = -e\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{ie}{m\omega} \vec{E}$$

$$\Rightarrow M \frac{d\vec{V}}{dt} = im\omega\vec{V} = e\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = -\frac{ie}{M\omega} \vec{E}$$

La densité volumique de courant s'écrit: $\vec{j} = Ne\vec{V} - Ne\vec{v} = -\frac{iNe^2}{M\omega} \vec{E} - \frac{iNe^2}{m\omega} \vec{E}$ Or $M \gg m$

$$\Rightarrow \vec{j} = -\frac{iNe^2}{m\omega} \vec{E}$$

$\Rightarrow$ Le courant dû aux ions est négligeable devant celui dû aux électrons

$$\Rightarrow \sigma = -\frac{iNe^2}{m\omega}$$

$\Rightarrow$ La conductivité électrique d'un plasma dilué est imaginaire pure

Montrer que la charge volumique totale est nulle à chaque instant.

l'équation de conservation de la charge s'écrit: $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ Or $\frac{\partial \rho}{\partial t} = i\omega\rho$ et $\vec{j} = \sigma\vec{E}$

$$\sigma \text{div} \vec{E} + i\omega\rho = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho + i\omega\rho = 0 \Rightarrow \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} + i\omega\right)\rho = 0 \quad \forall \omega$$

$$\Rightarrow \rho = 0$$

Ou bien, si on considère une onde TE dans le plasma, alors: $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = -i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho = 0$

$\Rightarrow$ Le plasma reste localement neutre en présence de l'onde électromagnétique.

III. Relation de dispersion - Vitesses de phase et de groupe

Ecrire les équations de Maxwell dans le plasma. En déduire l'équation d'onde.

MG $\text{div}(\vec{E}(M, t)) = 0$

MΦ $\text{div}(\vec{B}(M, t)) = 0$

MF $\text{rot}(\vec{E}(M, t)) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$

MA $\text{rot}(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 \vec{J}(M, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \Rightarrow \text{rot}(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 \sigma \vec{E}(M, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E}(M, t))) = \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}\right) \Rightarrow \text{grad}(\text{div}(\vec{E}(M, t))) - \Delta(\vec{E}(M, t)) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\vec{B}(M, t))$$

$$-\Delta(\vec{E}(M, t)) = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(M, t)}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E}(M, t) - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(M, t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Etablir la relation de dispersion, on introduira la pulsation plasma ω_p .

$$\Delta \vec{E}(M, t) - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(M, t)}{\partial t^2} = \vec{0} \Rightarrow -k^2 - \mu_0 \sigma i \omega + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad \text{or} \quad \sigma = -\frac{iNe^2}{m\omega}$$

$$\Rightarrow -k^2 - \frac{\mu_0 Ne^2}{m} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{Ne^2}{c^2 m \varepsilon_0}$$

Soit

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$$

ω_p est la pulsation plasma

La relation de dispersion s'écrit:

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}$$

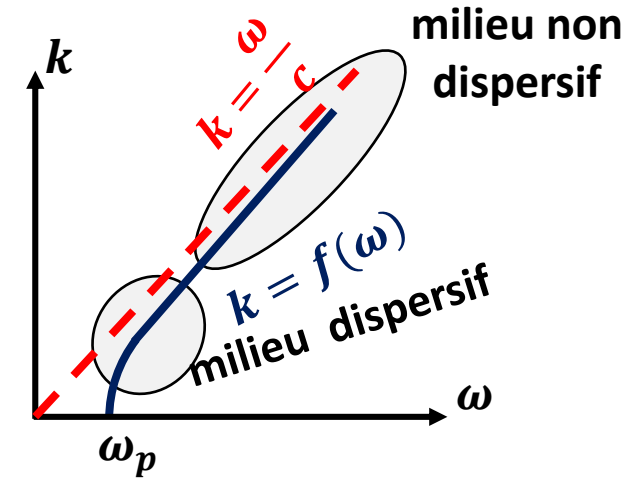
Discuter les cas où $\omega < \omega_p$ et $\omega > \omega_p$

La relation de dispersion s'écrit: $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}$

➤ Si $\omega > \omega_p \Rightarrow k^2 > 0$ k est réel $\Rightarrow$ l'onde est progressive

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \Rightarrow k = f(\omega) \text{ est non linéaire}$$

$\Rightarrow$ le plasma est un milieu dispersif



➤ Si $\omega < \omega_p \Rightarrow k^2 < 0$ k est imaginaire pure

$$k = -ik_2 \quad k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \quad \vec{E}(\vec{M}, t) = E_0 e^{-k_2 z} e^{i\omega t} \vec{u}_x \Rightarrow \text{c'est une onde évanescente (non progressive)}$$

$\Rightarrow$ La pulsation plasma est une pulsation de coupure, en dessous de laquelle l'onde ne peut pas se propager dans le plasma.

Pour $\omega > \omega_p$, déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Interpréter.

➤ vitesse de phase

On a $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$$

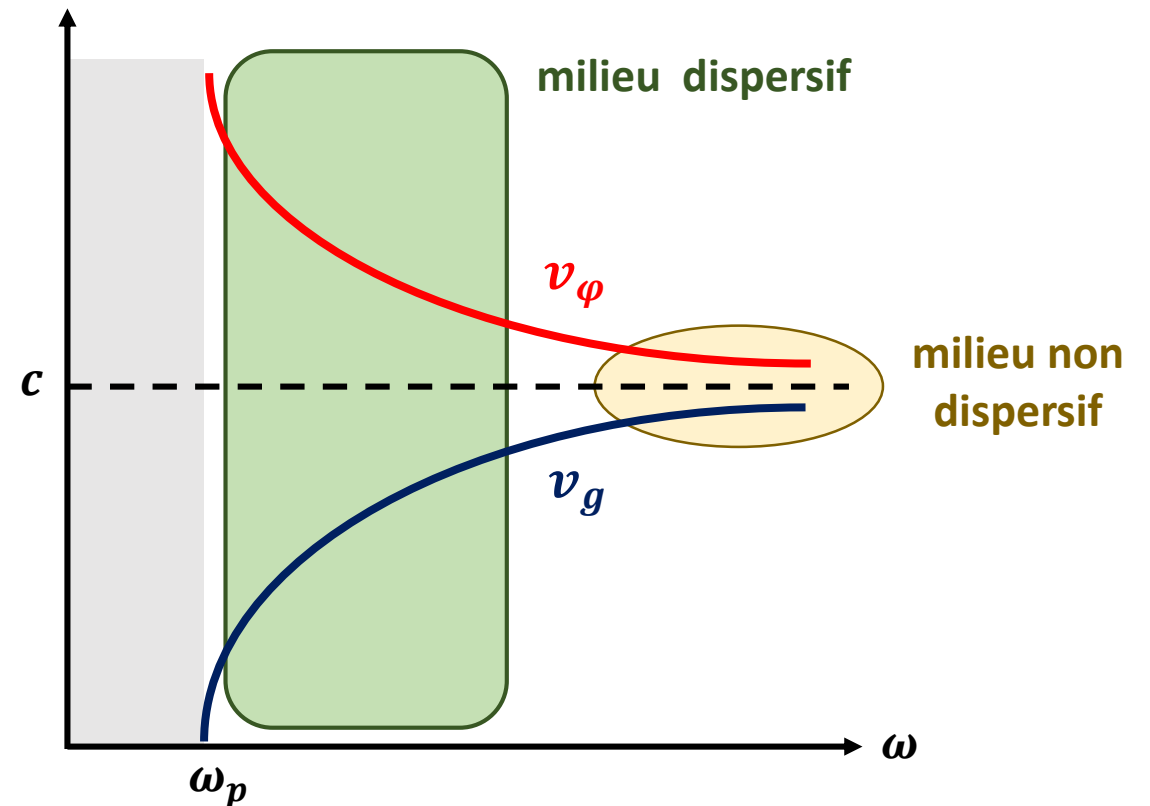
la vitesse de phase ne reflète aucune réalité physique

➤ vitesse de groupe

On a $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \Rightarrow 2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}$$

$$\Rightarrow v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$



IV. Aspect énergétique

Calculer les moyennes des densités volumiques d'énergies électrique, magnétique et cinétique des électrons. En déduire la moyenne de la densité d'énergie totale. Commenter.

- La moyenne de la densité volumiques d'énergie électrique s'écrit:

$$\langle u_e \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}(M, t) \cdot \vec{E}^*(M, t)) = \frac{\epsilon_0}{4} \text{Re}(\underline{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \cdot \underline{E}_0^* e^{-i(\omega t - kz)} \vec{u}_x) = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \quad \Rightarrow \langle u_e \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4}$$

- La moyenne de la densité volumiques d'énergie magnétique :

Le champ magnétique s'écrit:

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} \vec{u}_z \wedge \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x = \frac{k}{\omega} \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$$

$$\langle u_m \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{B}(M, t) \cdot \vec{B}^*(M, t)) = \frac{1}{4\mu_0} \text{Re}\left(\frac{k}{\omega} \underline{E}_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_y \cdot \frac{k}{\omega} \underline{E}_0^* e^{-j(\omega t - kz)} \vec{u}_y\right) = \frac{E_0^2}{4\mu_0} \left(\frac{k}{\omega}\right)^2$$

Or $\left(\frac{k}{\omega}\right)^2 = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \Rightarrow \langle u_m \rangle = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \Rightarrow \langle u_m \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$

- La moyenne de la densité volumiques d'énergie cinétique des électrons :

L'énergie cinétique d'un électron s'écrit: $\frac{1}{2} m v^2$

Pour déduire la densité volumique d'énergie cinétique des électrons, on doit multiplier par N le nombre d'électron par unité de volume $u_c = \frac{N}{2} m v^2$

$$\langle u_c \rangle = \frac{Nm}{2} \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\vec{v}} \cdot \underline{\vec{v}}^*) = \frac{Nm}{2} \frac{1}{2} \text{Re}\left(\frac{ie}{m\omega} \underline{\vec{E}} \cdot \frac{-ie}{m\omega} \underline{\vec{E}}^*\right) = \frac{Ne^2}{4m\omega^2} E_0^2 \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \frac{1}{\omega^2} \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \Rightarrow \langle u_c \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

➤ La moyenne de la densité volumique d'énergie totale s'écrit:

$$\langle u \rangle = \langle u_e \rangle + \langle u_m \rangle + \langle u_c \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} + \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) + \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \Rightarrow \langle u \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

⇒ La moyenne de la densité volumique d'énergie totale est égale à la moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique d'une OPPM qui se propage dans le vide

$$\langle u_{em} \rangle_{OPPM \text{ dans le vide}} = \langle u_{em} \rangle_{OPPM \text{ dans le plasma}} + \langle u_c \rangle$$

Justifier que la moyenne de la puissance dissipée par effet Joule est nulle

$$\langle P_J \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\underline{\vec{j}}(M, t) \cdot \underline{\vec{E}}^*(M, t) \right) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\sigma \underline{\vec{E}}(M, t) \cdot \underline{\vec{E}}^*(M, t) \right) = \frac{E_0^2}{2} \text{Re}(\sigma) = \frac{E_0^2}{2} \text{Re} \left(-\frac{iNe^2}{m\omega} \right) \Rightarrow \langle P_J \rangle = 0$$

⇒ La puissance volumique moyenne cédée par le champ électromagnétique au plasma est nulle.

Dans les deux cas $\omega < \omega_p$ et $\omega > \omega_p$, calculer la moyenne du vecteur de Poynting.

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}^*(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)) \quad \text{Or } \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0\omega} \text{Re}(\vec{E}^* \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}))$$

$$\text{Or } \boxed{\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})} \Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0\omega} \text{Re}(\vec{k} \cdot \underbrace{(\vec{E}^* \cdot \vec{E})}_{E_0^2} - \vec{E} \cdot \underbrace{(\vec{E}^* \cdot \vec{k})}_{\vec{0}}) \Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0\omega} \text{Re}(\vec{k})$$

$$\text{➤ Si } \boxed{\omega < \omega_p} \Rightarrow \vec{k} \text{ est imaginaire pure} \Rightarrow \text{Re}(\vec{k}) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\langle \vec{\pi} \rangle = \vec{0}}$$

$$\text{➤ Si } \boxed{\omega > \omega_p} \Rightarrow \vec{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \vec{u}_z \Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0\omega} \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \vec{u}_z \Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} c^2 \frac{1}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \vec{u}_z}$$

Pour $\omega > \omega_p$, déduire la vitesse de propagation de l'énergie.

$$\Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \vec{u}_z \Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \langle u \rangle \vec{v}_g \quad \text{Or } \langle \vec{\pi} \rangle = \langle u \rangle \vec{v}_e \quad \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = \vec{v}_g}$$