

RAYONNEMENT D'UN DIPÔLE OSCILLANT



- *Justifier le choix du modèle du dipôle oscillant*
- *Formuler et commenter les approximations nécessaires*
- *Analyser la structure du champ électromagnétique rayonné*
- *Conduire un bilan énergétique*
- *Expliquer certaines propriétés optiques de l'atmosphère (couleur bleu du ciel, couleur rouge du Soleil couchant, polarisation,...)*

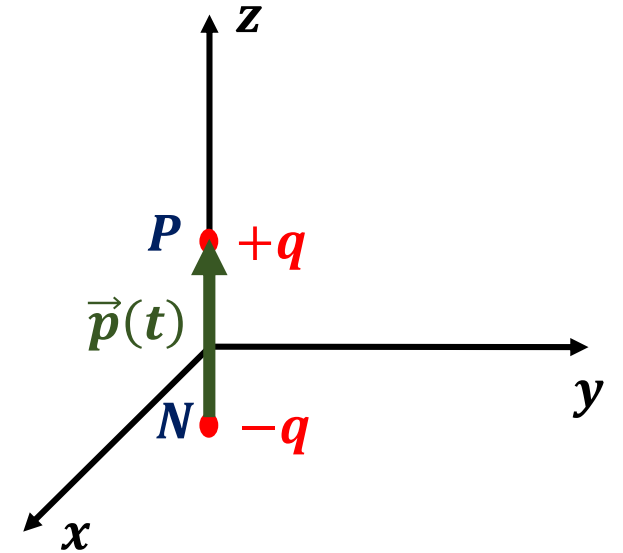
I. Modèle du dipôle oscillant

I.1 Définition

On appelle dipôle oscillant un doublet de charges opposées dont le moment dipolaire varie sinusoïdalement au cours du temps.

Par convention on oriente le moment dipolaire selon l'axe ($\mathbf{OZ}$) :

$$\vec{p}(t) = q\overrightarrow{NP} = p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$



- Un tel dipôle peut être vu comme l'ensemble de deux charges $+q$ et $-q$ données séparées d'une distance variable: $NP = a = a_0 \cos(\omega t)$
 - mouvement d'oscillations des charges électrique
- ou encore de deux charges fixes ($NP = cte$) mais variables dans le temps $q = q_0 \cos(\omega t)$.
 - En mettant plusieurs dipôles élémentaires de ce type bout à bout, on modélise ainsi un fil conducteur parcouru par un courant variable, c'est-à-dire **une antenne**.

II. Les trois échelles de longueur pertinentes

II.1 Approximation dipolaire : $a \ll r$

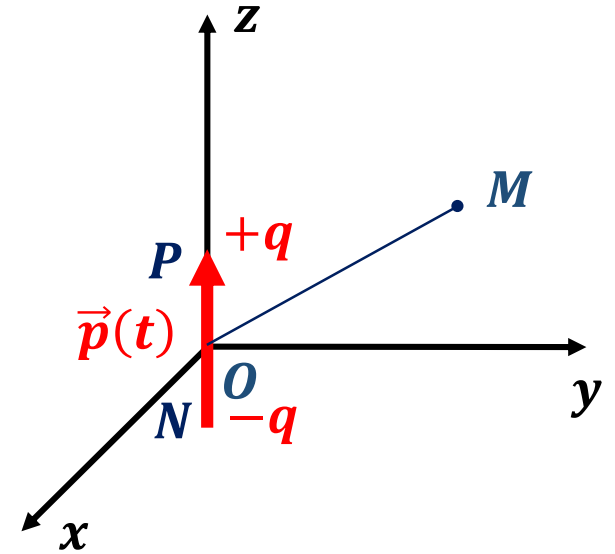
Nous examinons le rayonnement du dipôle oscillant à une distance $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ très supérieure à la longueur caractéristique du dipôle, ici $a = \mathbf{NP}$ donc : $a \ll r$.

II.2 Approximation non relativiste : $a \ll cT = \lambda$

On se place dans un cadre d'étude non relativiste donc : $v \ll c$. v est la vitesse des charges. L'ordre de grandeur de la vitesse de déplacement des charges est $v = a/T$; où T est la période. On doit avoir alors en cadre non relativiste : $a/T \ll c$ d'où $a \ll cT$ donc $a \ll \lambda$, λ est la longueur d'onde.

II.3 Hypothèse de la zone de rayonnement : $r = \mathbf{OM} \gg \lambda$

Nous examinons par hypothèse le champ électromagnétique rayonné à grande distance du dipôle : $\mathbf{r} = \mathbf{OM} \gg \lambda$.



III. Etude structurelle du champ rayonné par un dipôle

III.1 Analyse des symétries et invariances

Soit un dipôle oscillant de moment dipolaire $\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$.

Quelles sont les composantes non nulles du champ électromagnétique ? De quelles variables dépendent-elles ?

Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie pair

$$\Rightarrow \vec{E}(M, t) = E_r(M, t) \vec{u}_r + E_\theta(M, t) \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = B_\phi(M, t) \vec{u}_\phi$$

De plus, la distribution est invariante par rotation autour de $\mathbf{Oz}$

$\Rightarrow$ le champ électromagnétique ne dépend pas de φ .

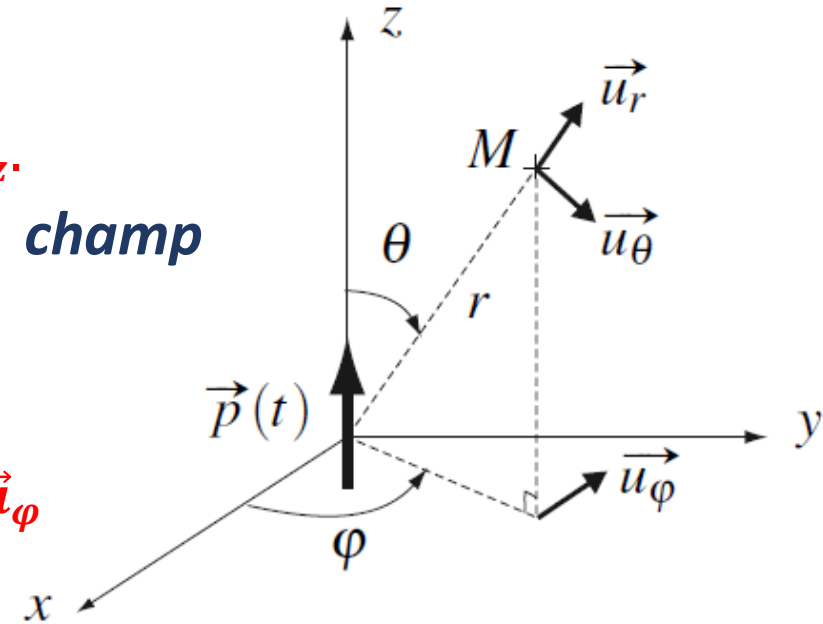
$$\Rightarrow \vec{E}(M, t) = E_r(r, \theta, t) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, t) \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(r, \theta, t) = B_\phi(r, \theta, t) \vec{u}_\phi$$

Montrer que le dipôle ne rayonne pas dans sa direction.

Si $M \in \mathbf{Oz} \Rightarrow \theta = 0, \pi$, les plans (Mxz) et (Myz) sont pairs

$$\Rightarrow \vec{B}(r, \theta = 0, \pi, t) \text{ est perpendiculaire en même temps à ces deux plans} \Rightarrow \vec{B}(r, \theta = 0, \pi, t) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r, \theta = 0, \pi, t) = \vec{0} \Rightarrow \text{le dipôle ne rayonne pas dans sa direction.}$$



III.2 Expression complète des champs

La résolution complète du problème conduit aux expressions suivantes :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{cases} E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\cos\theta \left[\frac{1}{r^3} p(t - r/c) + \frac{1}{r^2 c} \dot{p}(t - r/c) \right] \\ E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \left[\frac{1}{r^3} p(t - r/c) + \frac{1}{r^2 c} \dot{p}(t - r/c) + \frac{1}{rc^2} \ddot{p}(t - r/c) \right] \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin\theta \left[\frac{1}{r^2} \dot{p}(t - r/c) + \frac{1}{rc} \ddot{p}(t - r/c) \right] \vec{u}_\varphi$$

- On retrouve bien les composantes des champs prévues par l'analyse de symétrie, ainsi que les variables issues de l'analyse des invariances.
- Les facteurs ***sinθ*** et ***cosθ*** témoignent bien de l'anisotropie des champs ; on retrouve en outre l'annulation du champ magnétique sur l'axe du dipôle et par conséquent l'absence de rayonnement d'énergie sur cet axe.
- La mesure du champ est effectuée à la date ***t*** alors que le moment dipolaire et ses dérivées, sources de ce champ, sont calculés aux dates « retardées » ***t - r/c*** pour tenir compte du temps de propagation de l'onde rayonnée.

Les expressions précédentes des champs font intervenir le moment dipolaire retardé ainsi que ses dérivées première et seconde.

Dans le cas d'un moment dipolaire sinusoïdal $\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ on a :

$$p(t - r/c) = p_0 \cos(\omega(t - r/c)) \qquad \text{d'amplitude } p_0$$

$$\dot{p}(t - r/c) = -\omega p_0 \sin(\omega(t - r/c)) \qquad \text{d'amplitude } \omega p_0$$

$$\ddot{p}(t - r/c) = -\omega^2 p_0 \cos(\omega(t - r/c)) \qquad \text{d'amplitude } \omega^2 p_0$$

Dans la zone de rayonnement $r \gg \lambda$ on a :

$$\frac{1}{r^3} \ll \frac{1}{r^2 \lambda} \ll \frac{1}{r \lambda^2}$$

$$\frac{1}{r^3} \ll \frac{k}{r^2} \ll \frac{k^2}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^3} \ll \frac{\omega}{r^2 c} \ll \frac{\omega^2}{rc^2}$$

$$\Rightarrow \frac{|p|}{r^3} \ll \frac{|\dot{p}|}{r^2 c} \ll \frac{|\ddot{p}|}{rc^2}$$

Comparer l'amplitude des différents termes intervenant dans les expressions de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$. En déduire $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ dans la zone de rayonnement.

$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cos\theta$			
$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta$			$\frac{1}{rc^2} \ddot{p}(t - r/c)$
$B_\phi = \frac{c.\mu_0}{4\pi} \sin\theta$			$\frac{1}{rc^2} \ddot{p}(t - r/c)$

$$\vec{E} = \frac{\ddot{p}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 rc^2} \sin\theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{c.\mu_0 \ddot{p}(t - r/c)}{4rc^2 \pi} \sin\theta \vec{u}_\phi$$

$$\vec{B} = \frac{\ddot{p}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 rc^3} \sin\theta \vec{u}_\phi$$

Déduire la structure de l'onde rayonnée.

$$\vec{E} = \frac{\ddot{\vec{p}}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \sin\theta \vec{u}_\theta \quad \vec{B} = \frac{\ddot{\vec{p}}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r c^3} \sin\theta \vec{u}_\phi$$

L'onde rayonnée est:

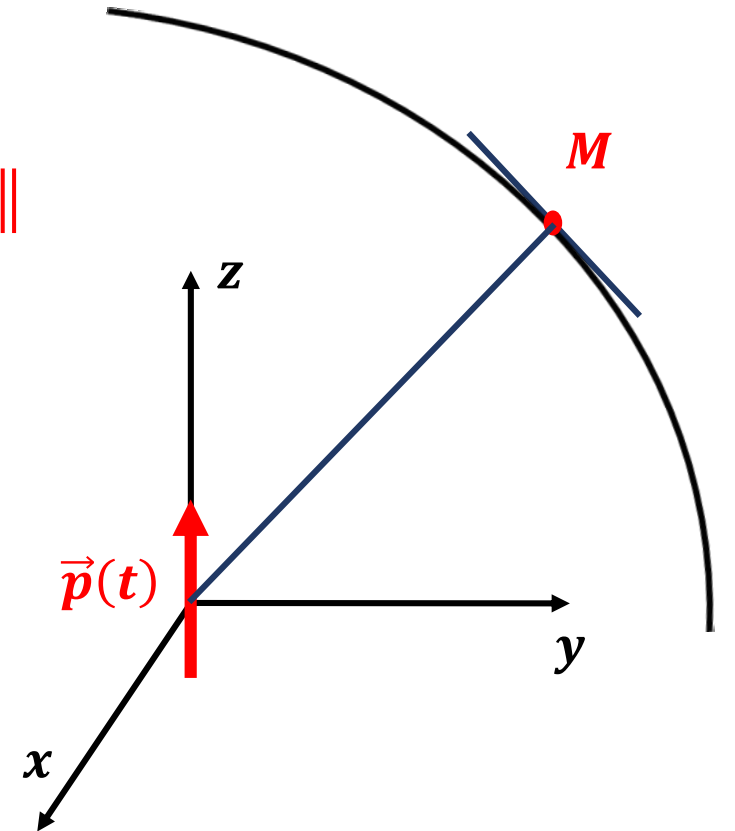
- progressive suivant $\vec{u}_r$ à la vitesse c
- polarisée rectilignement selon $\vec{u}_\theta$
- transverse électromagnétique
- Remarquons que $\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c} \Rightarrow \|\vec{B}\| = \frac{1}{c} \|\vec{E}\|$

Notons que les surfaces d'onde sont sphériques, mais

À grande distance, et **au voisinage du point M** , $\frac{\sin\theta}{r} \approx cte$

⇒ les surfaces d'onde sont pratiquement planes

⇒ Localement, l'onde rayonnée a la structure d'une onde plane progressive monochromatique



IV. Etude énergétique

Evaluer le vecteur de Poynting ainsi que sa moyenne $\langle \vec{\pi} \rangle$. Commenter.

Le vecteur de Poynting s'écrit: $\vec{\pi} = \frac{\text{Re}(\vec{E}) \wedge \text{Re}(\vec{B})}{\mu_0}$ $\vec{E} = \frac{\ddot{p}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \sin\theta \vec{u}_\theta$ $\vec{B} = \frac{\ddot{p}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r c^3} \sin\theta \vec{u}_\phi$

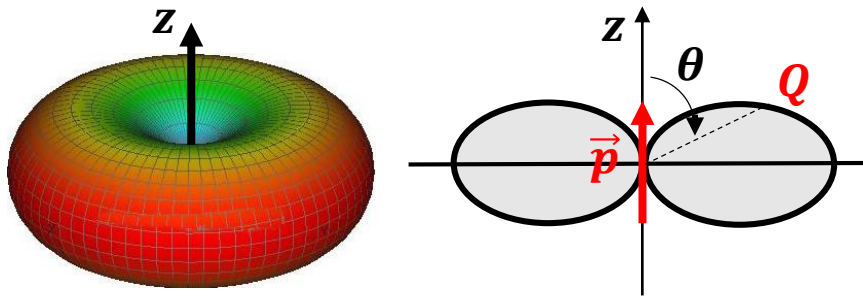
$$\vec{\pi} = \frac{1}{c\mu_0} \left(\frac{\ddot{p}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \sin\theta \right)^2 \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\phi \Rightarrow \vec{\pi} = \frac{1}{c\mu_0} \frac{\ddot{p}^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4} \left(\frac{\sin\theta}{r} \right)^2 \vec{u}_r \Rightarrow \vec{\pi} = \frac{\ddot{p}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{\sin\theta}{r} \right)^2 \vec{u}_r$$

$$\text{Or } \ddot{p}(t - r/c) = -\omega^2 p_0 \cos(\omega(t - r/c)) \Rightarrow \ddot{p}^2 = \omega^4 p_0^2 \cos^2(\omega(t - r/c))$$

$$\Rightarrow \vec{\pi} = \frac{\omega^4 p_0^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{\sin\theta}{r} \right)^2 \cos^2(\omega(t - r/c)) \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{\sin\theta}{r} \right)^2 \vec{u}_r$$

Tracer le diagramme de rayonnement défini comme les lieux des points Q tels que $\overrightarrow{OQ} = \langle \vec{\pi} \rangle$



- Le rayonnement est anisotrope
- Le dipôle ne rayonne pas dans sa direction

Calculer la puissance moyenne rayonnée dans tout l'espace. Commenter.

$$\langle P_{ray} \rangle = \oint \langle \vec{\pi} \rangle \vec{ds} \quad \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{\sin\theta}{r} \right)^2 \vec{u}_r \quad \vec{ds} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \langle P_{ray} \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta}_{4/3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \quad \Rightarrow \langle P_{ray} \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

La puissance moyenne rayonnée ne dépend pas de r . Cette conservation de puissance est compatible avec la dépendance en $1/r$ du champ électromagnétique qui n'est pas due à une dissipation de l'énergie dans le milieu, mais à une dilution de l'énergie dans l'espace.

V. Etude de la diffusion du rayonnement électromagnétique

L'onde électromagnétique émise par le soleil interagit avec les molécules de l'atmosphère (N_2 et O_2) qui se comportent alors comme des dipôles électriques induits. Ces dipôles oscillants rayonnent à leur tour des ondes électromagnétiques dans toutes les directions. On dit que la lumière du soleil est diffusée.

Dans le cadre de la mécanique classique, l'interaction atome-rayonnement est étudiée à l'aide du modèle de l'électron élastiquement lié :

Modèle de l'électron élastiquement lié :

- Chaque électron est modélisé par un oscillateur harmonique amorti.
- L'électron est soumis à une force de rappel de la forme $-m\omega_0^2\vec{r}$, qui rend compte de l'effet du déplacement de l'électron dans le champ électrique qu'exercent sur lui les noyaux de la molécule et les autres électrons.
- L'électron est soumis en outre à la force $-m\Gamma\dot{\vec{r}}$ qui rend compte des diverses causes d'amortissement.

Typiquement, on a : $\omega_0 = 10^{17} \text{ rad/s} \gg \Gamma = 10^{12} \sim 10^{14} \text{ rad/s}$.

L'atmosphère est soumise à une onde électromagnétique, dans le domaine visible ($\omega \approx 10^{15} \text{ rad/s}$), qui se propage selon $\vec{u}_x$ et polarisée selon $\vec{u}_z$.

Montrer qu'à l'échelle de la molécule, le champ électrique est uniforme.

$\vec{E}(M, t) = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_z$ dans le domaine visible $\lambda = 0,4 \sim 0,8 \mu\text{m}$ l'échelle de la molécule $x \sim 1 \text{ nm}$

$$kx = 2\pi \frac{x}{\lambda} \ll 2\pi \Rightarrow \omega t - kx \approx \omega t \Rightarrow \vec{E}(M, t) = E_0 e^{j\omega t} \vec{u}_z$$

$\Rightarrow$ à l'échelle de la molécule, le champ électrique est uniforme.

Déterminer $\vec{r}$. Dédire l'expression du moment dipolaire lié au mouvement de cet électron.

La RFD appliquée à un électron:

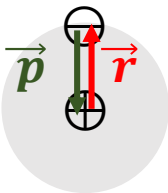
$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E} - m\omega_0^2\vec{r} - m\Gamma\dot{\vec{r}} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{\vec{r}} + m\omega_0^2\vec{r} + m\Gamma\dot{\vec{r}} = -e\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}} + \Gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

Le mouvement de l'électron est forcé par le champ

$$\vec{E}(M, t) = E_0 e^{j\omega t} \vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = r_0 e^{j\omega t} \vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = j\omega r_0 e^{j\omega t} \vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = j\omega \vec{r} \quad \text{et} \quad \ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} + \Gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E} \quad \Rightarrow \quad (-\omega^2 + j\Gamma\omega + \omega_0^2)\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = -\frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega} \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = -\frac{e}{m} \frac{E_0 e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega} \vec{u}_z$$

Or  $\vec{p} = e(-\vec{r})$

$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{e^2}{m} \frac{E_0 e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow p_0(\omega) = \|\vec{p}\| = \frac{E_0 e^2}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}}$$

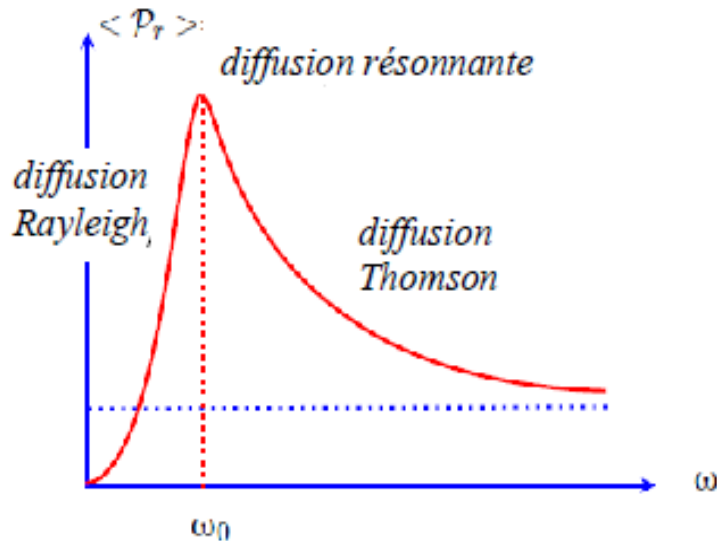
Calculer la puissance moyenne rayonnée par ce dipôle. Interpréter.

$$\Rightarrow \langle P_{ray} \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

$$\text{or } p_0(\omega) = \frac{E_0 e^2}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}}$$

$$\Rightarrow \langle P_{ray} \rangle = \frac{\omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \frac{E_0^2 e^4}{m^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

$$\Rightarrow \langle P_{ray} \rangle = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi m^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$



$\omega \ll \omega_0$ Diffusion Rayleigh

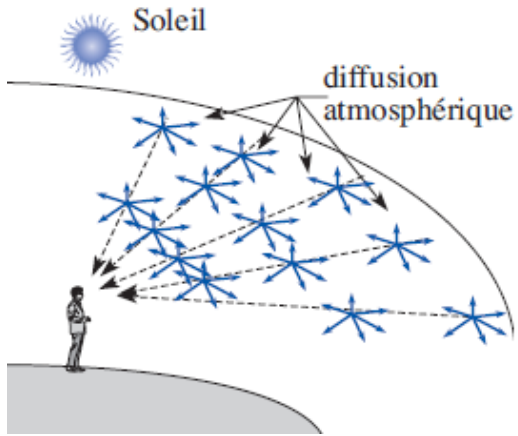
$$\Rightarrow \langle P_{ray} \rangle = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi m^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$$

$\omega_0 \ll \omega$ Diffusion Thomson

$$\Rightarrow \langle P_{ray} \rangle = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi m^2 \epsilon_0 c^3}$$

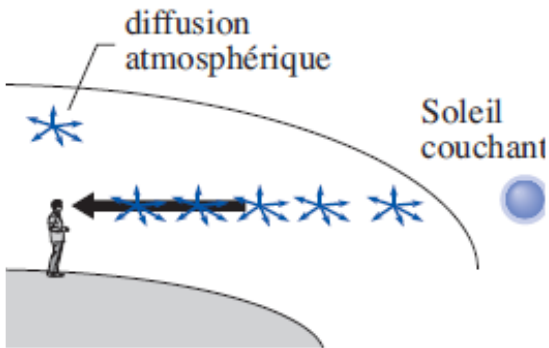
Dans le cas de la lumière diffusée par l'atmosphère, $\omega_0 = 10^{17} \text{ rad/s} \gg \omega \approx 10^{15} \text{ rad/s}$

la puissance moyenne rayonnée est: $\langle P_{ray} \rangle = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi m^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$



$$\omega_{rouge} = 2,3 \cdot 10^{15} \text{ rads}^{-1} \quad \text{et} \quad \omega_{bleu} = 4,7 \cdot 10^{15} \text{ rads}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\langle P_{ray} \rangle_{bleu}}{\langle P_{ray} \rangle_{rouge}} \approx 16$$

⇒ La puissance diffusée est donc environ 16 fois plus intense dans le bleu que dans le rouge, ce qui explique que le ciel est bleu.

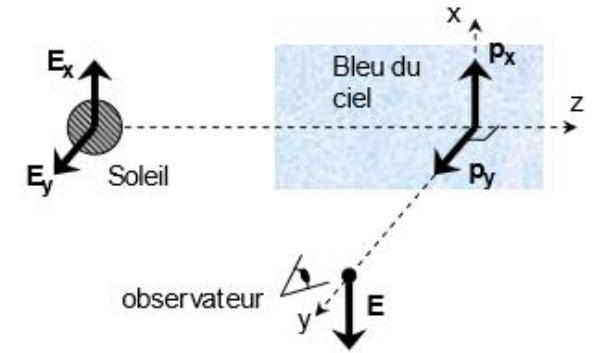


Lorsque le Soleil est bas sur l'horizon, les rayons solaires effectuent un trajet beaucoup plus long dans l'atmosphère. La lumière solaire perd alors plus d'énergie dans le bleu que dans le rouge.

⇒ Ainsi, le Soleil apparaît rouge-orangé au coucher.

VI. Polarisation par diffusion

Soit une onde électromagnétique émise par le soleil, *non polarisée*, se propageant selon $\vec{u}_z$. Son champ électrique, qui vibre dans le plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, admet deux composantes $\vec{E}_x$ et $\vec{E}_y$ présentant entre elles un *déphasage aléatoire*. Ces deux composantes engendrent deux moments dipolaires induits oscillants $\vec{p}_x$ et $\vec{p}_y$.



Etudier l'état de polarisation de lumière diffusée dans la direction orthogonal (ox) ou (oy).

- Comme un dipôle ne rayonne pas suivant sa direction, alors
 - $\vec{p}_x$ ne rayonne pas suivant $\vec{u}_x$
 - $\vec{p}_y$ ne rayonne pas suivant $\vec{u}_y$.
- L'onde diffusée suivant la direction *oy* est polarisée suivant $\vec{u}_x$, et l'onde diffusée suivant la direction *ox* est polarisée suivant $\vec{u}_y$.
- L'onde transmise suivant la direction *oz* est non polarisée

