

Outils mathématiques

I. LES OPERATEURS DU PREMIER ORDRE

I.1. L'OPERATEUR GRADIENT $\vec{\text{grad}}$

C'est un opérateur vectoriel agissant sur un champ scalaire f vérifiant : $\vec{df} = \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{l}$.

En un point M donné, le gradient est porté par la normale à la surface de niveau (surface d'équation $f = \text{cte}$), dirigé dans le sens croissant de f .

Expression du gradient :

En coordonnées cartésiennes : $\vec{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$

En coordonnées cylindriques : $\vec{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$

En coordonnées sphériques : $\vec{\text{grad}} f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$

I.2. L'OPERATEUR DIVERGENCE div :

C'est un opérateur scalaire agissant sur un champ vectoriel $\vec{a}(M)$ vérifiant : $\text{div } \vec{a}(M)$

Expression de $\text{div } \vec{a}(M)$

En coordonnées cartésiennes : $\text{div } \vec{a}(x, y, z) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$

En coordonnées cylindriques : $\text{div } \vec{a}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$

En coordonnées sphériques : $\text{div } \vec{a}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(a_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(a_\varphi)}{\partial \varphi}$

I.3. L'OPERATEUR ROTATIONNEL $\vec{\text{rot}}$:

C'est un opérateur vectoriel agissant sur un champ vectoriel $\vec{a}(M)$ vérifiant : $d\vec{C} = \vec{\text{rot}} \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}$

Où $d\vec{C}$ est la circulation élémentaire de $\vec{a}(M)$ sur un contour Γ limitant une surface.

Expression de $\vec{\text{rot}} \vec{a}(M)$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \left[\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$$

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z$$

En coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\varphi - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}) \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi$$

II. LES OPERATEURS DU SECOND ORDRE

II.1. LE LAPLACIEN SCALAIRE D'UN CHAMP SCALAIRE

L'opérateur Laplacien scalaire s'applique sur un champ scalaire : $\Delta f(x, y, z) = \text{div } \vec{\text{grad}} f(x, y, z)$

En coordonnées cartésiennes : $\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

En coordonnées cylindriques : $\Delta f(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

En coordonnées sphériques : $\Delta f(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta})$

II.2. LE LAPLACIEN VECTORIEL D'UN CHAMP VECTORIEL

L'opérateur laplacien vectoriel $\vec{\Delta}\vec{a}(x, y, z)$, ou encore noté $\Delta\vec{a}(x, y, z)$, s'applique sur un champ vectoriel :

$$\Delta\vec{a}(x, y, z) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{a}(x, y, z)) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{a}(x, y, z))$$

En coordonnées cartésiennes

$$\Delta\vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

En coordonnées cylindriques

$$\Delta\vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_r - \frac{1}{r^2} \left(A_r + 2 \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \Delta A_\theta - \frac{1}{r^2} \left(A_\theta - 2 \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \\ \Delta A_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

III. OPERATEUR NABLA $\vec{\nabla}$

L'opérateur nabla n'est définie qu'en coordonnées cartésienne par : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$

L'opérateur nabla permet de simplifier l'écriture en coordonnées cartésienne du :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \vec{\nabla}[f(x, y, z)]$$

$$\text{div}\vec{a}(x, y, z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{a}(x, y, z) = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}$$

$$\Delta f(x, y, z) = \vec{\nabla}^2 f(x, y, z)$$

IV. RELATIONS ENTRE LES OPERATEURS DIFFERENTIELS

Soient f, f_1 et f_2 des champs scalaires ; $\vec{a}, \vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ des champs vectoriels, alors :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}) = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f_1 \cdot f_2) = f_1 \overrightarrow{\text{grad}}(f_2) + f_2 \overrightarrow{\text{grad}}(f_1)$$

$$\text{div}(f\vec{a}) = f \text{div}\vec{a} + \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

$$\text{div}(\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2) = \vec{a}_2 \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{a}_1 - \vec{a}_1 \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{a}_2$$

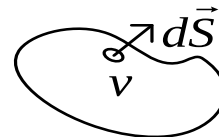
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{a}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{a}) - \Delta\vec{a}$$

V. OPERATEURS ET INTEGRALES

Théorème de Green Ostrogradski

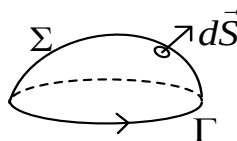
Soit $\vec{a}$ un champ de vecteur, S une surface fermée et V le volume délimité par cette surface.

$$\iiint_V \text{div}\vec{a} \, d\tau = \oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$$



Théorème de Stokes-Ampère

Cette formule relie une intégrale curviligne le long d'un contour fermé Γ orienté à une intégrale de surface sur n'importe quelle surface Σ s'appuyant sur le contour Γ .



$$\iint_{\Sigma/\Gamma} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{u} \cdot d\vec{l}$$