
Support de Cours :

Les équations locales d'électromagnétisme : Équations de Maxwell. Énergie électromagnétique.

2eme Année MP/T/PC

Proposé par : Prof. Neil JOMAA

Introduction :

Nous nous intéresserons (dans le cours de 2^{ème} année) aux phénomènes électromagnétiques dépendant du temps. L'interprétation de ces phénomènes est basé sur la notion du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ composé d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$ indissociables.

Le but de ce chapitre est de poser les équations locales vérifiées par ce champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ et ses sources $(\rho, \vec{j})$ et interpréter leurs formes intégrales. En plus on étudiera le bilan d'énergie électromagnétique.

Ce chapitre est important puisqu'il représente la base de l'étude des ondes électromagnétiques sujet des chapitre suivants du module de l'électromagnétisme.

I/ La loi de la conservation de la charge électrique :

I-1/ Source du champ $(\vec{E}, \vec{B})$:

$(\vec{E}, \vec{B})$ est crée par un ensemble de charges en mouvement décrit par :

a) Densité volumique de charge :

La densité volumique de charge ρ est définie par la relation : $dq(M, t) = \rho.d\tau_M$ et $\rho = \sum_i n_i q_i$

où n_i : densité particulière des charges q_i (ρ décrit la répartition spatiale volumique de la charge).

Exemple :

Pour un métal : $\rho = n_e(-e) + n_{ion}(+e)$ puisque le métal est constitué par des électrons et des ions.

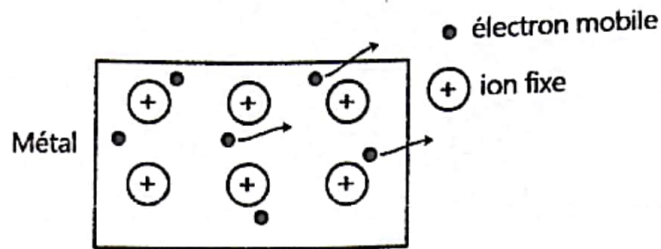


Figure 2

b) Densité volumique de courant :

La densité volumique de courant $\vec{j}$ est définie par : $d^2q(M, t) = \vec{j}(M, t) d\vec{S}_M \cdot dt$ (décrit le mouvement d'ensemble)

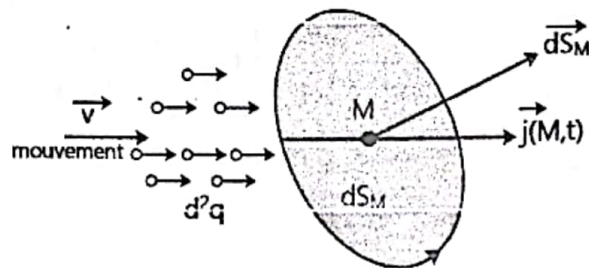


Figure 3

unité de $\vec{j} \equiv \frac{C.s^{-1}}{A.m^{-2}} . m^{-2}$

Les lignes de champ de $\vec{j}$ sont appelées lignes de courant.

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \quad \text{où } q_i \text{ est une charge mobile.}$$

Exemple : Métal : $\vec{j} = n_e(-e)\vec{v}_e$ car les ions sont fixes.

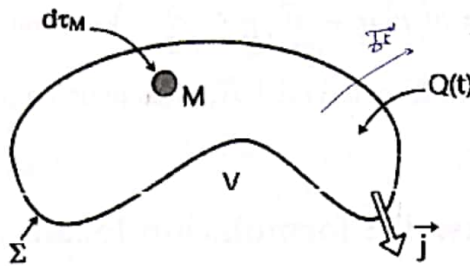
c) Intensité de courant :

L'intensité I est le débit de charge à travers une surface orientée.

Figure 3 : $dI = \frac{d^2q}{dt}$: à travers $d\vec{S}_M \Rightarrow dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}_M \Rightarrow I = \iint_{\text{surface}} \vec{j} \cdot d\vec{S}$ "flux"

I-2/ Équation locale de conservation de charge :

Postulat : la charge électrique d'un système isolé est constante :



$$Q(t) = \iiint_V \rho(M, t) \cdot d\tau_M$$

Pendant dt ; Q varie de $dQ = Q(t + dt) - Q(t)$

$$\Rightarrow dQ = \iiint_V (\rho(M, t + dt) - \rho(M, t)) d\tau = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\tau$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

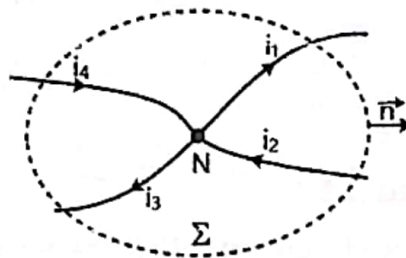
$$I = -\frac{dQ}{dt} \Rightarrow \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{dS} = - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \Rightarrow \iiint_V \text{div } \vec{j} d\tau = \iiint_V -\frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

$$\forall \text{ est qq} \Rightarrow \text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0}$$

Remarque : En régime stationnaire $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{j} = 0 \Rightarrow \iiint_V \text{div } \vec{j} d\tau = 0 \forall V$

$$\Rightarrow \forall \Sigma \text{ fermée } \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0 \Rightarrow \vec{j} \text{ est flux conservatif.}$$

Ce résultat démontre la loi des nœuds :



$$\Rightarrow i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0$$

$$\Rightarrow i_1 + i_3 = i_2 + i_4$$

II/ Les équations de Maxwell :

II-1) Définition du champ électromagnétique $\vec{E}, \vec{B}$:

$(\vec{E}, \vec{B})$ est définie par son action sur une charge ponctuelle q située en M à t , par rapport à un référentiel R . Cette action est décrite par la force de Lorentz :

$$\vec{F}_{\mathcal{L}} = q(\vec{E}_R + \vec{v}_{/R} \wedge \vec{B}_{/R}) \quad \text{en } (M, t).$$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ dépendent par définition du référentiel R , mais pour ne pas alourdir la notation on notera $(\vec{E}, \vec{B})$ en (M, t)

II-2) Équations de Maxwell : formulation locale :

$(\vec{E}, \vec{B})$ vérifie en (M, t) 4 équations locales proposées par Maxwell dans une série de publications qui s'étalent de 1856 à 1864 (8 ans) :

$\text{Maxwell-Faraday (MF)} : \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\text{Maxwell-Gauss (MG)} : \text{div} \vec{E} = \rho(M, t)/\epsilon_0$
$\text{Maxwell-Flux (M}\phi\text{)} : \text{div} \vec{B} = 0$ Équations intrinsèques	$\text{Maxwell-Ampère (MA)} : \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(M, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ Equations extrinsèques <i>dépend du milieu</i>

ϵ_0 : permittivité diélectrique du vide ($F.m^{-1}$) $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2 \Rightarrow MA : \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 μ_0 : perméabilité magnétique du vide ($H.m^{-1}$) $c = 3.10^8 m/s$: célérité de la lumière dans le vide
 (MF) et (MA) expriment le couplage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en régime variable.

Maxwell définit le vecteur densité de courant de déplacement : $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\rightarrow MA : \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D)$ $\vec{j}$: courant de conduction.

Remarque : Les 4 équations de Maxwell énoncées dans ce cours concernent un milieu vide (ϵ_0, μ_0) en présence de sources ($\rho, \vec{j}$).

Ces 4 équations présentent une autre forme dans les milieux matériels (diélectriques ou magnétiques) qui dépassent le cadre de ce cours.

II-3) Courant de déplacement :

II-3-a) Courant de déplacement et compatibilité des équations de Maxwell avec l'équation de conservation de charge :

Dans l'équation de MA, il apparaît le terme $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Si on élimine ce terme $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$$\Rightarrow \underbrace{\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{B})}_0 = \mu_0 \text{div} \vec{j} \Rightarrow \text{div} \vec{j} = 0 \quad \text{non compatible avec l'équation de}$$

conservation de charge : $\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$!

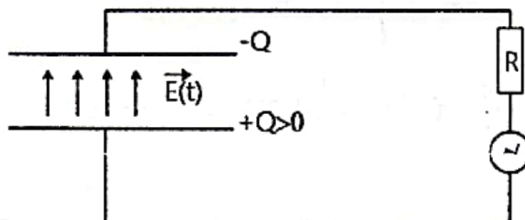
D'où l'intérêt théorique de $\vec{j}_D$ introduit par Maxwell, en effet,

Appliquons la divergence sur $\nabla \cdot$:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E}$$

$$MG \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

✓ Physiquement le courant de déplacement explique par exemple le passage du courant dans les diélectriques (Isolants) placés entre les armatures d'un condensateur.



✓ En plus, $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ explique à travers MA la création d'un champ $\vec{B}$ suite à la variation temporelle de $\vec{E} \rightarrow$ couplage $(\vec{E}, \vec{B})$ en régime variable.

II-3-b) Exemple illustrant la notion du courant de déplacement :

✓ Considérons un exemple physique pour mieux comprendre la notion de $\vec{j}_D$.

Un corps radioactif ponctuel en O (centre d'un repère sphérique) se désintègre en émettant des particules chargées de façon isotrope.

On suppose que la répartition de charge à t donné est :

$$\begin{cases} \rho(r, t) = 0 & \text{pour } r > R(t) \\ \rho(r, t) = \rho_0(t) & \text{pour } r \leq R(t) \end{cases}$$

On suppose que la charge totale Q_0 est conservée.



Question 1 : Calculer $\vec{j}$ de conduction en fonction de r et de $\frac{\partial Q(r, t)}{\partial t}$:

soit $S(r, t)$ sphère de rayon r contient $Q(r, t) = \iiint_{V \in S(r, t)} \rho(r, t) dV$ $\rho = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{J} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V \in S(r,t)} \rho \cdot d\tau + \iiint_{V \in S(r,t)} \text{div} \vec{J} \cdot d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q(r,t)}{\partial t} + \oint_{S(r,t)} \vec{J}(r,t) \cdot \vec{S}' = 0$$

On a un v. par un angle θ et $\phi \Rightarrow \vec{J} = J(r,t) \vec{u}_r$

$(\Pi, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$
 $(\Pi, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ } d.p.s.p $\Rightarrow \vec{J} \parallel \vec{u}_r$, cd : $\vec{J} = J(r,t) \cdot \vec{u}_r$

Donc $\oint J(r,t) \cdot \vec{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi = -\frac{\partial Q}{\partial t}$

$\Rightarrow J(r,t) \cdot r^2 4\pi = -\frac{\partial Q}{\partial t} \Rightarrow \vec{J} = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \cdot \vec{u}_r$

Question 2 : En étudiant la symétrie de $\vec{B}$ montrer l'importance de l'existence d'un courant de déplacement dans l'équation de MA

$(\Pi, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$
 $(\Pi, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ } d.p.s.p $\Rightarrow \vec{B}$ doit être $\perp$ à ces 2 plans $\Rightarrow \vec{B}(\Pi) = 0$

si on élimine $\vec{J}_D \Rightarrow \Pi A : \vec{0} = \mu_0 \vec{J} + \vec{0} \Rightarrow \vec{J} = \vec{0}!$

absurde.

Question 3 : Calculer $\vec{E}$, en déduire $\vec{J}_D$ et vérifier le résultat prévu par MA :

Sym + inv $\Rightarrow \vec{E} = E(r,t) \cdot \vec{u}_r$

Th de Gauss : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint E(r,t) \cdot \vec{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi \cdot \vec{u}_r = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

$\Rightarrow E(r,t) \cdot r^2 4\pi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q(r,t)}{4\pi r^2 \epsilon_0} \cdot \vec{u}_r \Rightarrow \vec{J}_D = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \cdot \vec{u}_r$

Donc $\vec{J}_D = -\vec{J}$ ceci est prévu par ΠA : car $\vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_D)$ puisque $\vec{B}(\Pi) = 0$ selon la symétrie.

II-4) Contenu physique des équations de Maxwell : **formulation intégrale**

(questions typiques)

$$\checkmark MG : \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Soit $\mathcal{V}$ un volume quelconque limité par S fermée

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau}_{Q_{\text{int}}} \Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{int}} : \text{théorème de Gauss}$$

$$\checkmark MA : \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D) = \mu_0 \vec{j}_{\text{tot}}$$

Soit $\mathcal{C}$ un contour fermé et Σ une surface s'appuyant sur $\mathcal{C}$.

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \underbrace{\iint_{\Sigma} \vec{j}_{\text{tot}} \cdot d\vec{S}}_{i_{\text{tot}}} \Rightarrow \boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enlacé par } \mathcal{C}}}{i_{\text{tot}}}} \quad (a)$$

$$i_{\text{tot}} = \iint_{\Sigma} (\vec{j} + \vec{j}_D) \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}}_{i_c} + \iint_{\Sigma} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = i_c + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \underbrace{\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{\phi_E}$$

où i_c est l'intensité de courant de conduction.

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}} \quad (b)$$

(a) et (b) sont 2 formes possibles du théorème d'Ampère **généralisé**. (voir page 20).

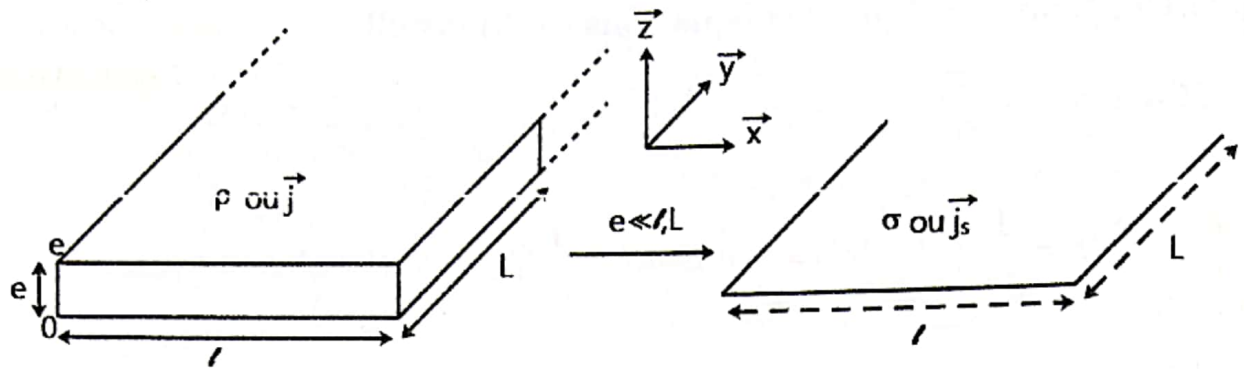
III/ Relations de passage du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$: à la traversée d'une surface de charge ou de courant : (Conséquence des équations de Maxwell) :

III-1) Distribution surfacique des sources :

Parfois la charge (respectivement le courant) est localisée dans une couche d'épaisseur(e) très faible devant la longueur caractéristique du problème.

Dans ce cas, il est pratique de décrire la distribution par une densité surfacique de charge σ (respectivement de courant $\vec{j}_S$).

exemple :



$$\sigma = \int_0^e \rho(z, t) dz \quad \text{si } \rho \text{ uniforme} \Rightarrow \sigma = \rho \cdot e$$

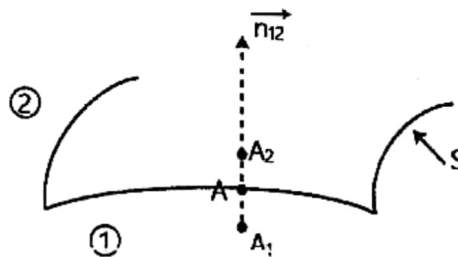
$$\vec{j}_s = \int_0^e \vec{j}(z, t) dz \quad \text{si } \vec{j} \text{ uniforme} \Rightarrow \vec{j}_s = \vec{j} \cdot e$$

III-2) Relations de passage :

a/ Les champs limites

Dans le cas des distributions surfaciques des sources (charges et courants) les équations de Maxwell ne peuvent pas être écrites en un point de la surface (S).

Dans ce cas on utilise les relations de passage qui font intervenir les valeurs limites du champ ($\vec{E}$, $\vec{B}$) de part et d'autre de S .



Le point $A \in S$ et A_1, A_2 sont des points voisins de A appartenant respectivement aux domaines ① et ② séparés par S .

$\vec{n}_{12}$: normale (en A) à S dirigée de ① vers ②.

$$\text{On note : } \vec{E}_1 = \lim_{A_1 \rightarrow A} \vec{E}(A_1) \quad \text{et} \quad \vec{B}_1 = \lim_{A_1 \rightarrow A} \vec{B}(A_1)$$

$$\vec{E}_2 = \lim_{A_2 \rightarrow A} \vec{E}(A_2) \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 = \lim_{A_2 \rightarrow A} \vec{B}(A_2)$$

b/ Relation de passage de $\vec{E}$:

Au voisinage du point A portant une densité surfacique de charge $\sigma(A, t)$; on peut montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} M.G \rightarrow \textcircled{a} \vec{n}_{12}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ M.F \rightarrow \textcircled{b} \vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}} \quad (R_1)$$

Relation de passage de $\vec{E}$

c/ Relation de passage de $\vec{B}$:

Au voisinage du point A portant une densité surfacique de courant $\vec{j}_s(A, t)$, on peut montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} M.\phi \rightarrow \textcircled{c} \vec{n}_{12}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ M.A \rightarrow \textcircled{d} \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}} \quad (R_2)$$

Relation de passage de $\vec{B}$

Explication : notons $\delta \vec{B} = \vec{B}_2 - \vec{B}_1$

$$\textcircled{d} \wedge \vec{n}_{12} \Rightarrow (\vec{n}_{12} \wedge \delta \vec{B}) \wedge \vec{n}_{12} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{n}_{12} \wedge \delta \vec{B}) = \underbrace{(\vec{n}_{12} \cdot \delta \vec{B})}_{0 \text{ selon } \textcircled{c}} \vec{n}_{12} - \underbrace{(\vec{n}_{12} \cdot \vec{n}_{12})}_1 \delta \vec{B} = -\delta \vec{B}$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

$$\text{Or } (\vec{n}_{12} \wedge \delta \vec{B}) \wedge \vec{n}_{12} = -\vec{n}_{12} \wedge (\vec{n}_{12} \wedge \delta \vec{B})$$

Donc $\delta \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$ d'où la relation (R2)

Remarque : La démonstration des relations de passage sort du cadre de ce cours.

d/ Interprétation :

• On note :

$E_n = \vec{E} \cdot \vec{n}_{12}$: la composante normale de $\vec{E}$.

$B_n = \vec{B} \cdot \vec{n}_{12}$: la composante normale de $\vec{B}$.

$\vec{E}_t = \vec{n}_{12} \wedge \vec{E}$: la composante tangentielle de $\vec{E}$.

$\vec{B}_t = \vec{n}_{12} \wedge \vec{B}$: la composante tangentielle de $\vec{B}$.

$$\textcircled{a} \Rightarrow E_{n2} - E_{n1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_n \text{ est discontinue en traversant une surface chargée.}}$$

$$\textcircled{b} \Rightarrow \vec{E}_{t2} = \vec{E}_{t1} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_t \text{ est continue en traversant une surface chargée.}}$$

$$\textcircled{c} \Rightarrow B_{n2} = B_{n1} \Rightarrow \boxed{B_n \text{ est continue en traversant une surface de courant.}}$$

$$\textcircled{d} \Rightarrow \vec{B}_{t2} - \vec{B}_{t1} = \mu_0 \vec{j}_s \Rightarrow \boxed{\vec{B}_t \text{ est discontinue en traversant une surface de courant.}}$$

Remarque : Le potentiel électrique V est continu à la traversée de S et en tout point de l'espace.

IV/ Les équations de propagation du champ électromagnétique dans le vide en l'absence de charges et de courants : (conséquences des équations de Maxwell)

IV-1/ Les équations de Maxwell en l'absence de sources et propagation

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = 0 \\ \vec{j} = \vec{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} MG: \operatorname{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0 = 0 \\ MA: \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ MF: \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ MA: \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{couplage spatio-temporel entre } \vec{E} \text{ et } \vec{B} \rightarrow \text{propagation.}$$

En effet, si une source a créé un $ch(\vec{E}, \vec{B})$ variable à son voisinage; les variations de $(\vec{E}, \vec{B})$ sont à leur tour sources d'un $ch(\vec{E}, \vec{B})$ variable.

Source $\rightarrow (\vec{E}, \vec{B})$ variable $\xrightarrow{MF/MA} (\vec{E}, \vec{B})$ variable $\xrightarrow{MF/MA} (\vec{E}, \vec{B})$ variable.....

$\rightarrow$ variation spatio-temporelle $\rightarrow$ création de $(\vec{E}, \vec{B})$ de proche en proche $\rightarrow$ propagation.

IV-2/ Les équations de propagation :

cf : chapitre des ondes propagées

Quelles sont alors les équations régissant cette propagation ?

✓ Équation de $\vec{E}$:

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \underbrace{\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E})}_{0(MG)} - \underbrace{\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E})}_{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(MF)} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} \underset{(MA)}{=} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \text{ on définit l'opérateur d'Alembertien : } \boxed{\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\square \vec{E} = \vec{0}}$$

✓ Équation de propagation de $\vec{B}$:

$$\vec{\Delta} \vec{B} = \underbrace{\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{B})}_{0(M\phi)} - \underbrace{\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{B})}_{1/c^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(MA)} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E} \underset{MF}{=} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \left[\vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \right] \Rightarrow \boxed{\vec{\square} \vec{B} = \vec{0}}$$

IV-3/ Conclusion :

Les équations de Maxwell impose au $ch(\vec{E}, \vec{B})$ de satisfaire (dans le vide en l'absence de sources)

l'équation $\vec{\square} \vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\Delta} \vec{X} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \vec{0}$ dite équation de d'Alembert.

Les solutions de cette équation seront étudiées de façon détaillée dans le chapitre des ondes électromagnétique.

On va voir que $(\vec{E}, \vec{B})$ dans ce cas se propage à la célérité (c).

Remarque : Certains milieux comme le plasma (qui sera étudié dans un chapitre ultérieur) sont

modélisés par un vide en présence d'un courant $\vec{j}$ donc (MA) : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\text{donc } \vec{\Delta} \vec{E} = \underbrace{\vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E})}_{0 \text{ (MG)}} - \underbrace{\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E})}_{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\square} \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \neq \vec{0}} \quad \text{Équation de propagation de } \vec{E} \text{ dans le vide en présence de } \vec{j}.$$

V/ Cas des champs statiques :

V-1) Les équations des Maxwell et leurs interprétation :

En régime station (MG) et ($M\phi$) gardent la même forme; mais (MF) et (MA) deviennent :

$$\begin{cases} (MF)_{\text{stat}} : \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \\ (MA)_{\text{stat}} : \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

Interprétation physique :

✓ ($(MF)_{\text{stat}}$) $\rightarrow ?$

- on sait que $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} f) = \vec{0} \forall f$

$$\text{Donc : } \vec{\text{rot}} \vec{E}_{\text{stat}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_{\text{stat}} = -\vec{\text{grad}} V$$

Le signe (-) s'explique par le fait que $\vec{E}$ est dirigé vers les potentiels décroissants.

$$\bullet \iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}} \vec{E}_{\text{stat}} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \forall \Sigma \xrightarrow{\text{skoles}} \forall \mathcal{C} \text{ fermé } \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}_{\text{stat}} \cdot d\vec{l} = 0$$

$\Rightarrow \vec{E}_{\text{stat}}$ est à circulation conservative.

✓ (MA) → ?

$$\iint_{\Sigma} \vec{rot} \vec{B}_{stat} d\vec{S} = \mu_0 \underbrace{\iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}}_{\text{Stokes}} \Rightarrow \boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé par } \mathcal{C}}}$$

C'est le théorème d'Ampère

V-2) Conséquences :

$$\vec{E}_{stat} = -\vec{grad} V \Rightarrow \text{div } \vec{E}_{stat} = -\underbrace{\text{div}(\vec{grad} V)}_{\Delta V}$$

$$MG \Rightarrow \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\Delta V \Rightarrow \boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0} \quad \text{Équation de Poisson.}$$

$$\text{Loin de sources } \rho = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta V = 0} \quad \text{Équation de Laplace.}$$

VI/ Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) :

1) Cadre de l'approximation et définition :

Cette approximation concerne les régimes **lentement variables** qui sont souvent rencontrés en pratique (Induction, interaction Onde-Métal...) d'où son importance.

Soit T : durée caractéristique d'évolution des sources du $ch(\vec{E}, \vec{B})$ (donc du $ch(\vec{E}, \vec{B})$ lui-même).

On suppose que les phénomènes électromagnétiques sont étudiés à une distance D des sources.

L'ARQS consiste à négliger : $\boxed{\frac{D}{c} \ll T}$; $\frac{D}{c}$: retard dû à la propagation.

En régime sinusoïdal T représente la période du signal (onde) donc $c.T = \lambda$: longueur d'onde.
Donc : $ARQS \Leftrightarrow \boxed{D \ll \lambda}$

Exemple : en TP : fréquence $f_{max} \sim Mhz \Rightarrow \lambda_{min} = \frac{c}{f_{max}} \sim 10^2 m$

Or la taille des circuits $D \sim 0,1$ à $1m$.

$\Rightarrow D \ll \lambda \Rightarrow ARQS$ est vérifiée en T.P.

Remarque : On utilise dans certains problème la grandeur adimensionnelle : $u = \frac{D}{c.T} \sim \frac{D\omega}{c}$;
alors $ARQS \Leftrightarrow u \ll 1$.

2) Équations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS :

Si x est une grandeur physique ; on notera x^* son ordre de grandeur.

$$A \ll B \Rightarrow \frac{A}{B} < \frac{1}{100}$$

$$MF: \quad \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\frac{E^*}{D} \sim \frac{B^*}{T}} \Rightarrow \boxed{\frac{E^*}{B^*} \sim \frac{D}{T}}$$

$$MA: \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Cas 1 : Supposons que $\vec{j} \neq \vec{0}$

$$\frac{\|\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\vec{\text{rot}} \vec{B}\|} \sim \frac{1}{c^2} \frac{E^*}{T} = \frac{D}{c^2 T} \cdot \left(\frac{D}{T}\right) = \left(\frac{D}{cT}\right)^2$$

$$\text{ARQS} \Leftrightarrow D \ll cT \Rightarrow u = \frac{D}{cT} \ll 1$$

Dans le cadre de l'ARQS; on se limite à l'ordre 1 en u or $\frac{\|\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\vec{\text{rot}} \vec{B}\|} \sim u^2 \ll 1$ donc

$$MA: \quad \boxed{\vec{\text{rot}} \vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j}}_{\text{ARQS}} \quad \text{si } \vec{j} \neq \vec{0}$$

$$\text{Donc } (\|\vec{\text{rot}} \vec{B}\| \sim \mu_0 \|\vec{j}\|) \gg \mu_0 \|\vec{j}_D\|$$

$$\Rightarrow \|\vec{j}\| \gg \|\vec{j}_D\|$$

Cas 2 : Dans le cas où $\vec{j} = \vec{0}$; $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ donc on ne plus négliger $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ puisqu'elle est de même ordre de grandeur que $\vec{\text{rot}} \vec{B}$.

Conclusion :

Dans le cadre de l'ARQS :

MG ; $M\phi$ et MF gardent la même forme que celle du régime variable, mais MA s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{si } \vec{j} = \vec{0} \text{ (loin de sources)} \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} & \text{si } \vec{j} \neq \vec{0} \quad (\|\vec{j}_D\| \ll \|\vec{j}\|) \end{cases}$$

3) Équation locale de conservation de la charge dans le cadre de l'ARQS :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

Montrer que dans le cadre de l'ARQS cette équation devient $\text{div} \vec{j} = 0$.

$$\text{soit } \alpha = \frac{|\frac{\partial \rho}{\partial t}|}{|\text{div} \vec{j}|} \ll 1 ?$$

$$\alpha \sim \frac{\rho^*/T}{j^*/D} \sim \frac{\rho^* \cdot D}{j^* \cdot T} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{MG} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \cdot \text{div} \vec{E} \\ \Rightarrow \rho^* \sim \epsilon_0 \cdot \frac{E^*}{D} \\ \text{ARQS} : \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\ \Rightarrow j^* \sim \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{B^*}{D} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \alpha \sim \frac{\mu_0 \epsilon_0 \cdot E^*}{D} \cdot \frac{D \cdot D}{T \cdot B^*} \quad \text{selon MF : } \frac{E^*}{B^*} \sim \frac{D}{T}$$

$$\Rightarrow \alpha \sim \left(\frac{D}{cT} \right)^2 = u^2 \ll 1 \quad \text{dans l'ARQS}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right| \ll |\text{div} \vec{j}| \Rightarrow \boxed{\text{div} \vec{j} = 0}$$

Donc $\iiint_V \text{div} \vec{j} d\tau = 0 \forall V \Rightarrow$ Selon le théorème de Green, $\Rightarrow \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \forall \Sigma$ fermée.

($\vec{j}$ à flux conservatif).

En se basant sur cette propriété, on pourra démontrer la loi des nœuds en régime quasi-statique (voir remarque du paragraphe I-2/).

VII/ Énergie Électromagnétique :

VII-1/ Puissance cédée par le champ électromagnétique à la matière :

Soit un échantillon de matière de volume $d\tau$, soumis à $(\vec{E}, \vec{B})$.

Dans cet échantillon, un porteur de charge q_1 (par exemple électron) animé d'une vitesse $\vec{v}_1$ subit la force de Lorentz :

$$\vec{F}_{\mathcal{L},1} = q_1 (\vec{E} + \vec{v}_1 \wedge \vec{B})$$

$$\Rightarrow P_1 = \vec{F}_{\mathcal{L},1} \cdot \vec{v}_1 = q_1 \vec{E} \cdot \vec{v}_1 \quad (\text{la force magnétique } q_1 \vec{v}_1 \wedge \vec{B} \text{ ne travaille pas car } ((\vec{v}_1 \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_1 = 0))$$

Soit n_1 : densité particulaire (^{nombre} volume/volume) du porteur q_1 .

$$d\tau \text{ reçoit alors } dP_1 = n_1 d\tau P_1 = n_1 q_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{E} d\tau.$$

Supposons que l'échantillon contient différents types (notés i) de porteurs (par exemple des électrons et des ions).

Alors : $\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$

Donc $d\tau$ reçoit $dP = \sum_i dP_i = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E} d\tau = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$.

$\Rightarrow$ la puissance volumique cédée par $(\vec{E}, \vec{B})$ à la matière est $P_{V, \text{cédée}} = \frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

Remarque : Les charges fixes dans l'échantillon ne contribuent pas dans cette puissance car leur vitesse est nulle.

VII-2/ Conduction électrique. Milieu ohmique. Effet Joule :

VII-2-a/ Modèle de Drüde. Loi d'Ohm locale. Conductivité :

Modèle de Drüde :

Le modèle de Drüde consiste à modéliser un métal par un réseau cristallin d'ions positifs fixes dans lequel des électrons de conduction se déplacent librement.

Les collisions d'un électron sur le reste des particules (ions et électrons) sont modélisées par une force de frottement de type visqueux $\vec{f} = \frac{-m}{\tau} \vec{v}$.

où

$$\begin{cases} \vec{v} : \text{vitesse moyenne d'un électron} \\ \tau : \text{temps de relaxation (durée moyenne entre deux collisions successives), } \tau(\text{métal}) \simeq 10^{-14} \text{s} \end{cases}$$

Loi d'Ohm locale :

Montrer que : $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ où γ_0 est une constante appelée conductivité électrique :

On applique un ch $\vec{E}^0$ (statique ou quasi-statique) sur un cond métallique.

Appliquons la RFD sur un e^- :

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = q \vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}.$$

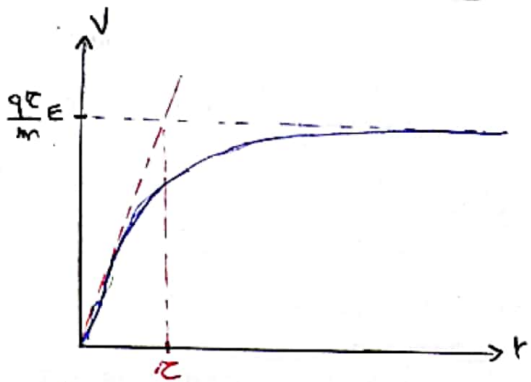
$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m} \vec{E} \Rightarrow \vec{v} = \vec{A} \cdot e^{-t/\tau} + \vec{v}_p.$$

$$\frac{\partial \vec{v}_p}{\partial t} = \vec{0} \text{ ou négligeable} \Rightarrow \vec{v}_p = \frac{q\tau}{m} \vec{E}.$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{A} \cdot e^{-t/\tau} + \frac{q\tau}{m} \vec{E}.$$

$$\vec{v}(t=0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{A} = -\frac{q\tau}{m} \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{q\tau}{m} \vec{E} (1 - e^{-t/\tau})$$



R. Manekine
 $\sim 5 \times 10^{-14} \text{ s}$

Le R. Manekine est ~~est~~ négligeable

$$\Rightarrow \vec{V} \approx \vec{V}_p = \frac{qz}{m} \cdot \vec{E}$$

$$\text{or } \vec{j} = m q \cdot \vec{V}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = \frac{m q^2 z}{m} \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \gamma_0 \cdot \vec{E}} : \text{Loi d'Ohm locale.}$$

$$\text{or } \gamma_0 = \frac{m q^2 z}{m} : \text{conductivité statique.}$$

$$\text{unité : } \text{S} \cdot \text{m}^{-1}$$

Remarque : cette loi est valable si $\vec{E}$ est statique ou sa durée caractéristique d'évolution $T \gg \tau = 10^{-14} \text{ s}$.

VII-2-b/ Densité volumique de charge ρ dans un conducteur ohmique :

Soit un conducteur ohmique (c.à.d la loi d'Ohm est applicable dans ce conducteur)

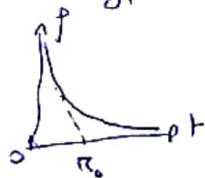
QT: Montrer qu'on peut considérer ce conducteur localement neutre c.à.d $\rho = 0$.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \xrightarrow[\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}]{\text{Ohm}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\gamma_0 \cdot \vec{E}) = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma_0 \text{div} \vec{E} = 0 \xrightarrow{\text{P.G}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma_0}{\epsilon_0} \rho = 0$$

$$\text{Pours : } \tau_0 = \frac{\epsilon_0}{\gamma_0} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau_0} = 0.$$

$$\Rightarrow \rho = \rho_0 \cdot e^{-t/\tau_0}$$

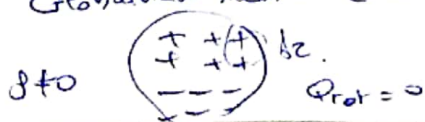


$$\text{AN : } \tau_0 = \frac{8.8 \cdot 10^{-12}}{5 \cdot 10^7} \sim 10^{-19} \text{ s}$$

$\Rightarrow \rho \rightarrow 0$ rapidement.

Conclusion :

Rq: Globalement neutre $\leftarrow$ localement neutre.



En régime statique ou lentement variable on peut considérer un métal ohmique localement neutre c.à.d : $\rho = 0$.

VII-2-c/ Puissance volumique dissipée par effet Joule :

Dans un conducteur ohmique ; la puissance volumique cédée par le champ $(\vec{E}, \vec{B})$ (voir paragraphe VII-1) est convertie en puissance thermique par effet Joule donc :

$$P_{\text{Joule, volumique}} = P_{J,V} = P_{V,\text{cédée}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma_0 E^2 = \frac{j^2}{\gamma_0}$$

À l'intérieur du volume totale $\mathcal{V}$ du conducteur :

$$P_{\text{Joule}} = \iiint_{\mathcal{V}} P_{J,V} d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \gamma_0 E^2 d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{j^2}{\gamma_0} d\tau$$

VII-2-d/ Loi d'Ohm intégrale- Résistance :

Dans un conducteur ohmique, considérons une portion d'un tube de courant comprise entre 2 sections Σ_1 et Σ_2 .

$$\text{En régime statique : } U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

$$\text{et } I = \iint_{\Sigma_1 \text{ ou } \Sigma_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \gamma_0 \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

La loi d'Ohm intégrale s'écrit $U = RI$ ce qui permet de définir la résistance par

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{\gamma_0} \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_{\Sigma_1 \text{ ou } \Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

Resistivité (pointing to γ_0) and *geom.* (pointing to the surface integral).

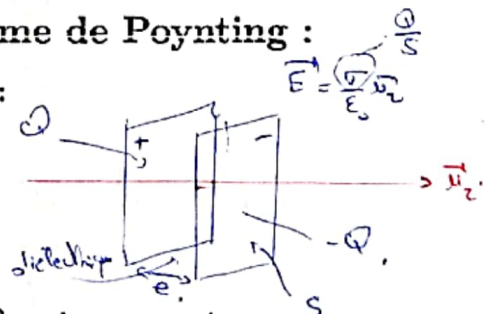
VII-3/ Bilan d'énergie électromagnétique. Théorème de Poynting :

VII-3-a/ Densité volumique de l'énergie électromagnétique :

Considérons un condensateur plan :

S : surface de chaque armature.

e : distance entre les 2 armatures.



Rappel : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$ à l'intérieur du condensateur, où $\sigma = \frac{Q}{S}$ et Q : charge portée par

l'armature (+) et l'énergie électrique emmagasinée est $U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ avec $C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$: capacité du condensateur.

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{e}{\epsilon_0 S} \sigma^2 S^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 e.S = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 e.S \text{ or } e.S = V : \text{volume du condensateur.}$$

Donc l'énergie volumique électrique est $\mu_e = \frac{U_e}{V} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$.

Ce résultat peut être généralisé; c-à-d; on peut associer à un champ $\vec{E}$ localement une densité volumique d'énergie électrique $\mu_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$.

De même, en étudiant l'énergie magnétique emmagasinée par un solénoïde, on peut associer à un champ $\vec{B}$ la densité volumique de l'énergie magnétique $\mu_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$.

Conclusion : On peut associer localement à un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ une densité volumique d'énergie électromagnétique $\mu_{em} = \mu_e + \mu_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$.

VII-3-b/Bilan local d'énergie. Identité de Poynting :

$$MA : \vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{rot} \vec{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dans le paragraphe VII-1/ On a montré que le ch($\vec{E}, \vec{B}$) peut céder à la matière la puissance volumique.

$$P_{V, \text{cédée}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{rot} \vec{B}) \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

$$\text{On donne : } \text{div}(\vec{x} \wedge \vec{y}) = \vec{y} \cdot \vec{rot} \vec{x} - \vec{x} \cdot \vec{rot} \vec{y}.$$

$$\Rightarrow \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{rot} \vec{B}$$

$$\Rightarrow (\vec{rot} \vec{B}) \cdot \vec{E} = \vec{B} \cdot \underbrace{\vec{rot} \vec{E}}_{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} (MF)} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})$$

$$\text{Donc : } \vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \underbrace{\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2} \right)} - \epsilon_0 \underbrace{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}}_{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2}{2} \right)} - \text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right)$$

$$\text{Donc } \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Selon le paragraphe précédent VII-3-a/ $\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \mu_{em}$ et on définit le vecteur de Poynting

$$\vec{\pi} = \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Conclusion :

$$\frac{\partial \mu_{em}}{\partial t} = -\text{div} \vec{\pi} - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Identité de Poynting

VII-3-c/Bilan global d'énergie. Interprétation de l'identité de Poynting :

Considérons un échantillon de matière de volume $\mathcal{V}$ limité par la surface Σ fermée.

On note $U_{em} = \iiint_{\mathcal{V}} \mu_{em} d\tau$ l'énergie électromagnétique contenue dans $\mathcal{V}$.

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{identité de Poynting} \Rightarrow \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mu_{em}}{\partial t} d\tau = - \iiint_{\mathcal{V}} \text{div} \vec{\pi} \cdot d\tau - \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau}_{P_{\text{cédée}}}$$

$\oiint \vec{\pi} \cdot d\vec{s} = P_{\text{ray}}$ représente la puissance rayonnée à travers Σ .

Donc $\vec{\pi}$ représente le vecteur densité de courant énergétique.

Conclusion :

$$\frac{dU_{em}}{dt} = -P_{\text{ray}} - P_{\text{cédée}}$$

La variation temporelle de l'énergie du champ électromagnétique est due aux transferts par rayonnement à travers Σ et à la puissance cédée à la matière dans $\mathcal{V}$.

Remarque :

Cette leçon présente une approche numérique et une approche documentaire qui seront traitées en annexe

• **MØ**: $\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \underbrace{\iiint_V \text{div } \vec{B} \cdot d\tau = 0}_{\forall V}$

Green $\Rightarrow \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \forall \Sigma \text{ fermé.}$

On 3 interprétations:

- * $\vec{B}$ a flux conservatif.
- * les lignes de ch de $\vec{B}$ sont fermées.
- * il n'existe pas de monopôle magnétique.

MF: $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \iint \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \underbrace{\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}}_{= \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}}$

Stokes $\Rightarrow \underbrace{\oint_E \vec{E} \cdot d\vec{r}}_{\text{f.e.m. induit.}} = \frac{-d\Phi}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt}}$
Loi de Faraday (phénomène d'induction).