
Support de Cours : : Ondes électromagnétiques dans le vide

2eme Année MP/T/PC *loin de sources.*

Proposé par : Prof. Neil JOMAA

Introduction :

Tous les systèmes actuels de télécommunication et de contrôle à distance sont basés sur la propagation de l'énergie électromagnétique d'un émetteur vers un récepteur.

Le but de cette leçon est d'interpréter, ce phénomène du modèle de l'onde électromagnétique plane.

I/ Onde plane

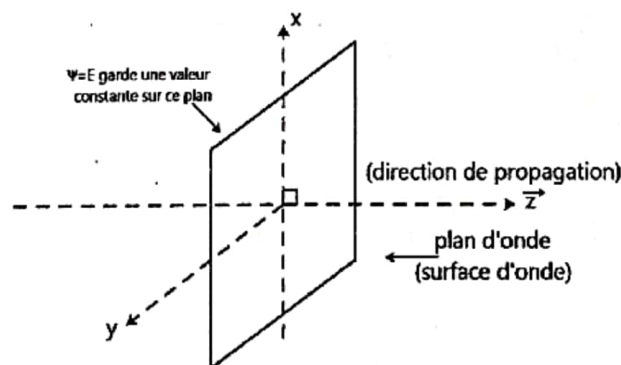
1) Définition :

Une onde est dite plane si sa fonction d'onde Ψ (E ou B) garde à, t fixé, une valeur constante sur un plan $\perp$ à une certaine direction qui constitue sa direction de propagation.

Exemple : $\Psi = E(z, t)$

décrit une onde plane. En effet : $\Psi = cte$

à t fixé $\Leftrightarrow z = cte$: c'est l'équation d'un plan $\perp$ à $\vec{z}$



2) Résolution de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle

✓ Dans le chapitre de Maxwell, on a montré que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ obéissent (dans le vide, loin du sources) à l'équation de d'Alembert : $\square \Psi = 0$

où $\Psi \in \{E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z\}$

- unidimensionnelle $\Leftrightarrow \Psi = \text{fonction (seule variable cartésienne)}$

par exemple : $\Psi = \text{fct}(z, t)$

donc Ψ décrit une onde plane qui se propage suivant $\vec{z}$.

$$0 = \square \Psi(z, t) = \Delta \Psi(z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$
$$= \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial t^2}$$

But : Résolution de cette équation aux dérivées partielles.

Posons : $\begin{cases} u = z - ct \\ v = z + ct \end{cases} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = \frac{u+v}{2} \\ t = \frac{1}{2c}(v-u) \end{cases}$$

changement de variable spatio-temporelle.

$$\Psi = f(z, t) \Rightarrow d\Psi(z, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Psi}{\partial t} dt$$
$$= \frac{\partial \Psi}{\partial z} \left(\frac{du + dv}{2} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \left(\frac{dv - du}{2c} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) . du + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) . dv$$

$$\Psi = f(u, v) \Rightarrow d\Psi(u, v) = \frac{\partial \Psi}{\partial u} . du + \frac{\partial \Psi}{\partial v} . dv$$

$d\Psi(u, v) = d\Psi(z, t)$, donc par identification :

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial u} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \end{cases}$$

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) . \Psi = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) . \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi$$

$$\Rightarrow 0 = 2 \frac{\partial}{\partial v} \left(2 \frac{\partial}{\partial u} \right) . \Psi$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial u} = \text{cte}(v) \rightarrow \Psi_1(u) (\text{notation})$$

W₁ primitive de $\frac{\partial \Psi}{\partial u}$ $\neq v$.

$$\Rightarrow \Psi = \Psi^+(u) + cte(v)$$

où $\Psi^+(u)$ est une primitive de $\Psi_1(u)$

Notation : $cte(v) = \Psi^-(v)$

conclusion : $\Psi = \Psi^+(u) + \Psi^-(v)$

$\Rightarrow \boxed{\Psi = \Psi^+(z - ct) + \Psi^-(z + ct)}$: solution de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle.

3) Interprétation physique de la solution :

3-1) Onde plane progressive (OPP) :

$$\checkmark \Psi^+(z - ct)$$

Tout d'abord : $\Psi^+ = fct(z, t) \Rightarrow$ O.P.P selon la direction $\vec{z}$.

Déterminons son sens de prop :

Considérons un plan d'onde où $\Psi^+ = \alpha = cte$ à t donné.

- ce plan se trouve en $\begin{cases} z = z_1 \text{ à } t = t_1 \\ z = z_2 \text{ à } t = t_2 > t_1 \end{cases}$

$$\Psi^+(z_1, t_1) = \alpha = \Psi^+(z_2, t_2)$$

$$\Rightarrow z_1 - ct_1 = \alpha = z_2 - ct_2$$

$$\Rightarrow z_2 - z_1 = \underbrace{c(t_2 - t_1)}_{>0}$$

$$\Rightarrow z_2 > z_1$$

$$\text{et en plus : vitesse} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = c$$

Conclusion : Ψ^+ décrit une O.P.P se propageant dans le vide, loin de sources avec la célérité (c) dans le sens $(+\vec{u}_z)$ (sens de z croissantes).

$\checkmark \Psi^-(z + ct)$: avec un même raisonnement, on peut montrer que Ψ^- décrit une O.P.P se propageant suivant $(-\vec{u}_z)$.

Remarque :

$\checkmark$ La propagation de l'onde résulte du couplage entre le temps et l'espace.

$\checkmark$ Les fonctions d'ondes $\Psi^+(z - ct)$, $\Psi^+(ct - z)$; $\Psi^+(t - \frac{z}{c})$; $\Psi^+(\frac{z}{c} - t)$ décrivent toutes la même onde plane progressive suivant $+\vec{u}_z$

$\checkmark \Psi^-(z + ct)$ ou $\Psi^-(\frac{z}{c} + t)$ représentant la même O.P.P suivant $(-\vec{u}_z)$.

$\checkmark$ La fonction d'onde $\psi = A(z) \cdot \Psi^\mp(z \pm ct)$ représente aussi une O.P.P, mais dans un milieu non conservatif.

✓ Si le milieu est illimité, $\Psi = \Psi^+$ ou $\Psi = \Psi^-$ car l'onde ne peut choisir qu'un seul sens de prop.

3-2) Onde stationnaire :

Une onde est dite stationnaire, si son énergie ne se propage pas, elle est décrite par une fonction d'onde de la forme $\Psi(M, t) = A(M) \cdot g(t)$

(découplage entre le temps et l'espace).

Application :

Considérons 2 ondes décrites par les champs électriques :

$$\vec{E}_1 = E_m \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{u}_z$$

$$\vec{E}_2 = E_m \cdot \cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right) \vec{u}_z$$

où $E_m = \text{cte} > 0$

1) direction de propagation ?

2) Sens de propagation ?

3) déterminer l'onde résultante de $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$, commenter.

1) $(\vec{u}_x)$, car $\left. \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} \right\} \text{ fct}(x, t)$

2) Sens de propagation $\vec{E}_1 // (+\vec{u}_x)$, $\vec{E}_2 // (-\vec{u}_x)$

3) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2E_m \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) \vec{u}_z$

→ découplage entre temps et espace.

→ onde stationnaire.

II/ Onde plane progressive Monochromatique ou Harmonique (O.P.P.M ou O.P.P.H)

1) Définition :

L'O.P.P.M est une onde décrite par une fonction d'onde de la forme.

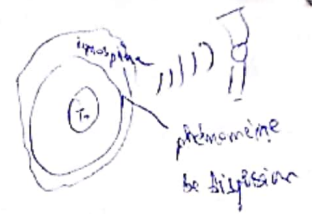
$$\Psi(M, t) = \underbrace{A(M)}_{\text{amplitude}} \cdot \cos \underbrace{(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)}_{\varphi(M, t): \text{phase instantannée}}$$

φ_0 : phase initiale ; $\vec{r}$: vecteur position

$\vec{k}$: est appelé vecteur d'onde qui est suivant la direction de propagation $\vec{u}(\vec{k} = k \cdot \vec{u})$

Périodicité d'une O.P.P.M :

Temporelle	Spatiale
T : période	λ : longueur d'onde
$\omega = \frac{2\pi}{T}$: pulsation	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$: norme du vecteur d'onde
$f = \frac{1}{T}$: fréquence	$\sigma = \frac{1}{\lambda}$: nombre d'onde



prisme dispersif :
l'air non dispersif

✓ La relation $k = fct(\omega)$ est appelée relation de dispersion

si $k = fct(\omega)$ est	linéaire	non linéaire
le milieu est	Non dispersif exemple : vide loin des sources	Dispersif exemple : plasma

2) Notation complexe :

Soit la fonction d'onde $\underline{\Psi}$ en notation complexe associée à une onde plane monochromatique.

$$\underline{\Psi} = \underbrace{\underline{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}}_{f: \text{notation}} \quad \text{avec } \underline{A} = \text{cte.} \quad (\underline{A} = \underline{A} e^{i\varphi_0})$$

✓ Cherchons $\overrightarrow{\text{grad}} \underline{f}$

$$\begin{cases} \text{on a : } \vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \\ \vec{k} = k_x\vec{u}_x + k_y\vec{u}_y + k_z\vec{u}_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

$$\text{Or } \overrightarrow{\text{grad}} \underline{f} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial \underline{f}}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial \underline{f}}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} \underline{f} = i(k_x \vec{u}_x + k_y \vec{u}_y + k_z \vec{u}_z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} \underline{f} = i \vec{k} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = i \vec{k} \cdot \underline{f}$$

$$\text{Soit } \underline{\Psi} = \underline{A} \cdot \underline{f}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \underline{\Psi} = \overrightarrow{\text{grad}} (\underline{A} \cdot \underline{f}) = \underline{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \underline{f} = \underline{A} i \vec{k} \cdot \underline{f}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \underline{\Psi} = i \vec{k} \cdot \underline{\Psi} \quad (1)$$

$$\checkmark \text{div}(\underline{\Psi}) = \text{div}(\underline{A} \cdot \underline{f}) = \underline{f} \underbrace{\text{div} \underline{A}}_0 + (\overrightarrow{\text{grad}} \underline{f}) \cdot \underline{A} \quad (\text{div} \underline{A} = 0 \quad \text{car} \quad \underline{A} = \text{cte})$$

$$= i \vec{k} \cdot \underline{f} \cdot \underline{A}$$

$$\text{donc } \text{div}(\underline{\Psi}) = i \vec{k} \cdot \underline{\Psi} \quad (2)$$

$$\checkmark \overrightarrow{\text{rot}} \underline{\Psi} = \overrightarrow{\text{rot}} (\underline{f} \cdot \underline{A}) = \underline{f} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \underline{A} + (\overrightarrow{\text{grad}} \underline{f}) \wedge \underline{A}, \text{ or } \overrightarrow{\text{rot}} \underline{A} = \vec{0} \quad \text{car } \underline{A} = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \text{rot} \underline{\underline{\Psi}} = i \underline{\underline{k}} \wedge \underline{\underline{A}} = i \underline{\underline{k}} \wedge \underline{\underline{\Psi}}$$

$$\boxed{\text{rot} \underline{\underline{\Psi}} = i \underline{\underline{k}} \wedge \underline{\underline{\Psi}}} \quad (3)$$

\$ ①, ② et ③ montre que $i \underline{\underline{k}} \leftrightarrow \underline{\underline{\nabla}} \nsubseteq$

Remarque : Si on a : $\underline{\underline{\Psi}} = \underline{\underline{A}} e^{i(\omega t - \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{r}})}$ ($\underline{\underline{A}} = \text{cte}$)

alors $\underline{\underline{\nabla}} \leftrightarrow -i \underline{\underline{k}}$

$$\checkmark \Delta \underline{\underline{\Psi}} = \text{div}(\text{grad} \underline{\underline{\Psi}}) = \nabla^2 \underline{\underline{\Psi}} = (\pm i \underline{\underline{k}})^2 \underline{\underline{\Psi}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \underline{\underline{\Psi}} = -k^2 \underline{\underline{\Psi}}}$$

$$\Delta \underline{\underline{A}} = -k^2 \underline{\underline{A}}$$

$$\checkmark \square \underline{\underline{\Psi}} = \Delta \underline{\underline{\Psi}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\underline{\Psi}}}{\partial t^2} = -k^2 \underline{\underline{\Psi}} - \frac{1}{c^2} (-\omega^2 \underline{\underline{\Psi}})$$

$$\boxed{\square \underline{\underline{\Psi}} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \underline{\underline{\Psi}}}$$

dans le vide, loin des sources : $\square \underline{\underline{\Psi}} = 0$

$\Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{c} \omega$: Relation de dispersion qui est linéaire donc le milieu est non dispersif.

✓ Dans certains milieux : (exp : Métal)

On a : $\underline{\underline{\Psi}} = \underline{\underline{A}} e^{i(\underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{r}} - \omega t)}$ donc : $\underline{\underline{\nabla}} \leftrightarrow i \underline{\underline{k}}$

✓ Éviter la notation complexe dans l'étude énergétique car on calcul des termes quadratiques, (par

$$\text{exemple : } \mu_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} ; \mu_m = \frac{B^2}{2\mu_0} ; \vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} ; P_{J,v} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \cdot E^2)$$

Sauf si, on calcul les valeurs moyennes (voir paragraphe : II-5), on pourra utiliser la notation complexe.

3) Conséquences des équation de Maxwell dans le cas des O.P.P.M :

Considérons une O.P.P.M décrite par :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega t - \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{r}} + \varphi_e) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \cdot \cos(\omega t - \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{r}} + \varphi_b) \end{cases}$$

où $\vec{E}_0, \vec{B}_0 = \text{cte}$: soit $\vec{u} = \frac{\underline{\underline{k}}}{\|\underline{\underline{k}}\|}$: direction de propagation

$$\vec{E} \rightarrow \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_0 e^{i(\omega t - \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{r}})} \quad \text{avec } \underline{\underline{E}}_0 = \underline{\underline{E}}_0 e^{i\varphi_e}$$

$$\vec{B} \rightarrow \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}_0 e^{i(\omega t - \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{r}})} \quad \text{avec } \underline{\underline{B}}_0 = \underline{\underline{B}}_0 e^{i\varphi_b}$$

dans le vide, loin des sources. $\checkmark (MG) : \text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow -i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$

$\Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k} \Rightarrow$ onde transverse électrique (T.E)

$\checkmark (M\Phi) : \text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow -i \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$

$\Rightarrow \vec{B} \perp \vec{k} \Rightarrow$ onde transverse magnétique (T.M)

$\Rightarrow$ Donc l'onde est T.E.M (transverse électromagnétique)

$\checkmark (M.F) : \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -i \vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}} : 1^{\text{ère}} \text{ relation de structure.}$

$\checkmark (M.A) : \text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow -i \vec{k} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} i\omega \vec{E}$

$\boxed{\vec{E} = \frac{-c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B}} : 2^{\text{ème}} \text{ relation de structure} \quad (\text{à ne supprimer})$

Remarque : Ces résultats montrent que $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre direct.

la 1^{ère} relation de structure montre que :

$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{k}\| \cdot \|\vec{E}\|}{\omega} = \frac{\|\vec{E}\|}{c} : \text{car dans le vide loin des sources } k = \frac{\omega}{c}$

4) vitesse de phase (V_φ) et vitesse de groupe (V_g)

Par définition :

$$V_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Explication :

On suit au cours du temps, un point M où la fonction d'onde $\Psi = \Psi(M, t) = cte \forall t$.

On suppose que $M \in$ axe $\vec{u}$ de propagation.

✓ Pour une O.P.P.M, $\Psi(M, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$ ($A = cte$)

donc $\Psi(M, t) = cte \Leftrightarrow \varphi(M, t) = cte \forall t$ où $\varphi(M, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0$

$\Leftrightarrow \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0 = cte \Leftrightarrow \omega \cdot dt - \vec{k} \cdot d\vec{r} = 0$

Or $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{\omega}{k} \vec{u}}$ *car sans bino.*

V_φ : représente la vitesse de la surface d'onde qui est le plan d'onde

Par définition : $V_g = \frac{d\omega}{dk}$

La vitesse de groupe représente la vitesse de l'énergie de l'onde.

Remarque : Selon la théorie de la relativité, la vitesse d'une grandeur physique réelle est toujours $\leq c$ donc :

- ✓ puisque la phase est une grandeur mathématique (abstraite) alors V_φ peut dépasser c .
- ✓ puisque l'énergie est une grandeur réelle, alors on a toujours $V_g \leq c$.

exemple : dans le vide loin des sources : $k = \frac{1}{c}\omega$

$$\text{donc } \begin{cases} V_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \\ V_g = \frac{d\omega}{dk} = c \end{cases} \Rightarrow V_g = V_\varphi = c$$

5) Aspect énergétique des O.P.P.M :

5-1) Calcul énergétique

Déterminer les densités volumiques de l'énergie électrique μ_e . Commenter et en déduire μ_{em} .

$\mu_{\text{em}} = \mu_e + \mu_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$
 $\Delta U_{\text{em}} = \text{traversant } S \text{ pendant } dt$
 $\frac{dU_{\text{em}}}{dt} = P = \text{puissance rayonnée} = \iint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$

$$\mu_{\text{em}} = \mu_e + \mu_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

soit une OPPM se prop dans le vide, loin de sources R :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Relation de structure: } \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \\ \text{Relation de dispersion: } k = \frac{\omega}{c} \end{array} \right\} \|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{k}\|}{\omega} \|\vec{E}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

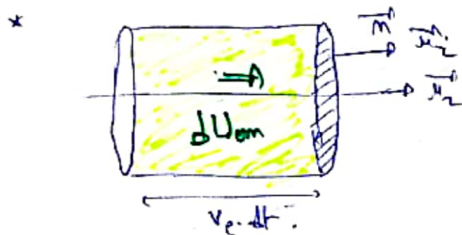
onde T.E $\rightarrow \vec{E} \perp \vec{k}$.

$$\text{Donc } \mu_m = B^2 / \mu_0 = \frac{E^2}{\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \mu_e \Rightarrow \text{Equipartition de l'énergie et } \mu_{\text{em}} = \mu_e = \epsilon_0 E^2$$

Déterminer le vecteur de Poynting.

En déduire la vitesse de propagation l'énergie électromagnétique en déterminant la puissance traversant une section S orthogonale à la direction de propagation pendant dt .

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E \cdot B}{\mu_0} \vec{u}_z \rightarrow \text{direction de propagation} \\ &= \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_z \quad (B = \frac{E}{c}) \rightarrow \vec{\Pi} = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}_z \quad \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \end{aligned}$$



L'énergie ΔU_{em} traversant S pendant dt est contenue dans le cylindre élémentaire de base S et de hauteur $v_e \cdot dt$.

$$\Delta U_{\text{em}} = \mu_{\text{em}} \Delta \tau = \mu_{\text{em}} S v_e dt$$

or la prop est loin de sources $\rightarrow \vec{j} = \vec{0} \Rightarrow P_j = 0 \rightarrow$ la puissance est totalement rayonnée! $\Rightarrow \frac{\Delta U_{\text{em}}}{dt} = P_{\text{ray}}$.

$$\text{or } P_{\text{ray}} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iint_S \epsilon_0 E^2 \vec{u}_z \cdot d\vec{S} = c \epsilon_0 E^2 S$$

Donc $\mu_{em} \cdot S \cdot v_e dt = dU_{em} = dt \cdot P_{ray} = dt \cdot c \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 \cdot S$

on $\mu_{em} = \epsilon_0 E^2$; Alors

$v_e = c$

Remarque 1 : V_g est en fait la vitesse de l'énergie V_e donc $V_g = V_e = c$ *mais on peut*

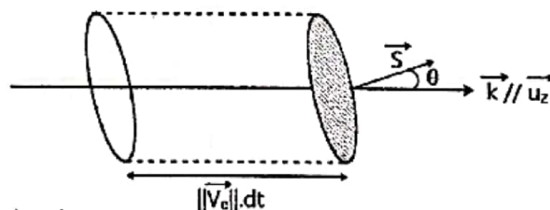
Remarque 2 : On peut vérifier ce résultat par analogie :

Équation de conservation de la charge	Bilan de Poynting local (dans le vide, loin des sources)
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$	$\frac{\partial \mu_{em}}{\partial t} + \text{div } \vec{\pi} = 0 \quad (\vec{j} = \vec{0})$
ρ	μ_{em}
$\vec{j}$	$\vec{\pi}$
$\vec{j} = \rho_m \cdot \vec{v}$	$\vec{\pi} = \mu_{em} \cdot \vec{v}_e$

donc $\vec{v}_e = \frac{\vec{\pi}}{\mu_{em}} = \frac{\epsilon_0 c E^2}{\epsilon_0 E^2} \vec{u}_z = c \cdot \vec{u}_z$ *car on a la charge*

Remarque 3 :

Si $\vec{S}$ fait un angle θ à la direction.



$dU_{em} = \mu_{em} \cdot d\tau = \mu_{em} \cdot \vec{S} \cdot \vec{v}_e \cdot dt = \mu_{em} S v_e \cos \theta dt$

$dU_{em} = P_{ray} \cdot dt = \vec{\pi} \cdot \vec{S} \cdot dt \Rightarrow \vec{\pi} \cdot \vec{S} \cdot dt = \mu_{em} \cdot \vec{S} \cdot \vec{v}_e dt \quad \checkmark S$

$\Rightarrow \vec{v}_e = \frac{\vec{\pi}}{\mu_{em}} = c \cdot \vec{u}_z$

✓ L'intensité I d'une O.P.P.M

Par définition : I est la puissance rayonnée (moyenne) par unité de surface

$\rightarrow I = \frac{\langle dP_{ray} \rangle}{ds} = \langle ||\vec{\pi}|| \rangle$ dans le cas où $\vec{S}$ est selon $\vec{K}$.

5-2) Utilisation de la notation complexe :

Dans le paragraphe II.2) on a dit qu'il est interdit d'utiliser la notation complexe dans le calcul énergétique sauf si on calcul des valeurs moyennes, ceci résulte d'une formule mathématique :

$$\langle \underline{\Psi}_1 \cdot \underline{\Psi}_2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\Psi}_1 \cdot \underline{\Psi}_2^*)$$

où $\underline{\Psi}_1$ et $\underline{\Psi}_2$ 2 fonctions d'ondes tq :

$$\begin{cases} \underline{\Psi}_1 = \Psi_{01} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{01})} \\ \underline{\Psi}_2 = \Psi_{02} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{02})} \end{cases}$$

Exemple : $\langle \vec{\pi} \rangle = \langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$

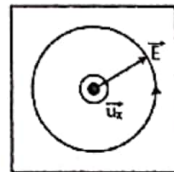
$$\langle \mu_e \rangle = \langle \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \text{Re}(\underline{E} \cdot \underline{E}^*)$$

$$\langle \mu_m \rangle = \langle \frac{B^2}{2\mu_0} \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \text{Re}(\underline{B} \cdot \underline{B}^*)$$

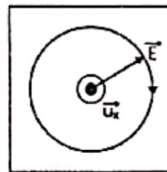
6) Polarisation des O.P.P.M :

6-1) Définition :

La polarisation est la trajectoire de l'extrémité de $\vec{E}$ dans un plan d'onde, au cours du temps, vue par un observateur vers lequel se dirige l'onde.



- Sens trigono
- Polarisation gauche
- ou hélicité positive



- Sens antitrigono
- Polarisation droite
- ou hélicité négative

(dans ce schéma ; on suppose que l'onde se propage selon $(+\vec{u}_x)$)

Remarque : Si l'extrémité de $\vec{E}$ trace des points au hasard (de façon désordonnée) dans un plan d'onde, on dit que l'onde est **non polarisée** (c'est en général le cas d'une source naturelle comme le soleil).

6-2) Détermination des différents états de polarisation :

Considérons par exemple : l'onde décrite par :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{oy} \cos(\omega t - kx + \varphi_{oy}) \\ E_{oz} \cos(\omega t - kx + \varphi_{oz}) \end{pmatrix}$$

$k, E_{oy}, E_{oz}, \varphi_{oy}$ et φ_{oz} sont des constantes avec k, E_{oy}, E_{oz} positives.

- Cette onde se propage // $+\vec{x}$.

1^{er} étape : choisissons le plan d'onde $x = 0$.

$$\Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_{oy} \cos(\omega t + \varphi_{oy}) \\ E_{oz} \cos(\omega t + \varphi_{oz}) \end{cases}$$

2^{ème} étape : Soit $\varphi = \varphi_{oy} - \varphi_{oz}$: Le déphasage entre E_y et E_z donc :

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_{oy} \cos(\omega t + \varphi) \\ E_{oz} \cos(\omega t) \end{cases}$$

si $\varphi = \varphi_{oz} - \varphi_{oy}$ (autre choix)

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_{oy} \cos(\omega t) \\ E_{oz} \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

6-2-a) Polarisation Elliptique :

✓ Cherchons l'équation de l'ellipse décrite par l'extrémité de $\vec{E}$.

$$\begin{aligned} \frac{E_y}{E_{oy}} &= \cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi \\ &= \frac{E_z}{E_{oz}} \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\Delta \text{mc} \quad \left(\frac{E_y}{E_{oy}} - \frac{E_z}{E_{oz}} \cos \varphi \right)^2 = \sin^2(\omega t) \sin^2 \varphi$$

$$\text{or} \quad \left(\frac{E_z}{E_{oz}} \right)^2 \sin^2 \varphi = \cos^2(\omega t) \sin^2 \varphi$$

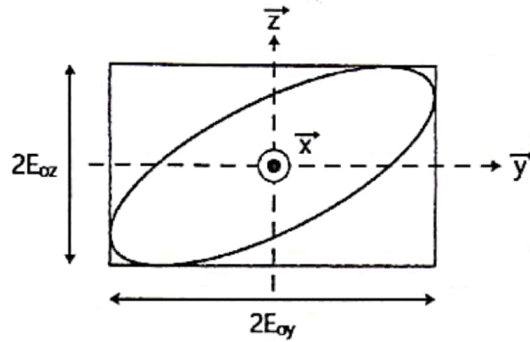
$$\begin{aligned} \text{Somme} \Rightarrow \left(\frac{E_y}{E_{oy}} \right)^2 - 2 \frac{E_y}{E_{oy}} \frac{E_z}{E_{oz}} \cos \varphi + \left(\frac{E_z}{E_{oz}} \right)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) &= 1 \\ &= \sin^2 \varphi (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) \\ &= \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

$$\text{Donc} \quad \boxed{\left(\frac{E_y}{E_{oy}} \right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{oz}} \right)^2 - 2 \frac{E_y}{E_{oy}} \frac{E_z}{E_{oz}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi}$$

c'est l'équation de l'ellipse, si $\varphi \neq n\pi (n \in \mathbb{Z})$ (par exemple si $\varphi = 0$ on a une droite).

Supposons que $E_{oy} > E_{oz}$

- cette ellipse est contenue dans un rectangle de largeur $2E_{oy}$ et de longueur $2E_{oz}$



Règle de détermination du sens de polarisation :

- On calcule : $\beta = \left(\vec{E} \wedge \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \cdot \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$: dans un plan d'onde, à t donné.

Si $\beta > 0 \Rightarrow$ Polarisation gauche ; si $\beta < 0 \Rightarrow$ polarisation droite.

Appliquons cette règle :

On se place dans le plan d'onde $x = 0$:

$$\beta(x=0) = \left[\vec{E}(x=0, t) \wedge \frac{d\vec{E}(x=0, t)}{dt} \right] \cdot \frac{\vec{k} \cdot \vec{u}_x}{K} = \beta_x$$

$$\beta(x=0, t) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ E_{oy} \cos(\omega t + \varphi) & -E_{oy} \omega \sin(\omega t + \varphi) \\ E_{oz} \cos(\omega t) & -E_{oz} \sin(\omega t) \end{vmatrix} \cdot \vec{u}_x$$

On choisit $t=0 \Rightarrow \beta(x=0, t=0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ E_{oy} \cos(\varphi) & -E_{oy} \omega \sin \varphi \\ E_{oz} & 0 \end{vmatrix}$

$$\beta(x=0, t) = +E_{oz} \cdot E_{oy} \cdot \omega \sin \varphi$$

Donc si $\varphi \in]0, \pi[$ ($\sin \varphi > 0$) $\Rightarrow \beta > 0 \Rightarrow$ Polarisation gauche.

et si $\varphi \in]-\pi, 0[$ ($\sin \varphi < 0$)

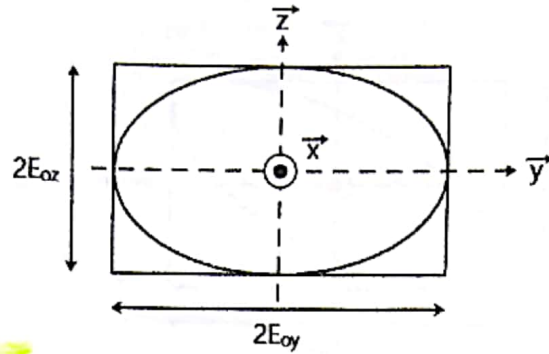
$\Rightarrow \beta < 0 \Rightarrow$ Pol droite

6-2-b) Polarisation circulaire :

✓ Si $\varphi \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ ($\varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$)

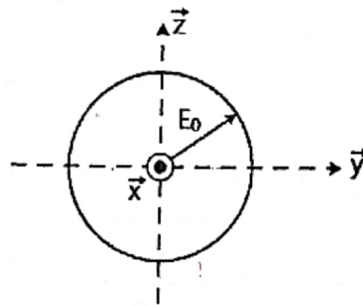
alors l'équation de l'ellipse devient :

$$\frac{E_y^2}{E_{oy}^2} + \frac{E_z^2}{E_{oz}^2} = 1$$



Si en plus : $E_{oy} = E_{oz} = E_0$

alors l'équation devient : $E_y^2 + E_z^2 = E_0^2$: équation d'un cercle de rayon $= E_0$



Si $\varphi = \frac{\pi}{2} \in]0, \pi[$: polarisation circulaire gauche.

Si $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ (ou $-\frac{\pi}{2}$) $\in]\pi, 2\pi[$ (ou $-\pi, 0[$) : polarisation circulaire droite.

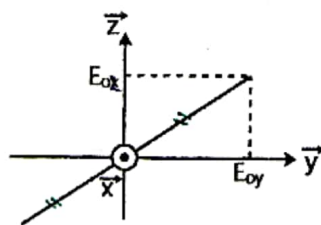
6-2-c) Polarisation rectiligne :

Dans ce cas $\varphi = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, donc l'équation générale devient :

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)^2 + 2(-1)^{n+1} \frac{E_y}{E_{oy}} \cdot \frac{E_z}{E_{oz}} = 0$$

$n = 2p$ (pair)

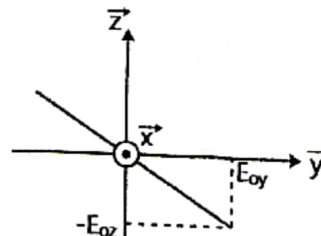
$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}} - \frac{E_z}{E_{oz}}\right)^2 = 0$$



droite de pente > 0

$n = 2p + 1$ (impair)

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}} + \frac{E_z}{E_{oz}}\right)^2 = 0$$



droite de pente < 0

✓ **Conclusion** : sur la nature de Polarisation :

- si $\varphi = fct(t)$ aléatoire $\rightarrow$ onde non polarisée

• si $\varphi = cte = n\pi, n \in \mathbb{Z} \rightarrow$ polarisation rectiligne

| sinon, si $\varphi = cte \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $E_{oy} = E_{oz} = E_0 \rightarrow$ polarisation circulaire.

| sinon $\rightarrow$ polarisation elliptique

Remarque : si on connaît la valeur de φ , on peut déterminer le sens de polarisation en déterminant $\vec{E}(x=0, t=0)$ et $\vec{E}(x=0, t=T/4)$.

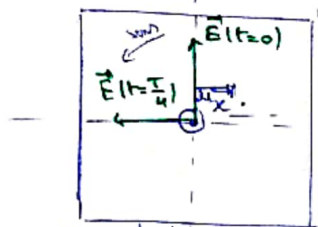
Exemple 1 :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}) \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

E_y et E_z possèdent la même amplitude E_0 et déphasés de $\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ polarisation circulaire.

$\uparrow \vec{z}$.



Plan d'onde " $x=0$ "

• propagation selon $+\vec{x}$

$$\cdot \vec{E}(t=0) = E_0 \vec{u}_z$$

$$\cdot \vec{E}(t=T/4) = -E_0 \vec{u}_y \quad (\omega = \frac{2\pi}{T}; \omega \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2})$$

$\Rightarrow$ Donc le sens de polarisation est gauche.

Exemple 2 :

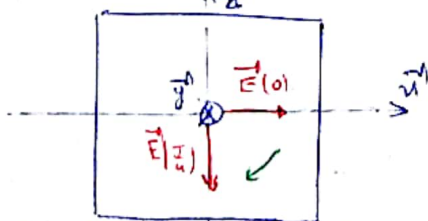
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t + ky - \pi) \\ 0 \\ E_0 \sin(\omega t + ky) \end{pmatrix}$$

corrigée :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t + ky - \pi) \\ 0 \\ E_0 \cos(\omega t + ky - \frac{\pi}{2}) \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t + ky) \\ 0 \\ E_0 \cos(\omega t + ky - \frac{\pi}{2} - (-\pi)) \end{cases}$$

$\rightarrow$ même amplitude et déphasage $= \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ Pol circulaire.



$z=0$

• prop selon $-\vec{y}$.

$$\cdot \vec{E}(t=0) = E_0 \vec{u}_x$$

$$\cdot \vec{E}(t=T/4) = E_0 \cos(\pi) \vec{u}_x = -E_0 \vec{u}_x$$

$\Rightarrow$ Polarisation Droite

si $\vec{E}$ a une seule composante
polarisation rectiligne.

Exemple 3 : $\vec{E} = E_0 \sin(\omega t - kz + \frac{\pi}{3}) \vec{u}_y$

$\Rightarrow$ polarisation rect. // $\vec{u}_y$

6-3) Polarisation des ondes lumineuses (Aspect expérimentale) :

Introduction : La lumière naturelle (exemple du soleil) est non polarisée.

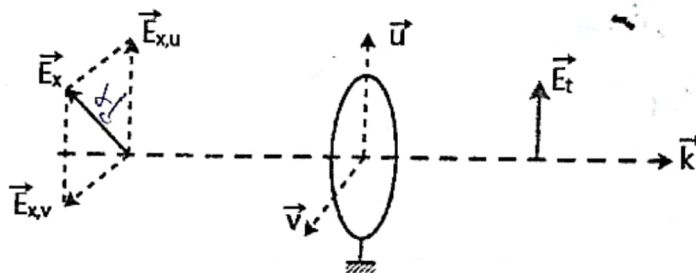
- cette onde peut être décrite par :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi(t)) \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix} \quad \varphi(t) : \text{fonction aléatoire.}$$

Pour polariser cette lumière, on peut utiliser un polariseur rectiligne.

a) Polariseur rectiligne :

C'est un dispositif qui possède une direction notée $\vec{v}$ qui absorbe la composante du champ $\vec{E}_i$ incident suivant $\vec{v} \rightarrow$ donc seule la composante de $\vec{E}_i$ selon $\vec{u} \perp \vec{v}$ traverse ce dispositif ($\vec{u}$ s'appelle axe de polariseurs).



jour de soleil
d'un analyseur (même fond)
et polariseur.

donc $\forall$ la polarisation de $\vec{E}_i$: le champ transmis $\vec{E}_t$ est polarisé rectilignement suivant $\vec{u}$.

✓ **Loi de Malus** : considérons une onde incidente $\vec{E}_i$ de polarisation rectiligne.

Soit I_i : intensité de l'onde incidente.

I_t : intensité de l'onde transmise.

α : angle entre l'axe de polarisation et l'onde incidente.

$\alpha = (\vec{E}_i, \vec{u})$ alors $I_t = I_i \cos^2 \alpha$: Loi de Malus

Démontrer cette loi :

$$\begin{aligned} I_i &= \langle \|\vec{\pi}_i\| \rangle = ? & I_t &= \langle \|\vec{\pi}_t\| \rangle = ? \\ \vec{\pi}_i &= \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_i \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_i}{\omega} \right) & \text{1^{ère} relation de structure.} \\ \Rightarrow \vec{\pi}_i &= \frac{1}{\mu_0 \omega} \left[(\vec{E}_i \cdot \vec{E}_i) \cdot \vec{k} - (\vec{E}_i \cdot \vec{k}) \cdot \vec{E}_i \right] = \frac{1}{\mu_0 \omega} E_i^2 \cdot \vec{k} \\ \Rightarrow \|\vec{\pi}_i\| &= \frac{1}{\mu_0 \omega} E_i^2 \cdot k \quad \text{or} \quad \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c} \quad (\text{vitesse de la lumière}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \|\vec{\pi}_i\| = \frac{E_i^2}{N_0 c} = \epsilon_0 c \cdot E_i^2 \Rightarrow I_i = \langle \|\vec{\pi}_i\| \rangle = \epsilon_0 c \cdot \langle E_i^2 \rangle$$

$$\text{De même : } I_r = \epsilon_0 c \cdot \langle E_r^2 \rangle$$

or $E_r = E_{i,\alpha} = E_i \cos \alpha$: projection de $\vec{E}_i$ sur l'axe du polariseur.

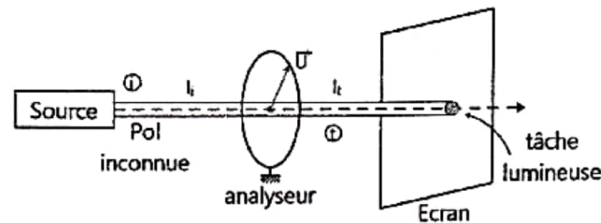
Remarque : Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, $I_t = 0 \rightarrow$ Extinction.

$$\text{Donc } I_r = \epsilon_0 c \cdot \langle (E_i \cos \alpha)^2 \rangle$$

$$= \epsilon_0 c \cdot \langle E_i^2 \rangle \cdot \cos^2 \alpha$$

$$I_r = I_i \cdot \cos^2(\alpha)$$

b) Analyseur :



On effectue un tour complet de $\vec{U}$ et on observe le comportement de la tâche

Si on observe 3 cas

[2 extinctions]

E_i est polarisé rectilignement

[2 min de $I_t \neq 0$]

E_i est polarisé Elliptiquement

tâche invariante [$I_t = cte$]

2 possibilités

Ou

i) pol Circul

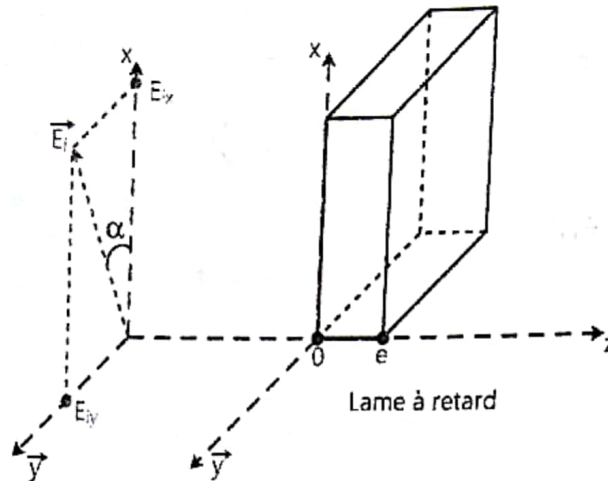
i) non pol

c) lame à retard :

Description et déphasage introduit

* C'est une lame constituée par une matière anisotrope, biréfringente ($\leftrightarrow$ possède 2 indices de réfraction).

* Cette lame possède 2 lignes neutres (supposées suivant (ox) et (oy))



Considérons un ch $\vec{E}_i$ pol Rect

Si $\alpha = 0 \Leftrightarrow \vec{E}_i // \vec{u}_x \rightarrow \vec{E}_t$ pol Rect $// \vec{u}_x$

Si $\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{E}_i // \vec{u}_y \rightarrow \vec{E}_t$ pol Rect $// \vec{u}_y$

Si $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$; $\vec{E}_t$ peut être pol Circulaire ou Elliptique

biréfringente $\rightarrow$ Soit : $\begin{cases} n_x : \text{indice optique} // \vec{u}_x \\ n_y : \text{indice optique} // \vec{u}_y \end{cases}$

Supposons que $n_x < n_y$ or $V = \frac{c}{n}$ donc $V_x > V_y$

(ox) : axe rapide

(oy) : axe lent

Donc la lame introduit un déphasage ($\Delta\varphi$) entre les 2 composantes E_x et E_y :

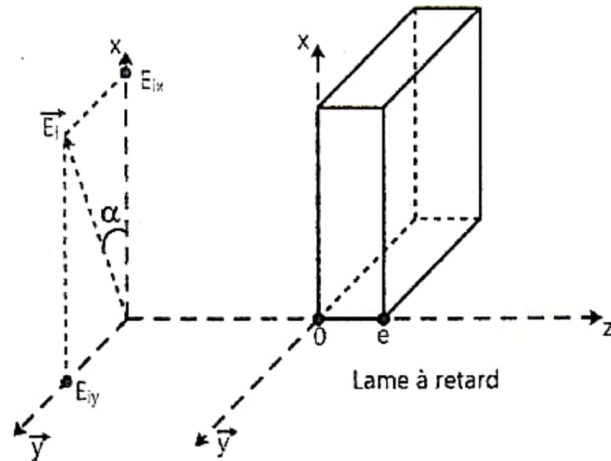
$\rightarrow$ Modifier l'état de polarisation à la transmission

Déterminer $\Delta\varphi$:

• Par la zone $z < 0$: $\vec{E}_i = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k_x z) \\ E_{0y} \cos(\omega t - k_y z) + \varphi_i \\ 0 \end{pmatrix}$ général

• Pour $0 \leq z \leq e$ (lame) $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k_x z) \\ E_{0y} \cos(\omega t - k_y z) + \varphi_i \\ 0 \end{pmatrix}$

ma $k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{\omega}{c} n$ $\rightarrow$ fch(m).



* Pour $z = e$ (juste à la sortie de la lame).

$$\vec{E}_r(z=e) = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot \cos(\omega t - k_x \cdot e) \\ E_{0y} \cdot \cos(\omega t - k_y \cdot e) \\ 0 \end{pmatrix}$$

* Pour $z > e$ (vibe) : $\vec{E}_r(z > e) = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot \cos(\omega t - k_0(z-e) - \underbrace{k_x \cdot e}_{\phi_x}) \\ E_{0y} \cdot \cos(\omega t - k_0(z-e) - \underbrace{k_y \cdot e}_{\phi_y}) \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\Delta\varphi = \phi_y - \phi_x = e(k_y - k_x) = \frac{\omega}{c} (m_y - m_x) \cdot e$

Rq: $(m_y - m_x) \cdot e$ est appelé différence de marche (voir le module de l'optique).

Application en T.P.

en T.P; on utilise en général 2 types de lame à retard :

* Lame demi-onde : $\left[\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda} \right]$

$$\delta = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \Delta\varphi_{\text{Lame}} = \frac{\omega}{c} \cdot \delta = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi$$

$\rightarrow \varphi_{\text{Lame}} = \pi \rightarrow$ Inverse le sens de pol

* Lame quart-d'onde :

$$\delta = \frac{\lambda}{4} \rightarrow \Delta\varphi_{\text{Lame}} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

soit $\delta = (m_y - m_x) \cdot e$

~~pour interférence~~

Donc si $\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow E_{ox} = E_{oy} \Rightarrow \vec{E}_t$. Pol Circu

Si $\alpha \neq \frac{\pi}{4} \Rightarrow E_{ox} \neq E_{oy} \Rightarrow \vec{E}_t$. Pol Elliptique

mais, si $\vec{E}_i$ est pol circuli $\rightarrow \vec{E}_t$ pol Rect

En effet : $\Delta\varphi_t = \Delta\varphi_i + \Delta\varphi_{\text{Lame}} = 0, \text{ ou } \pi$
 $\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) \quad \left(+\frac{\pi}{2}\right)$

