
Support de Cours :
Propagation des ondes électromagnétiques dans le plasma et
dans le métal

2eme Année MP/T/PC

Proposé par : Prof. Neil JOMAA

Introduction :

Plan de la leçon :

I/ Propagation des ondes électromagnétiques dans le plasma

I-1/ Modélisation d'un plasma

I-2/ Conductivité d'un plasma dilué

I-3/ Puissance cédée par le $ch(\vec{E}, \vec{B})$ au plasma, charge volumique

I-4/ Équation de propagation et relation de dispersion dans le plasma

I-5/ Nature des ondes dans le plasma dilué

I-5-a/ Nature de l'onde si $\omega > \omega_p$

I-5-b/ Nature de l'onde si $\omega < \omega_p$

I-5-c/ Application (réflexion sur l'ionosphère)

I-6/ Aspect énergétique :

I-6-a/ Cas $\omega > \omega_p$

I-6-b/ Cas $\omega < \omega_p$

II/ Phénomène de dispersion :

II-1/ Propagation d'un paquet d'onde

II-1-a/ Définition de la transformé de Fourier

II-1-b/ Exemple : Signal porte (ou rectangulaire)
II-1-c/ Transformée de Fourier inverse

II-2/ Définition et propagation d'un paquet d'onde :

II-2-a/ Définition d'un paquet d'onde :

II-2-b/ Expression du champ électrique d'un paquet d'onde :

II-2-c/ Propagation d'un paquet d'onde :

II-3/ Exemple du paquet d'onde rectangulaire :

II-3-a/ Détermination de $E(x, 0)$:

II-3-b/ Interprétation et représentation de la forme de $E(x, 0)$:

III/ Propagation des ondes électromagnétiques dans le métal :

III-1/ Conductivité dynamique du métal

III-2/ Équation de propagation et relation de dispersion dans le métal

III-3/ Cas de l'ARQS dans le métal. Effet de peau :

III-3-a/ Relation de dispersion (ARQS)

III-3-b/ vitesses de phase et de groupe (ARQS)

III-3-c/ Forme du champ électrique et effet de peau

III-3-d/ Vecteur de Poynting dans le métal

III-4/ Cas des hautes fréquences dans le métal

I/ Propagation des ondes électromagnétiques dans le plasma

I-1/ Modélisation d'un plasma

Un plasma est un gaz ionisé, constitué d'ions de masse M et d'électrons de masse $m \ll M$, globalement neutre.

On suppose que chaque ion porte une charge $q_{\text{ion}} = +e > 0$ opposée à celle de l'électron $q_e = -e < 0$.

On peut obtenir un plasma en ionisant un gaz grâce :

- à une augmentation de température ($\geq 2000^\circ\text{C}$). (Exp : étoiles)
- à une décharge électrique (champ électromagnétique intense) (exp : torche plasma)
- à une lumière incidente (dite photo-ionisation) (exp : ionosphère).

On note n_{ion} : densité particulière des ions et n_e celle des électrons $\Rightarrow \rho = (n_{\text{ion}} - n_e)e$

En l'absence d'une onde (sans perturbation) $n_{\text{ion}} = n_e \Rightarrow \underline{\rho = 0}$

$\Rightarrow$ localement neutre.

À cause du passage d'une onde électromagnétique à travers le plasma ; n_{ion} et n_e sont légèrement perturbées, mais, on pourra négliger leur variation.

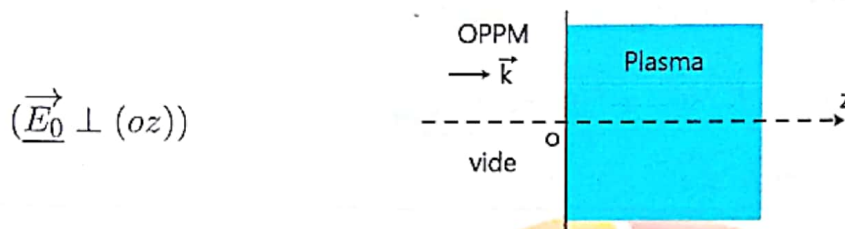
On suppose que le plasma est dilué (peu dense) c.à.d, on négligera les interactions (collision) entre les particules. Par suite il n'existe pas une force de frottement comme dans le métal.

(voir chapitre sur les lois fondamentales de l'électromagnétique)

On suppose que les particules du plasma sont non relativistes (c.à.d leur vitesse $\ll c$).

I-2/ Conductivité d'un plasma dilué :

Nous envisageons la propagation dans le plasma d'une O.P.P.M que nous supposons transverse. Le champ électrique de cette onde est de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\underline{k}z - \omega t)}$ où $\underline{k}$ est à préori complexe.



La RFD pour un électron s'écrit : $m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = \underbrace{-e\vec{E}}_{\vec{F}_e} + \underbrace{(-e)\vec{v}_e \wedge \vec{B}}_{\vec{F}_m}$

(Le poids et le frottement sont négligeables).

$$\text{MF : } \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow i \vec{k} \wedge \vec{E} = -i(-i\omega \vec{B})$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \Rightarrow B^* \sim \frac{k^* E^*}{\omega^*} \sim \frac{E^*}{c} \quad (* : \text{les ordres de grandeurs})$$

Remarque : La relation de dispersion $k = \frac{\omega}{c}$ est valable dans le vide loin de sources, mais on l'a utilisé pour obtenir des ordres de grandeur

$$\text{soit } \alpha = \frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} = \frac{\| -e \cdot \vec{v}_e \wedge \vec{B}^0 \|}{\| -e \vec{E}^0 \|} \sim \frac{v_e^* \cdot B^*}{E^*} \sim \frac{v_e^*}{c}$$

Les particules sont non relativistes $\Rightarrow v_e^* \ll c \Rightarrow F_m \ll F_e$
 Donc RFD devient : $m_e \cdot \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}^0 \Rightarrow m_e(-i\omega\vec{v}_e) = -e\vec{E}^0$

$$\Rightarrow \vec{v}_e = \frac{-ie}{m_e \omega} \cdot \vec{E}^0, \text{ et m } \vec{v}_{ion} = \frac{+ie}{M\omega} \cdot \vec{E}^0$$

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i = n(-e) \cdot \vec{v}_e + n(+e) \vec{v}_{ion} \underset{\text{négl.}}{\approx} n(-e) \cdot \vec{v}_e \quad \text{car } \frac{|v_{ion}|}{|v_e|} \sim \frac{m}{M} \ll 1$$

$$\text{Donc } \vec{j} \simeq n(-e)\vec{v}_e = n \frac{ie^2}{m\omega} \vec{E}$$

Cette relation ressemble à la loi d'Ohm locale, donc on peut définir une conductivité pour le plasma dilué par :

$$\underline{\gamma} = n \frac{ie^2}{m\omega} \in i\mathbb{R}$$

$$\text{On définit la pulsation plasma } \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} \Rightarrow \underline{\gamma} = \frac{i\epsilon_0\omega_p^2}{\omega}$$

I-3/ Puissance cédée par le champ $(\vec{E}, \vec{B})$ au plasma. Densité volumique de charge ρ :

✓ Selon le chapitre sur les lois fondamentales de l'électromagnétique ; la puissance cédée volumique par le champ $(\vec{E}, \vec{B})$ au plasma est : $P_{v, \text{cédée}} = \vec{j} \cdot \vec{E}$.

$$\text{En moyenne : } \langle P_{v, \text{cédée}} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\gamma} \frac{\vec{E}^0 \cdot \vec{E}^{0*}}{|\vec{E}|^2}) \quad z\bar{z} = |z|^2$$

$$|\underline{\gamma}|^2 \cdot \underline{\gamma} \in i\mathbb{R} \Rightarrow \langle P_{v, \text{cédée}} \rangle = 0.$$

Donc le plasma ne reçoit pas une puissance du champ $(\vec{E}, \vec{B})$ et par conséquent, il n'est pas le siège d'un effet Joule. (Conséquence de $\underline{\gamma} \in i\mathbb{R}$)

✓ $\rho = ?$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \text{div} \vec{E} = 0 \xrightarrow{MG} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow -i\omega \rho + \gamma \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \left(-i\omega + \frac{i\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega \epsilon_0} \right) \rho = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega_p^2}{\omega} - \omega \right) \rho = 0$$

$$\omega_p \neq \omega \text{ (voir paragraphe I-4 suivant)} \Rightarrow \boxed{\rho = 0}$$

Ceci est conforme avec notre supposition d'une onde transverse car

$$\rho = 0 \xrightarrow{MG} \text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k}.$$

I-4/ Équation de propagation et relation de dispersion dans le plasma :

$$\checkmark \vec{\Delta} \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E})$$

$$\text{Selon le paragraphe précédent I-3/ ; } \rho = 0 \Rightarrow MG : \text{div} \vec{E} = 0$$

$$MF : \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$$

$$MA : \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{Donc } \vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Remarque : Rappeler que dans le vide, loin de sources ($\vec{j} = \vec{0}, \rho = 0$),

$$\text{on a : } \vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (\text{Équation de d'Alembert}).$$

✓ En utilisant la notation complexe (voir paragraphe II-2/ du chapitre sur les ondes électromagnétiques dans le vide);

l'équation de propagation s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= -k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 (-i\omega \vec{E}) \\ \Rightarrow k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0 \epsilon_0 i\omega = \frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0 i\omega \left(\frac{i\epsilon_0 \omega^2}{\omega} \right) \\ \Rightarrow k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \quad R^o \text{ de dispersion dans le plasma dilué.}\end{aligned}$$

Remarque : Si $\omega = \omega_p \Rightarrow k = 0$ ce qui est inacceptable.

(on a utilisé cette remarque dans le paragraphe I-3/ précédent pour justifier que $\omega \neq \omega_p$).

On définit l'indice complexe $\underline{n}$ du plasma par $\underline{n} = \frac{c}{\omega} \underline{k}$

$$\Rightarrow \underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Remarque : La relation de dispersion $\underline{k} = fct(\omega)$ est non linéaire donc le plasma est un milieu dispersif.

I-5/Nature des ondes dans le plasma dilué :

I-5-a/ Nature de l'onde dans le plasma si $\omega > \omega_p$:

$$\begin{aligned}\omega > \omega_p &\Rightarrow k^2 > 0 \Rightarrow k \in \mathbb{R} \quad \text{rg} \quad k = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \\ \text{on note d'indice } n_0 &= \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \\ k \in \mathbb{R} &\Rightarrow \text{onde est progressive ; en effet } \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \\ &\Rightarrow \vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t + \varphi_0)\end{aligned}$$

Remarque : $n_0 < 1$ contrairement aux milieux transparents en optique (exp : $n_{\text{verre}} > 1$).

Supposons par exp, qu'on s'intéresse à la propagation selon $+\vec{u}_z$.

$$\Rightarrow k \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow k = \frac{\omega}{c} n_0.$$

$$\text{Donc } v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_0} ; \quad (n_0 < 1 \Rightarrow v_\varphi > c)$$

$v_\varphi = \text{fonction}(\omega)$ ce qui confirme que le milieu est dispersif.

$$\checkmark v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \xrightarrow{\text{différentielle}} d k d k = \frac{d \omega d \omega}{c^2} - 0 \quad (\omega_p = \text{cte}).$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{1}{\frac{d k}{d \omega}} = \frac{c^2}{\frac{\omega}{k}} \Rightarrow v_g = \frac{c^2}{v_\phi} \quad \text{et donc} \quad v_g = c \cdot n_0$$

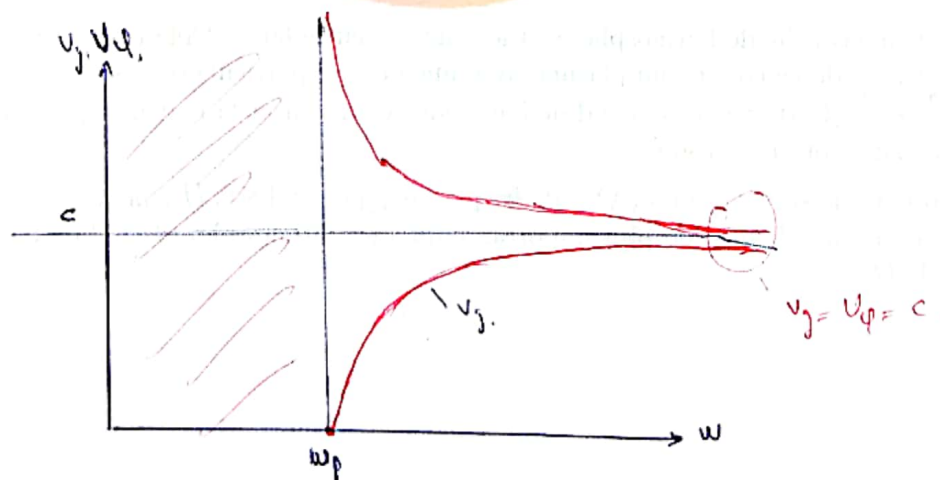
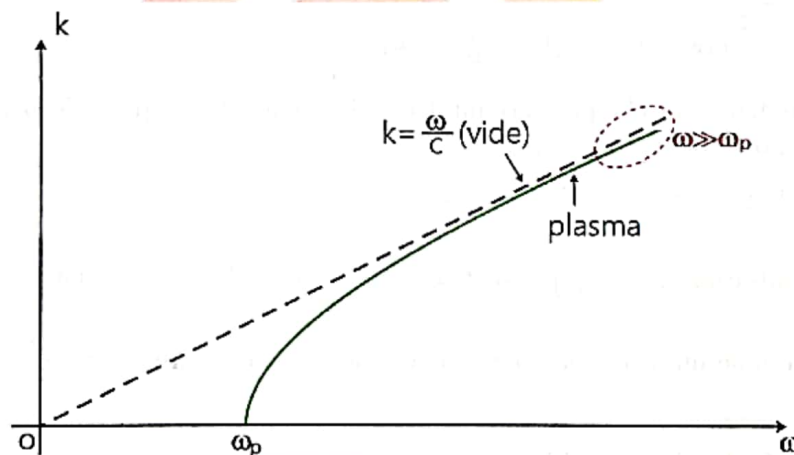
$$\Rightarrow v_g \cdot v_\phi = c^2 \quad \text{et} \quad v_g = c n_0 = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

On vérifie bien la remarque évoquée dans le paragraphe II-4/ du chapitre sur les ondes électromagnétiques dans le vide qui découle de la théorie de la relativité, puisqu'on a bien $v_g \leq c$ et v_ϕ peut dépasser (c).

Remarque : Si $\omega \gg \omega_p$; $v_\phi \simeq v_g \simeq c$ et $k \simeq \frac{\omega}{c} \Rightarrow$ on retrouve le cas du vide en l'absence de (source) charge. Ceci s'explique par le fait que si $\omega \gg \omega_p$; les variations du champ sont trop rapides pour être suivies par les électrons.

L'interaction de l'onde avec le milieu devient négligeable, elle se propage alors comme dans le vide.

✓ Traçons $k = \text{fonction}(\omega)$; on a : $k = \frac{\omega}{c} n_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$



I-5-b/ Nature de l'onde dans le plasma si $\omega < \omega_p$:

$$\underline{k}^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2 \propto \underline{m}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 0 \quad \text{car } \omega < \omega_p$$

$$\text{Posons } m_1 = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \Rightarrow \underline{k} = \pm i m_1 \frac{\omega}{c}$$

$$\Rightarrow \underline{E} = \underline{E}_0 \cdot e^{i(\underline{k}z - \omega t)} = \underline{E}_0 \cdot e^{i(\pm i m_1 \frac{\omega}{c} \cdot z - \omega t)}$$

$$= \underline{E}_0 \cdot e^{\mp m_1 \frac{\omega}{c} \cdot z} \cdot e^{-i\omega t} \Rightarrow \underline{E} = \text{Re}(\underline{E}) = e^{\mp m_1 \frac{\omega}{c} \cdot z} \cdot \cos(\omega t - \varphi_0)$$

Onde stationnaire (découplage)

Si on choisit $e^{+n_1 \frac{\omega}{c} z}$ $\nearrow$ si $z \nearrow \Rightarrow$ Onde amplifiée qui est inacceptable physiquement car le milieu ne fournit pas une énergie à l'onde. On choisit alors $e^{-n_1 \frac{\omega}{c} z}$.

$$\text{Donc } \underline{E} = \underline{E}_0 e^{-n_1 \frac{\omega}{c} z} \cos(\omega t - \varphi_0) \text{ et } \underline{k} = +i n_1 \frac{\omega}{c}$$

Cette onde est stationnaire car elle présente un découplage entre le temps et l'espace. En plus, son amplitude décroît exponentiellement si $z \nearrow$.

Une telle onde est dite évanescence. (stationnaire + amp décroît exponentiellement)

Conclusion :

Seules les ondes de pulsation $\omega > \omega_p$ peuvent se propager dans le plasma. Donc le plasma agit

vis-à-vis des ondes comme un filtre passe-haut de fréquence de coupure $f_c = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$.

I-5-c/ Application (réflexion sur l'ionosphère) :

L'ionosphère est une couche de l'atmosphère située environ entre 60 et 300km d'altitude.

L'ionosphère est considérée comme un plasma, avec une densité particulière des électrons n de l'ordre de $10^{12} m^{-3}$. (Cette valeur dépend de l'altitude et du jour et la nuit puisque la création des électrons se fait par photo-ionisation)

Expliquer pourquoi une station radio (AM) de fréquence $f_{AM} = 180 kHz$ peut être captée à une distance sur terre du lieu d'émission plus importante qu'une station radio (FM) de fréquence $f_{FM} = 99,6 MHz$.

Réponse :

$$f(AM) < f_p < f(FM)$$

ionosphère.

locale.

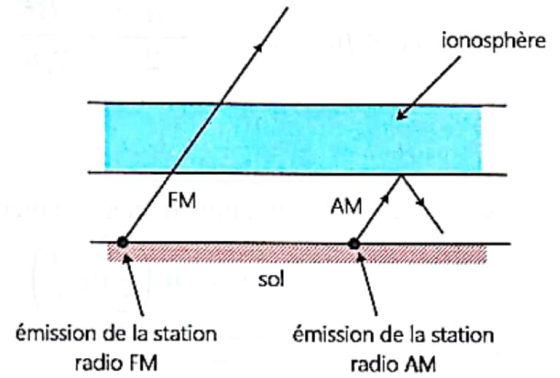
→ d'origine local
globe

La fréquence plasma de l'ionosphère est $f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$

A.N : $f_p \simeq 9 \text{ MHz} \Rightarrow f_{AM} < f_p < f_{FM}$.

Donc l'onde radio FM traverse l'ionosphère car $\omega_{FM} > \omega_p$.

Par contre l'onde radio AM ne traverse pas l'ionosphère car $\omega_{AM} < \omega_p$ et elle donne naissance à une onde réfléchi vers le sol, ce qui permet d'atteindre des zones plus éloignées par rapport au lieu d'émission.



I-6/Aspect énergétique :

I-6-a/ Cas $\omega > \omega_p$:

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} e^{i(\frac{\omega}{c} n_0 z - \omega t)} \quad \text{avec} \quad \underline{\vec{E}_0} = \underline{\vec{E}_0} e^{i\varphi_0}.$$

puisque $\vec{k} = n_0 \frac{\omega}{c} \vec{u}_z$ (voir paragraphe I-5-a/)

$$\vec{E}^1 = \text{Re}(\underline{\vec{E}}) = \underline{\vec{E}_0} \cdot \cos\left(\frac{\omega}{c} n_0 z - \omega t + \varphi_0\right)$$

Selon MF; $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$ (voir paragraphe I-2/). $\underline{\vec{K}} = \underline{\vec{K}^0} \in \mathbb{R}$.

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{K}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \frac{n_0}{c} \cdot \vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}_0} e^{i(\frac{\omega}{c} n_0 z - \omega t + \varphi_0)}$$

Donc $\vec{B}^1 = \text{Re}(\underline{\vec{B}}) = \frac{n_0}{c} \cdot \cos\left(\frac{\omega}{c} n_0 z - \omega t + \varphi_0\right) \cdot (\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}_0})$

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{n_0}{\mu_0 c} \cos^2\left(\frac{\omega}{c} n_0 z - \omega t + \varphi_0\right) \underline{\vec{E}_0} \wedge (\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}_0})$$

$$\underline{\vec{E}_0} \wedge (\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}_0}) = \underline{\vec{E}_0} \cdot \vec{u}_z - (\underline{\vec{E}_0} \cdot \vec{u}_z) \cdot \underline{\vec{E}_0}$$

0 (T.E.)

$$\Rightarrow \vec{\pi} = n_0 \cdot \epsilon_0 \cdot c \cdot \underline{\vec{E}_0}^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\omega}{c} n_0 z - \omega t + \varphi_0\right) \cdot \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} n_0 \epsilon_0 c \underline{\vec{E}_0}^2 \vec{u}_z$$

$$\checkmark \mu_{em} = \mu_c + \mu_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} n_0^2 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} (1 + n_0^2)$$

$$\Rightarrow \langle \mu_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} (1 + n_0^2)$$

✓ La densité volumique d'énergie cinétique des électrons est :

$$u_c = n \left(\frac{1}{2} m v_c^2 \right) \quad \text{or} \quad \frac{\vec{v}_c}{m\omega} = \frac{-ie \vec{E}}{m\omega} \quad (\text{voir I-2/})$$

$$\vec{v}_e = \text{Re}(\vec{v}_e^0) = \frac{e}{m\omega} \cdot \vec{E}_0 \cdot \sin\left(\frac{\omega}{c} n_0 z - \omega t + \varphi_0\right)$$

$$u_c = n \cdot \frac{1}{2} m \cdot \frac{e^2 \cdot E_0^2}{m^2 \cdot \omega^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\omega}{c} n_0 z - \omega t + \varphi_0\right) \quad \omega_p = \sqrt{\frac{m e^2}{m \epsilon_0}}$$

$$\langle u_c \rangle = \frac{1}{4} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \cdot \epsilon_0 \cdot E_0^2$$

Donc l'énergie volumique moyenne totale est :

$$\langle u \rangle = \langle u_{tot} \rangle = \langle \mu_{em} + u_c \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(1 + n_0^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

Or $\frac{1}{n_0} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ (Voir I-5-a/) donc : $\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$

On définit la vitesse de propagation de l'énergie $V_{\text{énergie}}$ par $\langle \vec{\pi} \rangle = \langle u \rangle \cdot V_{\text{énergie}} \vec{u}_z$ (puisque $\vec{\pi}$ est le vecteur densité de courant énergétique)

$$\text{Donc : } V_{\text{énergie}} = \frac{\|\langle \vec{\pi} \rangle\|}{\langle u \rangle} = \frac{\frac{1}{2} n_0 \epsilon_0 c E_0^2 \cdot \frac{2}{\epsilon_0 E_0^2}}{\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}} = n_0 c$$

$$\Rightarrow V_{\text{énergie}} = V_g \quad (\text{voir I-5-a/})$$

On vérifie bien la signification physique de la vitesse de groupe.

$$\left\{ \begin{array}{l} V_\varphi = \frac{c}{n_0} \\ V_g = c \cdot n_0 \\ V_\varphi \cdot V_g = c^2 \end{array} \right.$$

I-6-b/ Cas $\omega < \omega_p$:

On a montré que $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-n_1 \frac{\omega}{c} z} e^{i(\varphi_0 - \omega t)}$ (voir I-5-b/)

$$\vec{B} = \frac{\vec{r} \wedge \vec{E}}{\omega} = i \frac{m}{c} \vec{u}_z \wedge \vec{E}_0 \cdot e^{i \frac{\omega}{c} z} \cdot e^{i(\varphi_0 - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \text{Re}(\vec{E}) = \vec{E}_0 e^{-n_1 \frac{\omega}{c} z} \cos(\omega t - \varphi_0) \\ \vec{B} = \text{Re}(\vec{B}) = \frac{n_1}{c} (\vec{u}_z \wedge \vec{E}_0) e^{-n_1 \frac{\omega}{c} z} \sin(\omega t - \varphi_0) \end{cases}$$

$$\checkmark \vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{n_1}{c} \cos(\omega t - \varphi_0) \sin(\omega t - \varphi_0) e^{-2n_1 \frac{\omega}{c} z} \underbrace{\vec{E}_0 \wedge (\vec{u}_z \wedge \vec{E}_0)}_{E_0^2 \vec{u}_z \text{ voir I-6-a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \vec{\pi} \rangle = \vec{0}} \quad \text{car } \langle \sin(\omega t - \varphi_0) \cos(\omega t - \varphi_0) \rangle = 0$$

Interprétation : l'énergie ne se propage pas en moyenne, donc l'énergie d'une onde de $\omega < \omega_p$ est réfléchi et le plasma se comporte comme un "miroir". C'est le cas des ondes radio (AM) qui se réfléchissent sur l'ionosphère (Voir I-5-c).

$$\checkmark \langle \mu_{em} \rangle = \langle \mu_e + \mu_m \rangle = \langle \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \rangle + \langle \frac{B^2}{2\mu_0} \rangle =$$

$$\boxed{\langle \mu_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \cdot e^{-2n_1 \frac{\omega}{c} z} + \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{n_1^2}{c^2} \cdot E_0^2 \cdot e^{-2n_1 \frac{\omega}{c} z}}$$

Or $n_1^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1$, donc

$$\boxed{\langle \mu_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} e^{-2n_1 \frac{\omega}{c} z}}$$

donc $\langle \mu_{em} \rangle$ décroît exponentiellement si on pénètre dans le plasma ($z \nearrow$).

II/ Phénomène de dispersion :

II-1/ Rappel mathématique : transformée de Fourier :

II-1-a/ Définition de la transformée de Fourier

On note $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f définies de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continues par morceaux et telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \text{ existe.}$$

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f ; la fonction $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$\boxed{\mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi\sigma x} f(\sigma) d\sigma}$$

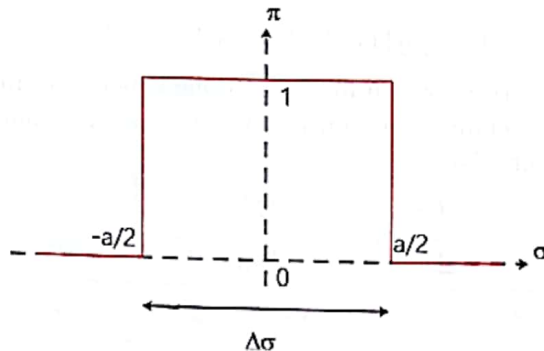
La courbe d'équation $y = |\mathcal{F}(f)(x)|$ est appelée spectre de f .

Cas particuliers :

Si f est paire; $\mathcal{F}(f)(x) \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(f)(x) = 2 \int_0^{+\infty} f(\sigma) \cos(2\pi\sigma x) d\sigma$

Si f est impaire; $\mathcal{F}(f)(x) \in i\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(f)(x) = -2i \int_0^{+\infty} f(\sigma) \sin(2\pi\sigma x) d\sigma$

II-1-b/ Exemple : Signal porte (ou rectangulaire)



$$\pi(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\sigma| \leq a/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad a = \text{cte} \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\begin{aligned} F(\pi)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\sigma x} \pi(\sigma) d\sigma = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-j2\pi\sigma x} d\sigma \\ &= \frac{1}{-j2\pi x} \left(e^{-j2\pi\sigma x} - e^{j2\pi\sigma x} \right) \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{a \sin(\pi x a)}{\pi x} \\ &\rightarrow F(\pi)(x) = a \operatorname{sinc}(\pi x a) \end{aligned}$$

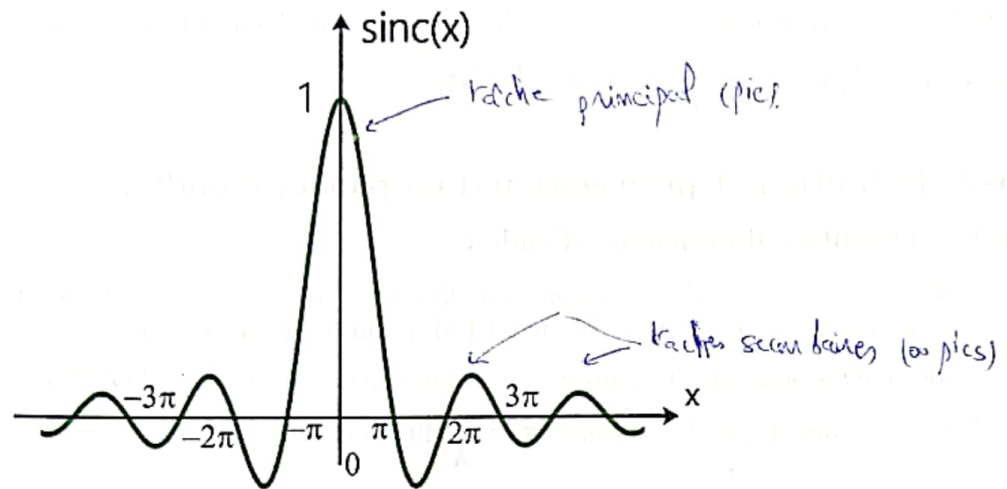
si $x \neq 0$,

où $\operatorname{sinc}(x)$ est la fonction sinus cardinal définie par :

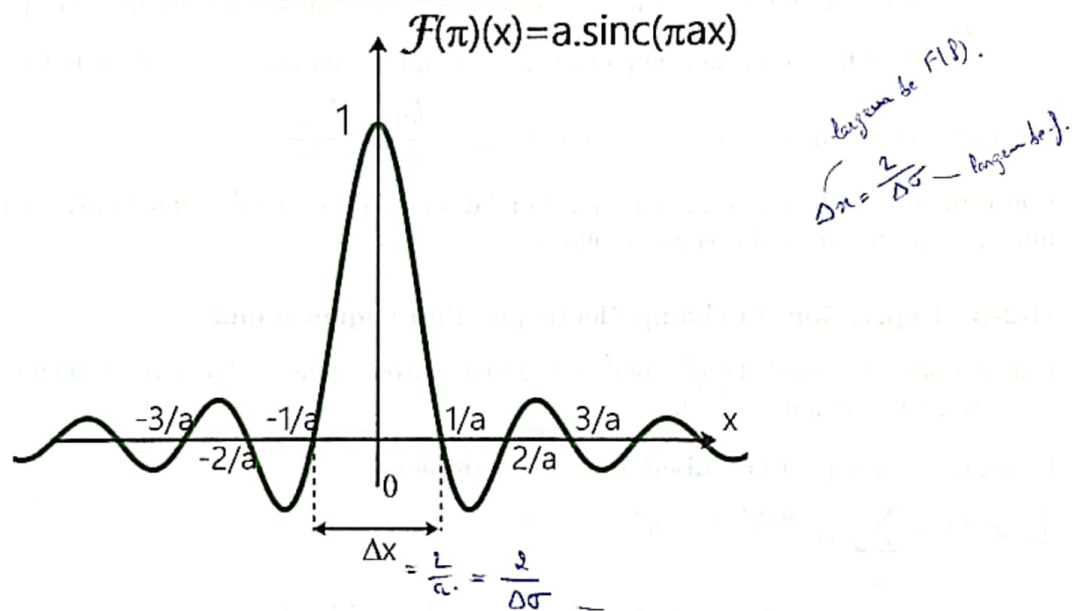
$\operatorname{sinc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sa présentation graphique est :



Donc la représentation graphique de la transformée de Fourier de la fonction porte est :



Remarque :

L'étalement de la fonction porte $\pi(\sigma)$ est $\Delta\sigma = a$.

L'étalement de sa transformée de Fourier est $\Delta x = \frac{2}{a}$

Donc $\Delta\sigma \cdot \Delta x = cte$ et par suite les 2 étalements $\Delta\sigma$ et Δx sont inversement proportionnels.

Ce résultat est général pour toute fonction centrée $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$.

II-1-c/ Transformée de Fourier inverse

Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier inverse (ou conjuguée) de f la fonction $\mathcal{F}^{-1}(f)(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i2\pi\sigma x} dx$

II-2/ Définition et propagation d'un paquet d'onde :

II-2-a/ Définition d'un paquet d'onde :

Une OPPM n'a pas de réalité physique : en effet, une onde réelle a une extension temporelle et une extension spatiale limitées, alors qu'une OPPM n'a ni un début, ni une fin.

Les ondes réelles peuvent être représentées comme une superposition d'OPPM de pulsations ω différentes et donc de nombres d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ différents.

(on rappelle que $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma$).

Cette superposition est appelée "paquet d'onde".

On s'intéresse aux ondes quasi-monochromatiques, c-à-d que les pulsations ω (respectivement, les $\sigma = \frac{k}{2\pi}$) des OPPM formant le paquet d'onde sont voisines d'une pulsation moyenne ω_0 .

(respectivement, un nombre d'onde moyen $\sigma_0 = \frac{k_0}{2\pi} = \frac{k(\omega_0)}{2\pi}$).

(On rappelle que k et ω sont reliés par la relation de dispersion $k = \text{fonction}(\omega)$ caractérisant le milieu de propagation du paquet d'onde).

II-2-b/ Expression du champ électrique d'un paquet d'onde :

Considérons un paquet d'onde (onde quasi-monochromatique) polarisé rectilignement suivant $\vec{u}_z$ et se propageant suivant $(+\vec{u}_x)$.

La superposition peut être discrète et $\vec{E}$ s'écrit alors :

$$\vec{E}(x, t) = \sum_j g_j e^{i(\omega_j t - k_j x)} \vec{u}_z.$$

où g_j est l'amplitude de l'OPPM numéro (j) et $k_j = k(\omega_j)$.

Mais de façon plus générale, la superposition est continue et $\vec{E}$ s'écrit alors

$$\vec{E}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma) e^{i(\omega t - k(\omega) x)} d\sigma \cdot \vec{u}_z.$$

où $g(\sigma)$ est l'amplitude de l'OPPM de nombre d'onde σ .

Puisque l'onde est quasi-monochromatique, alors la distribution de l'amplitude $g(\sigma)$ est très restreinte autour d'une valeur σ_0 .

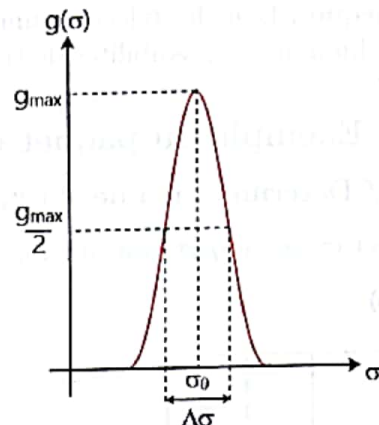
$g(\omega)$: densité spectrale de l'onde.

Soit $\Delta\sigma$ la largeur à mi-hauteur de $g(\sigma)$.

$\Delta\sigma$ représente l'étalement de $g(\sigma)$. On remarque que :

$$E(x, t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma) \cdot e^{-i(\sigma x)} \cdot d\sigma$$

$$= f(g(\sigma))(x)$$



et les étalements $\Delta\sigma$ et Δx de $g(\sigma)$ et $E(x, 0)$ (respectivement) sont inversement proportionnels.

II-2-c/ Propagation d'un paquet d'onde :

L'onde est quasi-monochromatique donc les valeurs de k (respectivement de σ) sont voisines d'une valeur moyenne k_0 (respectivement σ_0).

Effectuons un développement limité de $\omega(k)$ au 1^{er} ordre en $(k - k_0)$:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$$

$$\vec{E}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma) \cdot e^{i(\omega t - kx)} \cdot d\sigma \cdot \vec{u}_z$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma) \cdot e^{i(\omega_0 t + (k - k_0) \frac{d\omega}{dk}|_{k_0} \cdot t - kx + k_0 x - k_0 x)} \cdot d\sigma \cdot \vec{u}_z$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma) \cdot e^{i(k - k_0) \cdot \left[\frac{d\omega}{dk}|_{k_0} \cdot t - x \right]} \cdot d\sigma \cdot e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \cdot \vec{u}_z$$

$$= \underline{A}(x, t) \cdot e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \cdot \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{E}(x, t) = \underline{A}(x, t) e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \vec{u}_z$$

C'est le champ électrique d'une onde plane progressive de pulsation ω_0 dont l'amplitude complexe $\underline{A}(x, t)$ est variable et présente un couplage entre le temps et l'espace, en effet

$\underline{A}(x, t) = \underline{A}(x - \frac{d\omega}{dk} t)$ donc cette amplitude (appelée enveloppe) se déplace à la vitesse

$\frac{d\omega}{dk} = V_g$ qui représente la vitesse de groupe.

On rappelle que dans le plasma (et en général dans les milieux transparents) cette vitesse représente aussi la célérité de l'énergie.

La phase de $\vec{E}(x, t)$ est $\varphi(x, t) = \omega_0 t - k_0 x$ se déplace à la vitesse de phase $V_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$.

Lorsque le milieu est dispersif $k(\omega)$ est non linéaire donc V_φ et V_g sont différentes donc le paquet d'onde se déforme au cours de sa propagation.

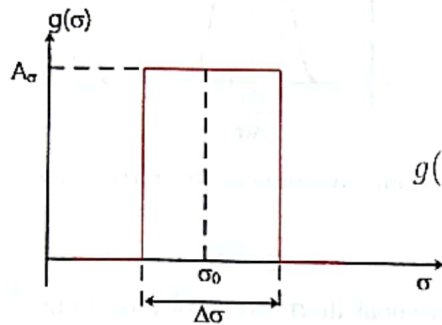
Reconstruit
progressivement
à partir des impulsions
successives.

Remarque : Dans les télécommunications à travers les fibres optiques, ces déformations du paquet d'onde limitent les possibilités de transfert d'information.

II-3/ Exemple du paquet d'onde rectangulaire :

II-3-a/ Détermination de $E(x, 0)$:

Dans cet exemple $g(\sigma)$ est une fonction porte centrée en σ_0 .



$$g(\sigma) = \begin{cases} A_\sigma = \text{cte} > 0 & \text{si } \sigma \in \left[\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}, \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\vec{E}(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma) e^{-ik \cdot x} d\sigma \vec{u}_z = \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} A_\sigma \cdot e^{-ix2\pi\sigma} d\sigma \vec{u}_z$$

$\underline{E}(x, 0)$ est proportionnelle à la transformée de Fourier de la fonction porte donc on prévoit une forme de sinus cardinal pour $\underline{E}(x, 0)$ selon le rappel mathématique II-1-b/.

$$\begin{aligned} \underline{E}(x, t=0) &= \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} A_\sigma e^{-i \left(\frac{k}{\Delta\sigma} x \right) \sigma} d\sigma \quad \left\{ \text{Donc } E(x, 0) = \text{Re}(\underline{E}(x, 0)) \right. \\ &= A_\sigma \cdot \left[\frac{e^{-i2\pi x \frac{\Delta\sigma}{2}} - e^{+i2\pi x \frac{\Delta\sigma}{2}}}{-i2\pi x} \right] \cdot e^{-i2\pi \sigma_0 x} = A_\sigma \cdot \Delta\sigma \cdot \text{sinc}(\pi x \Delta\sigma) \cdot \cos(2\pi \sigma_0 x). \\ &= A_\sigma \cdot \Delta\sigma \cdot \text{sinc}(\pi x \cdot \Delta\sigma) \cdot e^{-i2\pi \sigma_0 x} \end{aligned}$$

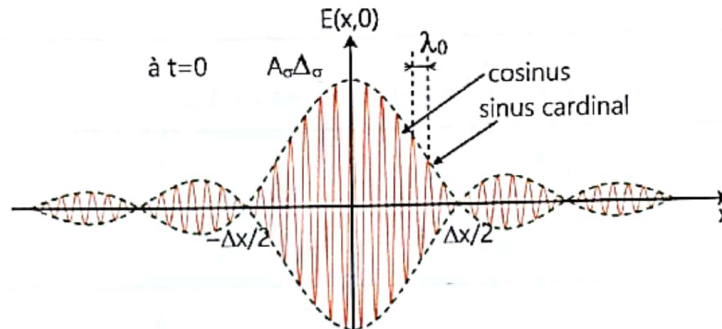
La largeur Δx de *sinc* est $\frac{2}{\Delta\sigma}$ (voir II-1-b/) donc plus le paquet d'onde est étroit ($\Delta\sigma \rightarrow 0$) plus l'étalement spatiale Δx du paquet d'onde est grand.

II-3-b/ Interprétation et représentation de la forme de $E(x, 0)$:

$$E(x, 0) = \underbrace{A(x)}_{\substack{\text{amplitude} \\ \downarrow \\ \text{enveloppe}}} \cdot \underbrace{\cos(2\pi \sigma_0 x)}_{\text{enveloppé}}$$

En effet, si on compare la période du cosinus qui est $\frac{1}{\sigma_0}$ et la largeur $\Delta x = \frac{2}{\Delta \sigma}$ du sinus cardinal :

$\frac{1}{\sigma_0} = \frac{\Delta \sigma}{2\sigma_0} \ll 1$ car l'onde est quasi-monochromatique donc le cosinus est enveloppé par le sinus cardinal comme la montre la figure suivante.



Pour $t > 0$, ce paquet d'onde se propage sans (resp. avec) déformation si le milieu est non dispersif (resp. dispersif).

III/ Propagation des ondes électromagnétiques dans le métal :

III-1/ Conductivité dynamique du métal

Pour décrire le comportement électrique d'un conducteur métallique, nous reprenons le modèle de Drude qui a été introduit au paragraphe «Énergie Électromagnétique» du chapitre : Lois fondamentales de l'électromagnétisme.

Nous allons généraliser en régime variable l'expression de la conductivité.

L'étude est similaire à celle du plasma, la seule différence étant l'introduction de la force de «frottement» $-\frac{m}{\tau} \vec{v}$. Comme dans le cas du plasma, le champ électromagnétique de l'onde est supposé de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\text{RFD : } m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e \vec{E}(M, t) - e \vec{v} \wedge \vec{B}(M, t) \quad (1)$$

Cette équation se simplifie car les électrons ne sont pas relativistes :

- l'action du champ magnétique de l'onde est négligeable devant celle du champ électrique,
- le champ électrique de l'onde apparaît comme uniforme à l'échelle du déplacement des électrons.

Nous cherchons la vitesse de l'électron sous la forme $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}$. L'équation du mouvement (1) devient, en faisant les approximations précédentes :

(Re) les ions sont fixes dans le métal → Drude)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e \vec{E} \Rightarrow m(-i\omega \vec{v}) = -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{-e}{\left(\frac{m}{\tau} - i\omega m\right)} \vec{E} = \frac{-e/m\tau}{1 - i\omega\tau} \vec{E}$$

Le vecteur densité volumique de courant $\vec{j} = -n_0 e \vec{v}$ est égal à :

Donc $\vec{j} = \frac{\left(\frac{n_0 e^2 \tau}{m}\right)}{1 - i\omega\tau} \vec{E}_0$ → γ_0 conductivité statique.

Cette équation permet de définir une conductivité complexe $\underline{\gamma}$ par $\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E}$ soit :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 - i\omega\tau}$$

où $\gamma_0 = \frac{n_0 e^2 \tau}{m}$ est la conductivité en régime statique ou de basse fréquence que nous avons précédemment trouvée.

Remarques :

- 1) Si $\omega\tau \ll 1$, c'est-à-dire si $\omega \ll \frac{1}{\tau} \simeq 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$, $\underline{\gamma} \simeq \gamma_0$. Nous retrouvons le domaine de validité de la loi d'Ohm.
- 2) Une conductivité complexe traduit un déphasage entre le vecteur densité de courant électrique et le champ électrique : quand celui-ci varie trop vite, les électrons n'ont pas le temps de suivre instantanément les variations du champ électrique et réagissent avec un certain retard, qui se traduit par un déphasage entre la vitesse et le champ électrique, donc entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$.
- 3) En très haute fréquence ($\omega\tau \gg 1$), $\underline{\gamma} \simeq i \frac{\gamma_0}{\omega\tau}$ est imaginaire pure. Le métal se comporte comme un plasma. En particulier la puissance dissipée par effet Joule est nulle.

III-2/ Équation de propagation et relation de dispersion dans le métal

Nous travaillerons ici avec les représentations complexes des champs.

En combinant l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, l'équation locale de conservation de la charge $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, et la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E}$, nous obtenons l'équation vérifiée par la densité volumique de charges :

$$\operatorname{div}(\gamma \vec{E}) - i\omega \cdot \underline{p} = 0 \quad \stackrel{NG}{\Rightarrow} \quad \gamma \frac{\underline{p}}{\epsilon_0} - i\omega \underline{p} = 0.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\gamma_0/\epsilon_0}{1 - i\omega\tau} - i\omega \right) \underline{p} = 0 \quad \Rightarrow \underline{p} = 0$$

car le terme entre parenthèses n'est pas nul.

Le même raisonnement du paragraphe I-4/ donne l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$-k^2 \cdot \vec{E} - \frac{1}{c^2} (-\omega^2) \cdot \vec{E} = \mu_0 \gamma (-i\omega) \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow k^2 = \omega^2/c^2 + i\mu_0 \gamma \cdot \omega$$

Cette relation de dispersion donne un vecteur d'onde complexe que nous noterons désormais $\underline{k}$.

Cela signifie qu'il y a absorption d'énergie par le milieu dans lequel l'onde se propage. Dans le cas du métal, il s'agit d'énergie dissipée par effet Joule. Si l'on pose $\underline{k} = k' + ik''$ le champ électrique de l'onde s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\underline{k}z - \omega t)} = \vec{E}_0 \cdot e^{-k''z} \cdot e^{i(k'z - \omega t)}$$

Le partie imaginaire de $\underline{k}$ donne un terme d'atténuation exponentielle due à l'absorption ; la partie réelle de $\underline{k}$ donne le terme de propagation, la vitesse de phase étant :

$$V_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{\operatorname{Re}(k)}$$

III-3/ Cas de l'ARQS dans le métal. Effet de peau :

Dans ce paragraphe, nous supposons que $\omega \ll \frac{1}{\tau}$. Nous sommes donc dans le domaine de validité de la loi d'Ohm.

III-3-a/ Relation de dispersion

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 - i\omega\tau} \approx \gamma_0$$

$$\text{On a déjà : } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\mu_0 \gamma \cdot \omega \approx \frac{\omega^2}{c^2} + i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

Dans le cadre de l'ARQS on peut négliger $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère.

La relation de dispersion est finalement :

$$k^2 = +i\mu_0\epsilon_0\omega, \text{ en effet : } j_D \ll j_c = nA : \nabla \cdot \vec{F} = \rho \int$$

$$= \frac{(1+i)^2}{2}\mu_0\epsilon_0\omega - \frac{(1+i)^2}{8^2}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\epsilon_0\omega}} \rightarrow \vec{\Delta E} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow -k^2 \vec{E} = \mu_0\epsilon_0 (-i\omega \vec{E})$$

III-3-b/ Vitesse de phase, vitesse de groupe

Le vecteur d'onde s'écrit : $\underline{k} = \pm \frac{1+i}{\delta} = k'(\omega) + ik''(\omega)$. Comme nous cherchons une onde se propageant dans la direction de $+\vec{u}_z$, le bon signe est le signe «+» pour avoir $k'(\omega) > 0$.

$$\Rightarrow \underline{k} = \frac{1+i}{\delta}$$

La vitesse de phase est :

$$V_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{\frac{1}{\delta}} = \omega \cdot \delta = \omega \sqrt{\frac{2}{\mu_0\epsilon_0\omega}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\epsilon_0}}$$

et la vitesse de groupe :

$$V_g = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \left(\sqrt{\frac{\mu_0\epsilon_0\omega}{2}} \right)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0\epsilon_0}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\omega}}} = 2\sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\epsilon_0}} = 2V_\phi$$

Le milieu est dispersif. Un paquet d'onde s'y propage en se déformant. La partie imaginaire k'' est strictement positive donc le milieu est absorbant : au fur et à mesure de sa propagation, l'onde cède de l'énergie aux porteurs de charges. qui sont dissipés par effet joule. ($k'' = \frac{1}{\delta} > 0$).

III-3-c/ Forme du champ électrique et effet de peau :

Dans la suite, pour simplifier les écritures, nous considérons une onde polarisée rectilignement selon Ox .

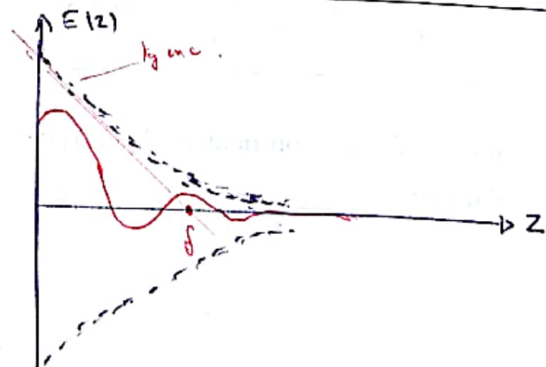
Le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 \cdot e^{-k''z} \cos(k'z - \omega t + \phi_0) \cdot \vec{u}_x = E_0 \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \phi_0\right) \cdot \vec{u}_x$$

Rq : Appare de $E(z)$ à t fixé.

δ : profondeur de pénétration :

épaisseur de peau.



Le champ magnétique peut se calculer grâce à l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} = \frac{k\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{\omega}$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{|k|}{\omega} e^{i\varphi} \vec{u}_z \wedge \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{u}_x \text{ car } \varphi = \arg(k) = \arg\left(\frac{1+j}{\delta}\right) = \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{4})} \vec{u}_y\end{aligned}$$

Les champs réels sont :

$$\vec{E} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \varphi_0\right) \vec{u}_x \quad (1)$$

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_y \quad (2)$$

Les amplitudes des champs et des courants dans le conducteur décroissent en $e^{-\frac{z}{\delta}}$. La longueur caractéristique de cet amortissement, $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ est appelée épaisseur de peau. Elle représente la profondeur de pénétration du champ électromagnétique à l'intérieur du conducteur : à une distance supérieure à quelques fois δ de l'interface entre le conducteur et le milieu extérieur, les champs peuvent être considérés comme nuls. Ce phénomène est appelé effet de peau parce que δ prend des valeurs très faibles pour un bon conducteur aux fréquences moyennes et élevées (voir valeurs ci-dessous).

L'épaisseur de peau diminue quand la fréquence augmente et quand la conductivité augmente.

Pour le cuivre dont la conductivité est $\sigma = 5,96 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$, on calcule :

- à une fréquence de 50Hz, $\delta = 9\text{mm}$;
- à une fréquence de 1MHz, $\delta = 65\mu\text{m}$;
- à une fréquence de 5GHz, $\delta = 0,9\mu\text{m}$;

III-3-d/ Vecteur de Poynting dans le métal

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est égale à :

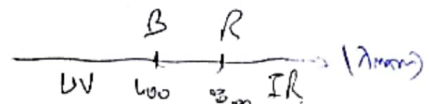
$$\begin{aligned}\langle \vec{\pi} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left(E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)} \vec{u}_x \wedge E_0^* \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-i(\frac{z}{\delta} - \omega t + \frac{\pi}{4})} \vec{u}_y \right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} E_0^2 \frac{1}{\delta\omega} e^{-\frac{2z}{\delta}} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_z = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \delta\omega} e^{-\frac{2z}{\delta}} \vec{u}_z\end{aligned}$$

généralisation (réel).

avec (1) et (2).

$$\lambda_{\text{visible}} \sim 10^{-7} \text{ m} \Rightarrow f_{\text{visible}} \sim \frac{c}{\lambda_{\text{visible}}} = 10^{15} \text{ Hz.}$$

$$f_p \sim 10^6 \text{ Hz} \Rightarrow \text{U.V.}$$



La puissance moyenne transportée par l'onde s'atténue avec une distance caractéristique égale à $\frac{\delta}{2}$.

Remarque : On peut également calculer le vecteur de Poynting à partir des champs réels :

$$\vec{\Pi} = \vec{E}_{\text{réel}} \wedge \frac{\vec{B}_{\text{réel}}}{\mu_0} \text{ et prendre sa valeur moyenne.}$$

III-4/ Cas des hautes fréquences dans le métal

On peut définir la pulsation plasma du métal $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}}$. La relation de dispersion de paragraphe III-2/ s'écrit alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i \gamma_0 \omega = \frac{\omega^2}{c^2} + i \gamma_0 \cdot \frac{\gamma_0}{1 - i \omega \tau} \cdot \omega \quad \text{avec } \gamma_0 = \frac{m_0 e^2 \tau}{m \epsilon_0} \omega_p^2$$

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i \frac{\tau \omega}{c^2} \frac{\omega_p^2}{(1 - i \omega \tau)}$$

La pulsation ω_p est de l'ordre de $2 \cdot 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$ dans un conducteur comme le cuivre où $n_0 \simeq 10^{29} \text{ m}^{-3}$. Elle est très supérieure à $\frac{1}{\tau} \sim 10^{14} \text{ s}^{-1}$.

Dans la limite $\omega \gg \frac{1}{\tau}$, la relation (4) se simplifie en :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i \frac{\tau \omega}{c^2} \cdot \frac{\omega_p^2}{-i \omega \tau} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}$$

C'est la relation de dispersion d'un plasma. Le métal se comporte comme un plasma si $\omega \tau \gg 1$ (donc la force de frottement est négligeable).

Nous retrouvons alors les mêmes conclusions que pour le plasma :

- Si $\omega > \omega_p$, le vecteur d'onde est réel, égal à $k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$. Le milieu est dispersif mais non absorbant. (Non dissipatif)
- Si $\omega < \omega_p$, le vecteur d'onde est imaginaire pur. L'onde ne se propage pas, c'est une onde évanescence dont l'amplitude décroît au fur et à mesure que l'on pénètre dans le milieu. Or ce cas correspond à $\omega \gg \frac{1}{\tau} = 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$ mais inférieur à $\omega_p = 2 \cdot 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$. C'est exactement le cas des fréquences correspondant au domaine du visible. Une onde électromagnétique dans le domaine du visible arrivant sur un métal ne lui transmet pas d'énergie, toute l'énergie de l'onde est réfléchi : le métal se comporte comme un miroir.