
Support de Cours : Réflexion et guidage des ondes électromagnétiques, principe de la cavité

2eme Année MP/T/PC

Proposé par : Prof. Neil JOMAA

Plan de la leçon :

I) Réflexion d'une O.P.P.M sous incidence normale sur un conducteur parfait

I-1/ Champ électromagnétique au voisinage d'un conducteur parfait

I-2/ Existence et détermination de l'onde réfléchi

I-3/ Charge et courant sur la surface Σ

I-4/ Aspect Énergétique

I-5/ Onde résultante dans le vide

I-5-a/ Structure de l'onde résultante

I-5-b/ Aspect Énergétique

I-6/ Pression de radiation

I-6-a/ Aspect ondulatoire

I-6-b/ Aspect corpusculaire

I-7/ Remarque sur le conducteur parfait

II/ Réflexion d'une OPPM sous incidence oblique sur un conducteur parfait

II-1/ Onde résultante

II-2/ Charge, courant et pression de radiation

III/ Cavité résonante unidimensionnelle

III-1/ Description de la cavité unidimensionnelle

III-2/ Expression du champ électrique

III-3/ Interprétation

IV/ Guidage des ondes électromagnétiques

Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier la propagation d'une onde E.M. dans le vide limité par une ou plusieurs surface réfléchissante qui impose des conditions aux limites.

On étudiera ensuite des applications de cette réflexion, notamment le guidage et la cavité.

On s'intéresse principalement à la réflexion sur un conducteur parfait c-à-d un conducteur qui présente une conductivité statique infinie ($\gamma_0 \rightarrow +\infty$) ou une résistivité nulle.

✓ Conséquences de cette définition :

$$\sim \frac{mq^2\tau}{m}$$

1) A l'intérieur du conducteur parfait :

$$\begin{cases} \vec{E}_{int} = \vec{0} \\ \vec{B}_{int} = \vec{0} \end{cases} \text{ à basses fréquences } (\omega \ll 1/\tau \sim 10^{14} \text{ rad.s}^{-1})$$

Explication 1 : $P_{cédée,V} = \gamma_0 \cdot E_{int}^2$; à basse fréquence ($\omega \ll 1/\tau$) selon le chapitre précédent.

Si $\gamma_0 \rightarrow +\infty$, il faut que $E_{int} \rightarrow 0$ pour que $P_{J,V}$ soit finie.

$$\text{or } \frac{\partial \vec{B}_{int}}{\partial t} = -\vec{rot} \vec{E}_{int} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}_{int} = \vec{cte} \text{ par rapport au temps.} \Rightarrow \vec{B}_{int} \text{ statique.}$$

Or en régime variable, les champs ne peuvent pas être statiques donc $\vec{B}_{int} = \vec{0}$

Explication 2 :

Selon le chapitre précédente ; le métal présente l'effet de peau à basses fréquences $\omega \ll 1/\tau \sim 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$

$$\text{avec l'épaisseur de peau est : } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$$

$\gamma_0 \rightarrow +\infty \Rightarrow \delta \rightarrow 0 \Rightarrow$ pas de pénétration de l'onde car δ ^{caractérise} ~~caractéristique~~ la profondeur de pénétration de l'onde dans le métal.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_{int} = \vec{0} \\ \vec{B}_{int} = \vec{0} \end{cases}$$

$$2) (MG) \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \text{div} \vec{E}_{int} = 0$$

$$(M.A) \Rightarrow \vec{j}_c = \frac{1}{\mu_0} (\text{rot} \vec{B}_{int} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_{int}}{\partial t}) = \vec{0}$$

donc dans le conducteur parfait, il n'existe pas de distribution volumique de charge et de courant, mais il peut avoir une distribution surfacique de charge ou de courant.

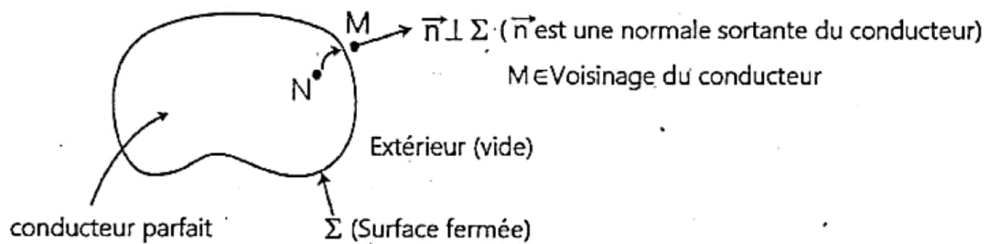
Remarque :

L'étude des ondes électromagnétique dans cette leçon est menée à base fréquence (ARQS)

($\omega \ll 1/\tau \approx 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$), donc on exploitera le fait que $\vec{E}_{int} = \vec{0}$; $\vec{B}_{int} = \vec{0}$; $\rho = 0$ et $\vec{j}_c = \vec{0}$ à l'intérieur d'un conducteur parfait.

I) Réflexion d'une O.P.P.M sous incidence normale sur un conducteur parfait :

1) Champ électromagnétique au voisinage d'un conducteur parfait :



Relation du passage :

$$\sqrt{\underbrace{\vec{E}_{ext}(M)}_{\vec{E}_{vide}(M)} - \underbrace{\vec{E}_{int}(N)}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{n}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{vide}(M, t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}} \text{ (a) } (M \in \text{voisinage du conducteur parfait})$$

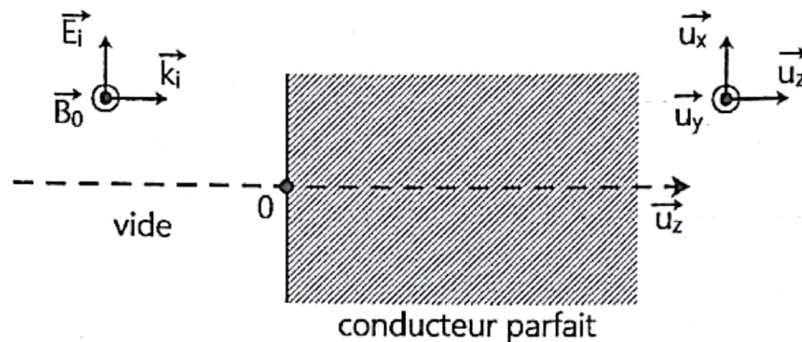
$$\checkmark \underbrace{\vec{B}_{ext}(M)}_{\vec{B}_{vide}(M)} - \underbrace{\vec{B}_{int}(N)}_0 = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_{vide}(M, t) = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}} \quad \textcircled{b} \quad (M \in \text{voisinage du conducteur parfait})$$

$$\textcircled{a} \Rightarrow \vec{E}_{vide}(M) \perp \Sigma ; \quad \textcircled{b} \Rightarrow \vec{B}_{vide}(M) \text{ tangent à } \Sigma.$$

2) Existence et détermination de l'onde réfléchi

Incidence normale $\Leftrightarrow \vec{k}_i$ (de l'onde incidente) est orthogonale à la surface du conducteur.



$\vec{E}_i$ est polarisé rectilignement $// \vec{x}$.

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - k_i z) \vec{u}_x.$$

Existence de l'onde réfléchi : $\vec{E}_r$

Supposons que $\vec{E}_i$ est seul dans le vide.

selon @ : $\vec{E}_{vide} = \vec{E}_i(z=0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-\vec{u}_z)$ or $\vec{E}_i(z=0) = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$.
absurde !

Donc $\exists$ un $\vec{E}_r$ tel que $\vec{E}_{vide} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$

Donc existe un champ $\vec{E}_r$ réfléchi tel que $\vec{E}_{vide} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$.

Détermination de $\vec{E}_r$:

✓ Le système est invariant par translation selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ donc $\vec{E}_r = fct(z, t)$.

✓ $\vec{E}_r$ se propage selon $(-\vec{u}_z)$ [réfléchi]. $\Rightarrow \vec{k}_r = -k_r \vec{u}_z$ ($k_r > 0$)

✓ Soit ω' sa pulsation.

✓ $\vec{E}_r$ se propage dans le vide $\Rightarrow$ il est transverse électrique ($\vec{E}_r \perp \vec{u}_z$) et en plus $k_r = \frac{\omega'}{c}$
(Relation de dispersion).

donc :

$$\vec{E}_r = E_{orx} \cos(\omega't + k_r z - \varphi_x) \vec{u}_x + E_{ory} \cos(\omega't + k_r z - \varphi_y) \vec{u}_y$$

X

$$\textcircled{a} \Rightarrow \vec{E}_{(\text{vide})}(z=0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-\vec{u}_z), \forall t$$

$$\Rightarrow \vec{E}_i(z=0) + \vec{E}_r(z=0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-\vec{u}_z)$$

$$\Rightarrow E_{oi} \cos(\omega t) \vec{u}_x + E_{orx} \cos(\omega't - \varphi_x) \vec{u}_x + E_{ory} \cos(\omega't - \varphi_y) \vec{u}_y = \frac{-\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z; \forall t \quad \textcircled{c}$$

$$\textcircled{c}. \vec{u}_y \Rightarrow E_{ory} \cos(\omega't - \varphi_y) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \boxed{E_{ory} = 0}$$

donc $\vec{E}_r // \vec{u}_x \Rightarrow$ l'onde réfléchi possède la même polarisation que l'onde incidente.

$$\begin{cases} \textcircled{c}. \vec{u}_x & \Rightarrow E_{oi} \cos(\omega t) = -E_{orx} \cos(\omega't - \varphi_x) \quad \forall t \\ E_{ory} = 0 & \Rightarrow E_{oi} \cos(\omega t) = E_{orx} \cos(\omega't - \varphi_x + \pi) \quad \forall t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{orx} = E_{oi} = E_o \\ \omega' = \omega \\ -\varphi_x + \pi = 0 \Rightarrow \varphi_x = \pi \end{cases}$$

donc la réflexion sur le conducteur parfait : conserve l'amplitude, la pulsation, la nature de polarisation, et ajoute un déphasage supplémentaire $= \pi$.

✓ dans le vide, la relation de dispersion :

$$\begin{cases} k_i = \frac{\omega}{c} \\ k_r = \frac{\omega'}{c} = \frac{\omega}{c} \end{cases} \Rightarrow k_i = k_r = k_0.$$

$$\text{CCI : } \vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x$$

$$\vec{E}_r = E_0 \cos(\omega t + k_0 z - \pi) \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{k_0 \vec{u}_z \wedge E_i \vec{u}_x}{\omega} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{-k_0 \vec{u}_z \wedge E_r \vec{u}_x}{\omega} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + k_0 z) \vec{u}_y$$

Remarque : Origine physique de l'onde réfléchi :

✓ $\vec{E}_i$ déplace les électrons de la surface Σ du conducteur de façon ordonnée $\rightarrow$ courant surfacique de densité $\vec{J}_s(t) \rightarrow \vec{B}_r(t) \rightarrow \vec{E}_r(t)$ d'où la création d'une onde réfléchi.

✓ $\vec{J}_s(t)$ est de même pulsation que $\vec{E}_i$ donc $\vec{E}_i$, $\vec{B}_r$ et $\vec{E}_r$ sont de même pulsation.

explication qualitative

3) Charge et courant sur la surface Σ

$$\textcircled{a} \Rightarrow \underbrace{\vec{E}_i(z=0, t)}_{// \vec{u}_z} + \underbrace{\vec{E}_r(z=0, t)}_{// \vec{u}_z} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-\vec{u}_z) \quad \forall r$$

Projection sur $\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\sigma = 0}$

$$\textcircled{b} \Rightarrow \vec{B}_{vibe}(z=0) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge (-\vec{u}_z) \Rightarrow \vec{u}_z \wedge \vec{B}_{vibe}(z=0) = -\mu_0 \vec{u}_z \wedge (\vec{j}_s \wedge \vec{u}_z)$$

$$\vec{u}_z \wedge (\vec{j}_s \wedge \vec{u}_z) = (\vec{u}_z \cdot \vec{u}_z) \vec{j}_s - (\vec{u}_z \cdot \vec{j}_s) \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{j}_s = -\frac{1}{\mu_0} \vec{u}_z \wedge \vec{B}_{vibe}(z=0) = -\frac{1}{\mu_0} \vec{u}_z \wedge (\vec{B}_i(z=0) + \vec{B}_r(z=0))$$

$$\Rightarrow \vec{j}_s = -\frac{1}{\mu_0} \vec{u}_z \wedge \frac{2\epsilon_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_y \Rightarrow \boxed{\vec{j}_s = 2\epsilon_0 c E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x}$$

Remarque : $\vec{j}_s$ est créée par $\vec{E}_i$, selon l'origine physique de l'onde réfléchi donc c'est prévisible que $\vec{j}_s$ soit $// \vec{x}$.

4) Aspect Énergétique :

$$\checkmark \vec{\pi}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - k_0 z) \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \langle \vec{\pi}_i \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_z = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_z$$

$$\checkmark \vec{\pi}_r = \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0} = \frac{-E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + k_0 z) \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \langle \vec{\pi}_r \rangle = \frac{-E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z = -\frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_z$$

Par définition : le coefficient de réflexion en puissance est $R = \frac{\| \langle \vec{\pi}_r \rangle \|}{\| \langle \vec{\pi}_i \rangle \|} \Rightarrow R = 1 \Rightarrow$
Toute la puissance de l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchi, ceci s'explique par le fait que le conducteur est parfait.

Remarque : Si le conducteur était réel, $R < 1$, car une partie de l'énergie sera dissipée à l'intérieur du conducteur par effet Joule.

5) Onde résultante dans le vide :

5-a) Structure de l'onde résultante :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{vide}} &= \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 \left[\cos(\omega t - k_0 z) - \cos(\omega t + k_0 z) \right] \vec{u}_x \\ &= 2E_0 \sin(\omega t) \cdot \sin(k_0 z) \cdot \vec{u}_x \rightarrow \text{onde stationnaire.} \\ \vec{B}_{\text{vide}} &= \frac{E_0}{c} \left[\cos(\omega t - k_0 z) + \cos(\omega t + k_0 z) \right] \vec{u}_y = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cdot \cos(k_0 z) \cdot \vec{u}_y\end{aligned}$$

✓ donc $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en quadrature de phase.

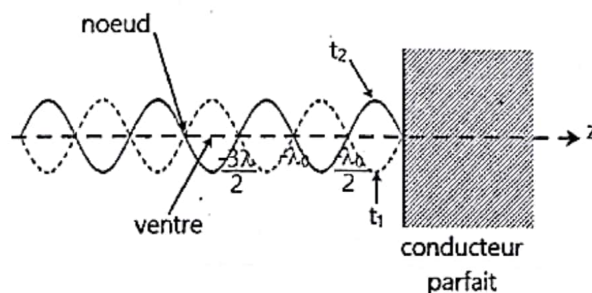
Nœuds de $\vec{E}$: Ce sont les positions telles que $\|\vec{E}\| = 0 \quad \forall t$.

$$\sin(k_0 z) = 0 \Rightarrow \frac{d\pi}{\lambda} \cdot z = m\pi \Rightarrow z_{\text{Nœuds}} = m \frac{\lambda_0}{2} \quad m \in \mathbb{Z}^-$$

Ventres de $\vec{E}$: Ce sont les positions telles que l'amplitude de $\vec{E}$ est maximale.

$$\begin{aligned}\text{Ventre: } |\sin(k_0 z)| &= 1 \Rightarrow \frac{d\pi}{\lambda_0} z = \frac{\pi}{2} + m\pi = (2m+1) \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow z_{\text{ventre}} &= \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda_0}{2} \quad m \in \mathbb{Z}^-\end{aligned}$$

✓ En faisant le même calcul pour $\vec{B}$, on conclue que les nœuds (respectivement les ventres) de $\vec{E}$ coïncident avec les ventres (respectivement les nœuds) de $\vec{B}$.



Représentation de la norme de $\vec{E}$ en fonction de z pour 2 instants t_1 et t_2 .

5-b) Aspect Énergétique

$$\mu_e = \frac{\varepsilon_0 E_{\text{vide}}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} 4E_0^2 \sin^2(\omega t) \cdot \sin^2(k_0 z)$$

$$\mu_m = \frac{B_{\text{vide}}^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{4E_0^2}{c^2} \cos^2(\omega t) \cos^2(k_0 z)$$

$$\text{donc : } \langle \mu_{em} \rangle = \langle \mu_e \rangle + \langle \mu_m \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(k_0 z) + \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(k_0 z)$$

$$\text{Or } \frac{1}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0 \Rightarrow \langle \mu_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2$$

$$\checkmark \langle \mu_{em}^{(i)} \rangle = \langle \frac{\varepsilon_0 E_i^2}{2} \rangle + \langle \frac{B_i^2}{2\mu_0} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} + \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

$$\text{donc } \langle \mu_{em} \rangle = 2 \langle \mu_{em}^{(i)} \rangle$$

Remarque : Si le conducteur était réel $\langle \mu_{em} \rangle = 2 \langle \mu_{em}^{(i)} \rangle$

$$\checkmark \vec{\pi} = \frac{\vec{E}_{\text{vide}} \wedge \vec{B}_{\text{vide}}}{\mu_0} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \cdot \cos(k_0 z) \cdot \sin(\omega t) \sin(k_0 z)$$

$$\Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \vec{0}$$

Remarque : ceci est prévu car l'onde est stationnaire.

6) Pression de radiation :

6-a) Aspect ondulatoire

En arrivant sur Σ , l'onde incidente crée une force électromagnétique qui s'exerce sur un élément dS de Σ tel que $\vec{dF} = \underbrace{(\sigma \cdot dS) \cdot \vec{E}_i(z=0)}_{\text{Force électrique}} + \underbrace{\vec{j}_s \cdot dS \wedge \vec{B}_i(z=0)}_{\text{Force magnétique}}$

$$\text{Or } \sigma = 0 \Rightarrow \vec{dF} = \vec{j}_s \cdot dS \wedge \vec{B}_i(z=0)$$

$$\text{Or } \vec{B}_i(z=0) = \vec{B}_r(z=0) \Rightarrow \vec{B}_i(z=0) = \frac{1}{2} \vec{B}_{\text{vide}}(z=0)$$

$$\boxed{\vec{dF} = (\vec{j}_s \wedge \frac{1}{2} \vec{B}_{\text{vide}}(z=0)) dS}$$

On définit la pression de radiation (pour l'incidence normale) :

$$p = \frac{\|\vec{dF}\|}{dS} \Rightarrow \boxed{p = \|\vec{j}_s \wedge \frac{1}{2} \vec{B}_{\text{vide}}(z=0)\|}$$

Remarque : Le facteur $1/2$ résulte du fait que $\vec{B}_i(z=0) = \frac{1}{2}\vec{B}_{\text{vide}}(z=0)$ et que seule l'onde incidente peut exercer une force sur dS de Σ car l'onde réfléchi est créée par dS et on sait qu'un courant (ou une charge) n'est pas soumis au propre champ qu'il crée.

dans le cas traité :

$$\vec{j}_s = 2\epsilon_0 c E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_{\text{vide}}(z=0) = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

$$P = \|\vec{j}_s \wedge \frac{1}{2} \vec{B}_{\text{vide}}(z=0)\| = \cancel{2\epsilon_0 c} 2\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t)$$

D'un point de vue mécanique, les oscillations de $\vec{dF}$ sont très rapides donc le conducteur est sensible à la valeur moyenne, donc :

$$\langle P \rangle = \epsilon_0 E^2 = 2 \langle \mu_{em}^{(i)} \rangle$$

Or l'intensité de l'onde incidente est $I_i = \langle \|\vec{\pi}_i\| \rangle = c \langle \mu_{em}^{(i)} \rangle \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{2I_i}{c}$

6-b) Aspect corpusculaire

La pression de radiation peut être interprétée autrement.

Le principe de dualité onde-corpuscule de ~~X~~ Broglie indique qu'à toute particule est associée une onde. La particule associée à l'onde électromagnétique est le photon. La situation d'une onde électromagnétique se réfléchissant sur un conducteur parfait peut alors aussi être interprétée comme le rebond de photons sur une paroi.

On peut imaginer de petites balles frappant un mur et se réfléchissant. Le calcul est proposé dans l'application suivante :

Application :

- 1) Donner les relations entre l'énergie E d'un photon, la norme p de sa quantité de mouvement et sa fréquence ν . On fera intervenir la constante de Planck $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ et la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.
- 2) Lors d'une réflexion sur la paroi, de combien varie la quantité de mouvement d'un photon ? Qu'en est-il de celle du conducteur ?
- 3) Soit une portion de surface d'aire S . Quelle énergie moyenne dU provenant de l'onde incidente vient la frapper pendant dt ? En déduire le nombre moyen dN de chocs pendant la durée dt . On note E_0 l'amplitude de l'onde incidente.
- 4) Calculer la variation $d\vec{p}$ de quantité de mouvement de la surface S , pendant dt , due aux chocs des photons.
- 5) En déduire l'expression de la pression de radiation. Conclure.

Correction :

- $E = h\nu$ ($\nu = f = \frac{c}{\lambda}$) ; qnt de mat (Impulsion) : $p = \frac{h}{\lambda}$ (R. de Broglie)

Donc $E = p \cdot c$

$$h \cdot k = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot h = p \quad (\text{ou } h = \frac{h}{2\pi})$$

$$2) \Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$= h \cdot \vec{k}_f - h \cdot \vec{k}_i = -2h \cdot k_0 \cdot \vec{u}_z$$

$$= -2h \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \vec{u}_z = -\frac{2h\omega}{c} \cdot \vec{u}_z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{k}_i = k_0 \cdot \vec{u}_z \\ \vec{k}_r = -k_0 \cdot \vec{u}_z \end{array} \right. \quad \text{ou } k_0 = \frac{\omega}{c}$$

Donc $\Delta \vec{p}_{\text{cond},1} = -\Delta \vec{p} = +\frac{2h\omega}{c} \cdot \vec{u}_z$

un seul photon.

$$3) \Delta U = \langle P_{\text{oy}} \rangle \cdot \Delta t = \langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot \vec{S} \cdot \vec{u}_z \cdot \Delta t = \frac{\langle E_i^2 \rangle}{\rho c} S \Delta t$$

$$= \epsilon_0 c \cdot \frac{E_0^2}{2} \cdot S \cdot \Delta t$$

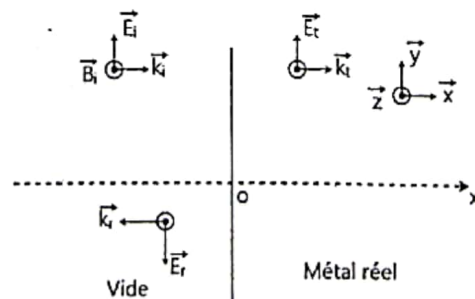
Donc le nbre de chocs et le nbre des photons incidents pendant Δt qui est : $\Delta N = \frac{\Delta U}{h\nu} = \frac{\epsilon_0 c \cdot E_0^2}{2h\nu} \cdot S \cdot \Delta t$

$$4) \Delta \vec{p} = \Delta N \cdot \Delta \vec{p}_{\text{cond},1} = \frac{\epsilon_0 c \cdot E_0^2}{2h\nu} \cdot S \cdot \Delta t \cdot \frac{2h\nu}{c} \cdot \vec{u}_z = \epsilon_0 E_0^2 \cdot S \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_z$$

5) l'insertion de radiat° : $p = \frac{F}{S}$ or $F = \frac{dp}{dt} = \epsilon_0 E_0^2 \cdot S$

$$\Rightarrow P = \epsilon_0 E_0^2 = \langle p_{\text{em}} \rangle$$

7) Remarque sur le conducteur métallique réel :



$$\vec{E}_i = E_{oi} \cdot e^{i(\omega t - k_0 x)} \vec{u}_y \quad \text{avec } k_0 = \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{E}_r = E_{or} \cdot e^{i(\omega t + k_0 x)} \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_t = E_{ot} \cdot e^{i(\omega t - k_t x)} \vec{u}_y$$

$$k_t = \frac{1-i}{\delta} \quad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

Cherchons :

$$r = \frac{E_{or}}{E_{oi}} : \text{coefficient de réflexion en amplitude.}$$

$$t = \frac{E_{ot}}{E_{oi}} : \text{coefficient de transmission en amplitude.}$$

Déterminons les expressions de $\vec{B}_i$, $\vec{B}_r$ et $\vec{B}_t$ et en déduire r et t

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{k_0}{\omega} E_{oi} \cdot e^{i(\omega t - k_0 x)} \cdot \vec{u}_z$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{-E_{or} k_0}{\omega} e^{i(\omega t + k_0 x)} \cdot \vec{u}_z$$

$$\vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega} = \frac{-k_t}{\omega} E_{ot} \cdot e^{i(\omega t - k_t x)} \cdot \vec{u}_z$$

ch $\vec{E}$ selon $y \Rightarrow \vec{E}$ sur $y \Rightarrow \vec{E}$ continu.

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{vibe}}(x=0^-) = \vec{E}_{\text{médup}}(x=0^+) \Rightarrow E_{oi} \cdot e^{i\omega t} + E_{or} \cdot e^{i\omega t} = E_{ot} \cdot e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow 1 + r = t \quad (a_1)$$

Cond réel $\Rightarrow$ profondeur de pénétration $\neq 0 \Rightarrow$ courant vol $\Rightarrow \vec{B}$ continu

$$\Rightarrow \vec{B}_{\text{vibe}}(x=0^-) = \vec{B}_{\text{médup}}(x=0^+) \Rightarrow \frac{k_0}{\omega} (E_{oi} - E_{or}) = \frac{k_t}{\omega} E_{ot}$$

$$\Rightarrow 1 - r = \frac{k_t}{k_0} t \quad (a_2)$$

$$(a_1) + (a_2) \Rightarrow 2 = t \left(1 + \frac{k_t}{k_0} \right)$$

(a1) (a2)

$$\Rightarrow \underline{t} = \frac{2}{1 + \frac{k_t}{k_0}} \quad \text{or} \quad \underline{k_t} = \frac{1-i}{\delta}$$

$$\text{et } \textcircled{a1} \Rightarrow \underline{r} = \underline{t} - 1 = \frac{2 - \left(1 + \frac{1-i}{\delta k_0}\right)}{1 + \frac{1-i}{\delta k_0}}$$

$$\Rightarrow \underline{t} = \frac{2}{1 + \frac{1-i}{\delta k_0}}$$

$$\Rightarrow \underline{r} = \frac{1 - \frac{1-i}{\delta k_0}}{1 + \frac{1-i}{\delta k_0}}$$

II) Réflexion d'une OPPM sous incidence oblique sur un conducteur parfait :

1) Onde résultante :

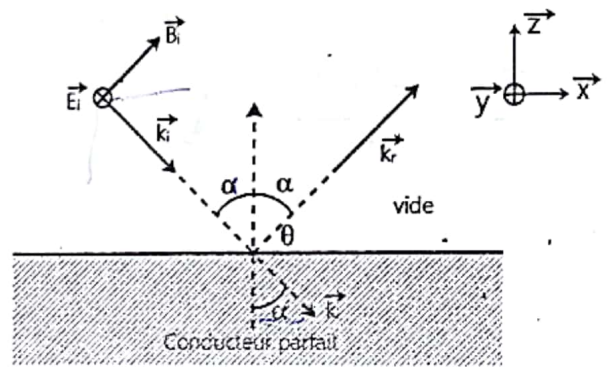
$$\vec{k}_i = k(\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_z)$$

$$\vec{k}_r = k(\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_z)$$

Détermination de $\vec{E}$:

$$\vec{E}_i = E_{oi} \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{or} \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$$



$$\text{On a } \textcircled{a} \Rightarrow \vec{E}_{\text{vide}}(z=0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z \quad \forall x, t$$

$$\text{projection de } \textcircled{a} \text{ sur } \vec{u}_x \Rightarrow \vec{E}_{orx} = \vec{0}$$

L'onde réfléchi se propage dans le vide donc elle est transversale électrique $\Rightarrow \vec{E}_r \perp \vec{k}_r$

$$\Rightarrow \vec{E}_r \cdot \vec{k}_r = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ E_{ory} \\ E_{orz} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k \sin \alpha \\ 0 \\ k \cos \alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow E_{orz} \cdot k \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow E_{orz} = 0 ; \Rightarrow \vec{E}_r // \vec{u}_y$$

Projection de $\textcircled{a}$ sur $\vec{y}$ (en $z=0$),

$$E_{oi} \cdot e^{i(\omega t - k \sin(\alpha x))} + E_{ory} \cdot e^{i(\omega t - k \sin(\alpha x))} = 0 \quad \forall t.$$

$$\Rightarrow E_{ory} = -E_{oi} = E_{oi} \cdot e^{i\pi}$$

Conclusion :

$$\vec{E}_r = -E_{oi} \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \vec{u}_y$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{vide} &= \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_{oi} \cdot e^{i(\omega t - k \sin(\alpha) x)} \cdot (e^{ik \cos(\alpha) z} - e^{-ik \cos(\alpha) z}) \vec{u}_y \\ &= 2E_{oi} \cdot i \sin(k \cos(\alpha) z) \cdot e^{i(\omega t - k \sin(\alpha) x)} \vec{u}_y \\ \Rightarrow \vec{E}_{vide} &= \text{Re}(\vec{E}_{vide}) = -2E_{oi} \cdot \sin(k \cos(\alpha) z) \sin(\omega t - k \sin(\alpha) x) \vec{u}_y \end{aligned}$$

→ Structure hybride (onde progressive selon $\vec{x}$ et stationnaire selon $\vec{z}$)

Remarque :

Dans le cas d'une incidence normale ($\alpha = 0$)

$$\vec{E}_{vide} = -2E_{oi} \sin(kz) \cdot \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

Détermination de $\vec{B}$:

1^{ère} relation de structure : (Applicable si $\vec{E}$ est en notation complexe).

$$\begin{aligned} \vec{B}_i &= \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = E_{oi} \frac{k}{\omega} \cdot (\sin(\alpha) \vec{z} + \cos(\alpha) \vec{x}) \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \\ \vec{B}_r &= \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = -\frac{k}{\omega} \cdot E_{oi} (\sin(\alpha) \vec{z} - \cos(\alpha) \vec{x}) \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \\ \vec{B}_{vide} &= \vec{B}_i + \vec{B}_r = E_{oi} \frac{k}{\omega} \cdot \begin{vmatrix} \cos(\alpha) \cdot [e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} + e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}] \\ 0 \\ \sin(\alpha) \cdot [e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} - e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}] \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = k \sin \alpha x - k \cos \alpha z$$

$$\vec{k}_r \cdot \vec{r} = k \sin \alpha x + k \cos \alpha z$$

$$\vec{B}_{vide} = \frac{E_{oi}}{c} \cdot e^{i(\omega t - k \sin \alpha x)} \begin{vmatrix} \cos \alpha \cdot 2 \cos(k \cos \alpha z) \\ 0 \\ \sin \alpha \cdot 2i \sin(k \cos \alpha z) \end{vmatrix}$$

$$\text{Donc } \vec{B}_{vide} = \text{Re}(\vec{B}_{vide}) = \frac{2E_{oi}}{c} \begin{vmatrix} \cos \alpha \cos(k \cos \alpha z) \cdot \cos(\omega t - k \sin \alpha x) \\ 0 \\ -\sin \alpha \sin(k \cos \alpha z) \cdot \sin(\omega t - k \sin \alpha x) \end{vmatrix}$$

2) Charge, courant et pression de radiation :

$$\text{Selon I-1/; (a)} \Rightarrow \vec{E}_{vide}(z=0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

projection sur $\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\sigma = 0}$ car $\vec{E}_{\text{vide}}$ est selon $\vec{u}_y$

(b) $\Rightarrow \vec{B}_{\text{vide}}(z=0) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$

$\Rightarrow \vec{u}_z \wedge \vec{B}_{\text{vide}}(z=0) = \mu_0 \vec{u}_z \wedge (\vec{j}_s \wedge \vec{u}_z)$

$\Rightarrow \vec{j}_s = \frac{1}{\mu_0} \vec{u}_z \wedge \vec{B}_{\text{vide}}(z=0)$

$$\vec{j}_s = \frac{1}{\mu_0} \vec{u}_z \wedge \left[\frac{\partial E_{oi}}{c} \cos(\alpha) \cos(\omega t - k \sin(\alpha) x) \vec{u}_y \right] = \frac{\partial E_{oi}}{c \mu_0} \cos(\alpha) \cos(\omega t - k \sin(\alpha) x) \vec{u}_y$$

✓ La force exercée par l'onde sur le conducteur : $d\vec{F} = \vec{j}_s ds \wedge \frac{1}{2} \vec{B}_{\text{vide}}(z=0)$

$$d\vec{F} = \frac{\partial E_{oi}^2}{\mu_0 c^2} ds \cos^2(\alpha) \cos^2(\omega t - k \sin(\alpha) x) (\vec{u}_z)$$

Ceci montre que cette forme est pressante.

Donc la moyenne de la pression de radiation est $\langle p \rangle = \langle \frac{\|d\vec{F}\|}{ds} \rangle = \frac{E_{oi}^2}{\mu_0 c^2} \cos^2 \alpha$

$\Rightarrow \boxed{\langle p \rangle = \epsilon_0 E_{oi}^2 \cos^2 \alpha}$

Remarque :

✓ Si l'incidence est normale : $\alpha = 0 \Rightarrow \langle p \rangle = \epsilon_0 E_{oi}^2$

✓ Si $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \langle p \rangle = 0$. (L'onde arrive de façon tangentielle)

III) Cavité résonante unidimensionnelle :

1) Description de la cavité unidimensionnelle

Considérons une cavité vide taillée à l'intérieur d'un bon conducteur, que l'on modélise par un conducteur parfait, entre les abscisses $x = 0$ et $x = a$ (Fig.8).

Un émetteur engendre en continu une onde électromagnétique arrivant en incidence normale sur la face $x = a$. L'onde est alors réfléchie ; elle se propage en sens inverse jusqu'à rencontrer l'autre face $x = 0$. Elle est à nouveau réfléchie et le processus se répète indéfiniment (aucune perte énergétique ne survient pour un métal parfait). On comprend alors que l'onde résultante possède une structure stationnaire, vu la superposition d'ondes progressives de sens de propagation opposés et de même amplitude.

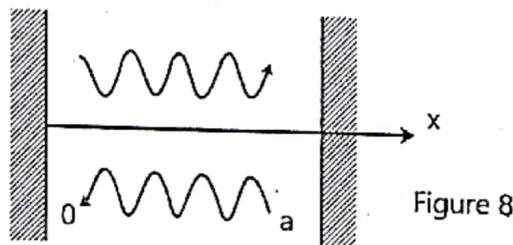


Figure 8

2) Expression du champ électrique

Cherchons le champ électrique $\vec{E}$ sous une forme à variables séparées, caractéristique d'une onde stationnaire :

$$\vec{E}(x, t) = f(x) \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

Dans la cavité vide, le champ électrique satisfait à l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

On injecte la forme de $\vec{E}$ dans cette équation :

$$f''(x) \sin(\omega t) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) \sin(\omega t) = 0$$

$$\Rightarrow f''(x) + k^2 f(x) = 0$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$. La solution est de la forme :

$$f(x) = E_0 \sin(kx + \varphi)$$

où E_0 et φ sont des constantes.

Comme le champ électrique est polarisé selon $\vec{u}_z$, il n'est que tangentiel et les conditions aux limites se traduisent par :

$$E(x=0, a) = \underbrace{E_{\text{conducteur}}(x=0, a)}_0 \Rightarrow f(0) = f(a) = 0.$$

La première condition conduit à $f(0) = E_0 \sin \varphi = 0$. Pour un champ électrique non nul, $E_0 \neq 0$ et donc $\sin \varphi = 0$. On peut retenir $\varphi = 0$. Ensuite, $f(a) = E_0 \sin(ka) = 0$ permet d'écrire :

$$ka = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$$

où n est un entier naturel (non nul). Le champ électrique est alors quantifié sous la forme :

$$\boxed{\vec{E}_n(x, t) = E_0 \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{ct}{a}\right) \vec{u}_z}$$

Car $\omega = kc = n\frac{\pi c}{a}$

On note $\omega_n = n\frac{\pi c}{a}$ dite pulsation propre du mode n .

• Normes : $\|\vec{E}\| = 0 \quad \forall t \Rightarrow \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right) = 0 \Rightarrow \frac{n\pi x}{a} = q\pi$
 de mode m : $\Rightarrow x = \frac{aq}{n}$

$$0 \leq x \leq a$$

$$0 \leq q \leq m$$

$$\Rightarrow \text{nb des modes} = m + 1$$

$p \neq m$

3) Interprétation :

La forme de l'onde à un instant donné est tracé sur la figure 9 dans les cas $p = 1, 2$ et 3 . On note évidemment la similarité avec les modes propres d'une corde fixée aux deux extrémités. Notamment, la longueur d'onde du mode p est :

$$\lambda_p = \frac{2a}{p}$$

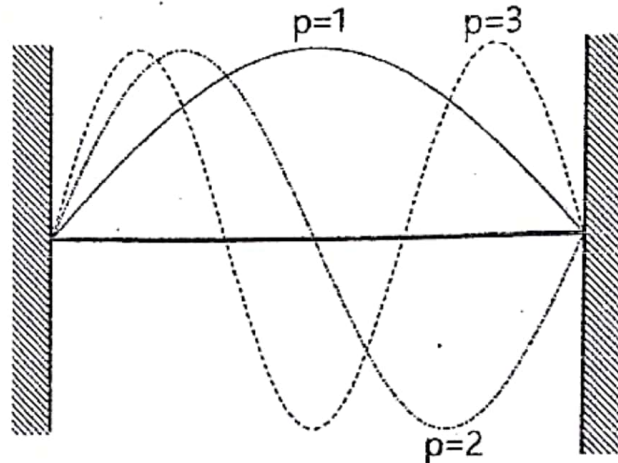


Figure 9

En effet, la distance entre deux nœuds vaut $\frac{\lambda_p}{2}$, et le mode p comporte $p + 1$ nœuds. Ainsi, la fréquence associée est :

$$f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{pc}{2a}$$

La similitude entre la cavité et la corde vibrante n'est pas due au hasard. En effet, dans chacun des cas, l'onde obéit à l'équation de d'Alembert avec les mêmes conditions aux limites (onde nulle aux extrémités du domaine). Ainsi, l'onde prend une forme similaire dans les deux situations.

IV) Guidage des ondes électromagnétiques :

(À la limite de programme), donc il sera traité sous forme d'un problème dans le TD.