
Support de Cours : Rayonnement dipolaire

2eme Année MP/T/PC

Proposé par : Prof. Neil JOMAA

Introduction

Dans les chapitres précédents, on a étudié la structure des ondes électromagnétique, leur propagation dans différents milieux, leur réflexion, guidage et confinement, mais d'où proviennent ces ondes ?

La réponse est l'objectif de cette façon.

On étudiera principalement le modèle du dipole rayonnant.

Ce modèle permet d'expliquer par exemple l'émission des ondes par les antennes, le principe de radar, la diffusion des ondes par les atomes, la couleur bleu du ciel...

I) Modèle du dipôle rayonnant :

* Soit D une distribution de charges électriques :

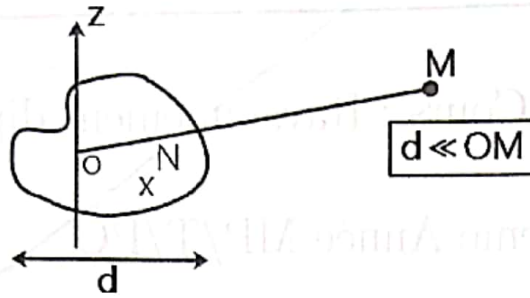
Pour que D soit un dipôle rayonnant électrique, il faut qu'elle vérifie les caractéristiques suivantes :

* D est globalement neutre.

* Les charges électriques sont mobiles de façon que D émet un champ $(\vec{E}(t), \vec{B}(t))$ variables au cours de temps.

* $\rightarrow$ creation de onde rayonnée $\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(t) \\ \vec{B}(t) \end{array} \right.$

* D vérifie l'approximation dipolaire, c-à-d, son extension spatiale (notée d) est négligeable devant la distance de mesure OM avec o un point fixe de D et M un point de l'espace ; où on mesure le champ $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$.



- * Le dipole est caractérisé par son moment dipolaire électrique $\vec{p}$.
- * Si D est une distribution volumique continue : $\vec{p} = \iiint_{N \in D} \vec{ON} \cdot \rho \cdot d\tau(N)$
- * Si D est une distribution discontinue : $\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{ON}_i \cdot q_i$ où $\{q_1, \dots, q_n\}$ sont placées en $\{N_1, \dots, N_n\}$.

Exemple : dipôle formé par $\{-q, +q\}$ placées en $\{N, P\}$ donc

$$\vec{p} = \vec{ON}(-q) + \vec{OP}(+q) = q(\vec{NO} + \vec{OP}) = \boxed{\vec{p} = q\vec{NP}}$$

Selon l'approximation dipolaire $\vec{p} : \|\vec{NP}\| \ll OM$

Remarque :

- Si $\begin{cases} q = \text{cte} \\ \text{et} \\ \vec{NP} = \text{cte} \end{cases} \rightarrow \text{dipole électrostatique (1ère année) ou dipole rigide.}$
- Si $\begin{cases} \vec{NP} = fct(t) \\ \text{ou} \\ q = fct(t) \end{cases} \rightarrow \vec{p} = fct(t) \rightarrow \text{dipôle rayonnant. et si } \vec{p} : \text{fonction sinusoïdal (t)}$

$\Rightarrow$ dipôle oscillant (rayonnant)

Dans la suite du cours on étudiera principalement le dipôle caractérisé par $\vec{P} = p \cdot \vec{u}_z$, en coordonnée sphérique.

II) Approximation dipolaire et Approx. non relativiste :

- Soit d : extension spatiale du dipôle suivant $\vec{z}$
- $r = OM$ où O est un point fixe E dipôle origine de repère.
- λ : longueur d'onde du $ch(\vec{E}, \vec{B})$ créée par le dipole.

$$\lambda \sim 10^{-5} \text{ m.}$$

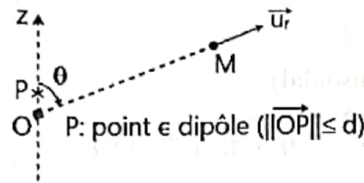
$$\text{donc : } \lambda \sim 100 \text{ nm} = 10^{-7} \text{ m.}$$

$$k = \frac{\omega}{c} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

$$= \frac{\lambda}{2}$$

$$\vec{p}^0, \text{ sinusoïdale}$$

$$\vec{p}^1 = \vec{p}^0 \sin(\omega t + \dots)$$



déterminons la distance PM en fonction de Z, r, θ .

$$PM = [(\overrightarrow{PM})^2]^{1/2} = [(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})^2]^{1/2} = [PO^2 + OM^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}]^{1/2} \quad \left. \vphantom{PM} \right\} \text{appr.}$$

$$= [z^2 + r^2 - 2r \cdot z \cdot \cos \theta]^{1/2} = r \left[1 - 2 \frac{z}{r} \cos \theta + \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Approx dipolaire : $d \ll r = OM \Rightarrow z \ll r$

$\Rightarrow \frac{z}{r} \ll 1 \Rightarrow$ un DL en $\left(\frac{z}{r} \right)$, selon l'expérience, on s'arrête à l'ordre 1 en $\frac{z}{r}$ dans le calcul de

PM et à l'ordre 0 en $\frac{z}{r}$ dans le calcul de $\frac{1}{PM}$ donc

$$PM = r \left[1 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{z}{r} \cdot \cos \theta \right] = r - z \cos \theta.$$

$$\frac{1}{PM} \simeq \frac{1}{r}.$$

déterminons $t' = t - \frac{PM}{c}$.

$$\text{On a } PM \simeq r - z \cos \theta \Rightarrow t' = t - \frac{r}{c} + \frac{z}{c} \cos \theta.$$

En plus on a l'approx non relativiste vérifiée : c-à-d-

$$\boxed{V \ll C} \Rightarrow V.T \ll C.T \Rightarrow \boxed{d \ll \lambda}$$

$$\text{alors } \boxed{t' = t - \frac{r}{c}}$$

Exemple 1 :

Antenne d'axe z de longueur $d = \frac{\lambda}{2}$ (dite antenne demi-onde) parcourut par $i(t)$, dans ce cas

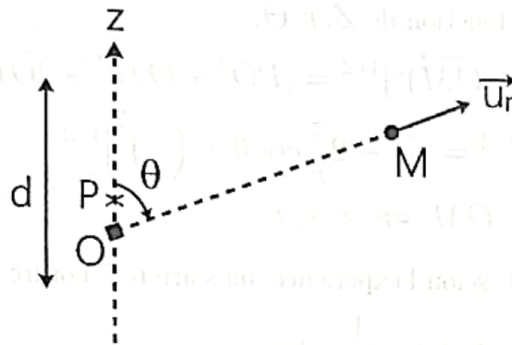
$$\vec{p} = i(t) d \vec{u}$$

$$PM \simeq r - z \cos \theta \quad \text{et} \quad \frac{1}{PM} = \frac{1}{r}$$

$$t' = t - \frac{PM}{c} = t - \frac{r}{c} + \frac{z}{c} \cos \theta \quad (\text{Approx non relativiste n'est pas vérifiée car } d = \frac{\lambda}{2})$$

Exemple 2 :

Atome de centre O soumis à $\vec{E}_{ext}$ (sinusoïdal)
 en O : noyau de charge $+q$
 en P : e^- de charge $-q$ } $\Rightarrow \vec{P} = q \cdot \vec{PO} (q = +e)$



$\vec{E}_{ext} \rightarrow \vec{F}_{ext} = -q \cdot \vec{E}$ qui déplace l' $e^- \Rightarrow \vec{PO} : fct(t) \Rightarrow \vec{P} = fct(t)$

ω : diamètre de l'atome, soit ω . pulsation de $\vec{E}_{ext}$ alors $\vec{PO}$ et $\vec{P}$ possèdent la même pulsation

$\rightarrow$ création d'une onde rayonnée de pulsation ω si $\vec{E}_{ext}$ provenant d'une onde incidente sous l'atome, on parle du phénomène de la diffusion électromagnétique

$$d \simeq A = 10^{-10} m ; r = OM \geq 1 m$$

$$\text{Si } \lambda \in \text{visible} \Rightarrow \lambda \simeq 10^{-7} m$$

$$\Rightarrow d \ll \lambda \ll r \Rightarrow \begin{cases} \text{approx dipolaire} \\ \text{approx non relativiste} \end{cases} \text{ vérifiées.}$$

$$\text{donc } \begin{cases} PM \simeq r - z \cos \theta \\ \frac{1}{PM} \simeq \frac{1}{r} \\ t' = t - \frac{r}{c} \end{cases}$$

Remarque : On a $t' = t - \frac{PM}{c}$, les champ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ s'expriment en fonction de t' :

$$\text{Soit } \Psi = E \text{ ou } B \text{ ou } P \Rightarrow \boxed{\dot{\Psi} = \dot{\Psi}(t')} \quad \boxed{t'}$$

- supposons que l'approx non relativiste est vérifié.

$$\Rightarrow t' = t - \frac{r}{c}$$

$$\text{- alors : } * \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t'} = \dot{\Psi}(t')$$

$$* \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial r} = \frac{-\dot{\Psi}(t')}{c}$$

$$\boxed{\frac{\partial E(t')}{\partial r} = -\frac{1}{c} \dot{E}(t')}$$

sans dim.

III) Expression de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ créée par un dipôle électrique :

On suppose que l'approx non relativiste est vérifiée on donne :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{2 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{P(t')}{r^3} + \frac{\dot{P}(t')}{r^2 c} \right) \\ \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{P(t')}{r^3} + \frac{\dot{P}(t')}{r^2 c} + \frac{\ddot{P}(t')}{rc^2} \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

si $p = qd$ — on revient à l'électrostatique.

$$\vec{E} = \frac{2 \cos \theta P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{\sin \theta P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{\dot{P}(t')}{r^2} + \frac{\ddot{P}(t')}{rc} \right] \vec{u}_\varphi$$

Remarque : En régime statique $\dot{P} = \ddot{P} = 0$

donc :

$$\vec{E}_{\text{stat}} = \frac{2P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{P \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B}_{\text{stat}} = \vec{0}$$

* Supposons que le dipôle est oscillant c-à-d,

$$\vec{P} = P_0 \cos(\omega t) \vec{z} \quad (\text{fonction sinusoïdal})$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{P}} = P_0 e^{i\omega t} \vec{z}$$

$$\text{et donc } \underline{\vec{E}} = \begin{pmatrix} \frac{2P_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{i\omega}{r^2 c} \right) \\ \frac{P_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{i\omega}{r^2 c} - \frac{\omega^2}{rc^2} \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \underline{\vec{B}} = \frac{\mu_0 \sin \theta P_0}{4\pi} \left[\frac{i\omega}{r^2} - \frac{\omega^2}{rc} \right] \vec{u}_\varphi$$

Comparons l'importance des différents λ dans l'expression de $\underline{\vec{E}}$.

Terme	$\frac{P}{r^3}$	$\frac{\dot{P}}{r^2 c}$	$\frac{\ddot{P}}{rc^2}$
Amplitude	$\frac{P_0}{r^3}$	$\frac{\omega P_0}{r^2 c} = \frac{P_0}{r^3} \left(\frac{\omega r}{c} \right)$	$\frac{\omega^2 P_0}{rc^2} = \frac{P_0}{r^3} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2$

1^{er} cas : $1 \gg \frac{\omega r}{c} \Rightarrow$ Le terme dominant est $\frac{P}{r^3}$

$1 \gg \frac{\omega r}{c} \Rightarrow \frac{r}{c} \ll \frac{1}{\omega} \Rightarrow \frac{r}{c} \ll T$ c'est l'ARQS

donc dans l'ARQS $\Rightarrow \vec{E} \simeq \frac{2P(t) \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{P(t) \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

2eme cas : $\frac{\omega r}{c} \simeq 1$: Tous les termes sont équivalents.

3eme cas : $\frac{\omega r}{c} \gg 1 \Rightarrow$ Terme dominant : $\frac{\ddot{P}}{rc^2}$
 $\Rightarrow \left[\vec{E} \simeq \frac{\ddot{P} \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{u}_\theta \right]$

$\frac{\omega r}{c} \gg 1 \Rightarrow \frac{r}{c} \left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right) \gg 1 \Rightarrow \lambda \ll r$: appelé approx de la zone de rayonnement.

En pratique, on travail en général dans cette zone.

$\rightarrow$ Voir paragraphe suivante.

IV) Onde rayonnée à grande distance (zone de rayonnement) :

Exemple 1 : phénomène de la diffusion d'une onde lumineuse par un atome :

$\checkmark d = \text{diamètre de l'atome} \simeq \text{\AA} = 10^{-10} m$

$\checkmark r \geq 1 m$

$\checkmark \lambda \simeq 10^{-7} m$ (domaine visible)

$d \ll \lambda \ll r \Rightarrow \begin{cases} \text{approx dipolaire} \\ \text{approx non relativiste} \\ \text{approx de la zone de ray} \end{cases}$

Exemple 2 : antenne demi-onde : λ : approx de la zone de ray est vérifiée.

mais d'approx non relativiste est non vérifiée $\frac{\lambda}{2} \text{ max}$
 $\frac{\lambda}{2}$

1) Structure de l'onde rayonnée :

On a $\vec{E}_{ray} = \frac{\sin(\theta) \ddot{P}(t')}{4\pi\epsilon_0 rc^2} \vec{u}_\theta$ où $t' = t - \frac{r}{c}$

et $\vec{B}_{ray} = \frac{\mu_0 \sin \theta \ddot{P}(t')}{4\pi rc} \vec{u}_\phi$

donc $\frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}_{ray}}{c} = \vec{B}_{ray} \quad \left(\frac{1}{\epsilon_0 c^2} = \mu_0 \right)$

Posons $\vec{k} = k \cdot \vec{u}_r$ et on a $k = \frac{\omega}{c}$ (vide, loin de sources) alors

$\vec{B}_{ray}(M) = \frac{\vec{k}(M) \wedge \vec{E}_{ray}(M)}{\omega}$

→ L'onde vérifie la 1^{ère} relation de structure au voisinage de M

✓ L'onde n'est pas plane mais elle est dite localement plane.

Remarque : $\vec{E}_{ray} \perp \vec{k}$ et $\vec{B}_{ray} \perp \vec{k} \Rightarrow$ L'onde est T.E.M

$$\|\vec{B}_{ray}\| = \frac{\|\vec{E}_{ray}\|}{c}$$

2) Aspect Énergétique :

$$\checkmark \vec{\pi} = \frac{\vec{E}_{ray} \wedge \vec{B}_{ray}}{\mu_0} = \frac{\sin^2 \theta}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \left[\frac{\ddot{P}(t)}{r} \right]^2 \vec{u}_r.$$

✓ Si le dipôle est oscillant → $P(t)$ est sinusoïdal :

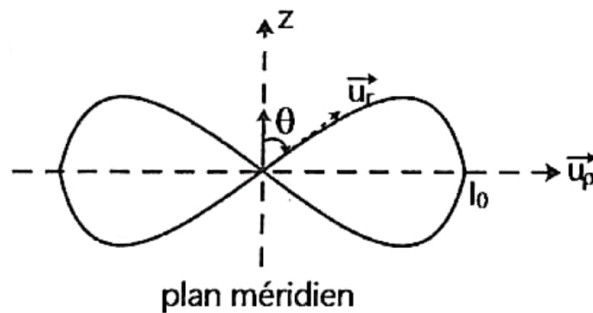
$$p(t') = p_0 \cos(\omega t') \Rightarrow \ddot{p} = -p_0 \omega^2 \cos(\omega t')$$

$$\text{donc } \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{\sin^2 \theta P_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \omega^4 \vec{u}_r$$

$$\rightarrow \text{l'intensité : } I = \langle \|\vec{\pi}\| \rangle = \underbrace{\frac{P_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2}}_{\text{notons } I_0} \sin^2 \theta$$

Diagramme de rayonnement (ou indicatrice du rayonnement)

✓ C'est le tracé de $I = fct(\theta)$ en coordonnées polaires à r fixé.



Commentaires :

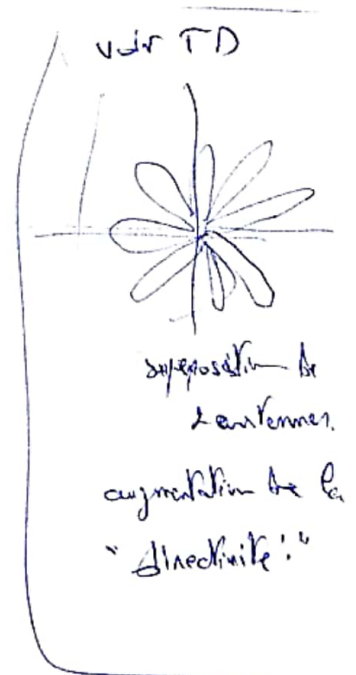
- Le rayonnement est anisotrope

✓ Il est max dans une direction $\perp \vec{P}$.

✓ Il est nul dans la direction de $\vec{P}$.

- Puissance rayonnée :

$$P_{ray} = \oint\limits_{\text{sphère}(r)} \vec{\pi} \cdot d\vec{s} \rightarrow r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r.$$



$$\frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} [\ddot{P}(t')]^2 \int_0^\pi \underbrace{\sin^3 \theta}_{4/3} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$P_{ray} = \frac{[\ddot{P}(t')]^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{\mu_0 [\ddot{P}(t')]^2}{6\pi c}$$

donc $\langle P_{ray} \rangle = \frac{\mu_0 P_0^2}{12\pi c} \omega^4$

Exemple 1 : $\omega_{visible} \in [\omega_R, \omega_B]$

$$\Rightarrow \langle P_{ray} \rangle (\text{blue}) \gg \langle P_{ray} \rangle (\text{couleur})$$

$\Rightarrow$ La couleur du ciel apparaît bleu.

Exemple 2 :

Toute particule chargée accélérée rayonne une puissance électromagnétique.

En effet : $p = q.NP \Rightarrow p = q.N\ddot{P}$ (accélération noté a)

$$\text{On } P_{ray} \propto (\ddot{P})^2 \Rightarrow P_{ray} \propto a^2$$

Ce phénomène montre que le modèle de Rutherford pour l'atome est faux, d'où l'introduction du modèle de Bohr, ce phénomène montre qu'un accélérateur des particules rayonne une puissance.

