
Support de Cours : Actions de Laplace et Induction électromagnétique

2eme Année MP/T/PC

Proposé par : Prof. Neil JOMAA

I/ Actions de Laplace

I-1/ Force de Laplace :

Considérons un conducteur (ou un semi-conducteur) parcourut par un courant électrique et soumis à un champ magnétique extérieur. Alors il est soumis à une force de Laplace. Le but de ce paragraphe est d'interpréter et d'exprimer cette force. On note $\vec{E}_H$ le champ électromagnétique de Hall généré au sein de ce conducteur.

a/ Interprétation microscopique :

Soit $d\tau$ un volume élémentaire d'un conducteur ou d'un semi-conducteur. Ce $d\tau$ contient des charges fixes et des charges mobiles.

Soit : ρ_{fix} : densité des charges fixes. :

ρ_m : densité des charges mobiles.

ce $d\tau$ est soumis au champs :

$\vec{E}_G$ (du générateur), $\vec{B}$ extérieur, $\vec{E}_H$, donc :

Les charges fixes sont soumises à :

$$d\vec{F}_{\text{fix}} = (\rho_{\text{fix}} \cdot d\tau) [\vec{E}_H + \vec{E}_G + \vec{0}]$$

Les charges mobiles sont soumises à :

$$d\vec{F}_m = (\rho_m \cdot d\tau) \left[\vec{E}_G + \underbrace{\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B}}_{\vec{0}} \right]$$

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

donc $d\tau$ est soumis à la force

$$d\vec{F} = d\vec{F}_{\text{fix}} + d\vec{F}_m$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{dF} = \underbrace{(\rho_m + \rho_{fix})}_{\rho_{totale}} d\tau \overrightarrow{E}_G + \rho_{fix} d\tau \overrightarrow{E}_H$$

Le conducteur est localement neutre donc $\rho_{totale} = 0$. Donc $\boxed{\overrightarrow{dF} = \rho_{fix} d\tau \overrightarrow{E}_H}$.

Puisque les charges fixes sont liées au conducteur alors l'action de $\overrightarrow{dF}$ se manifeste au niveau macroscopique et tout le conducteur se met en mouvement. Cette force est appelée la force de Laplace.

Puisque $\rho_{fixe} + \rho_{mobile} = \rho_{totale} = 0$ alors $\rho_{fixe} = -\rho_m$ et donc :

$$\Rightarrow \overrightarrow{dF} = -\rho_m d\tau \cdot (-\vec{v} \wedge \vec{B}) = \underbrace{(\rho_m \vec{v})}_{\vec{j}} \wedge \vec{B} d\tau$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{dF}_{Laplace} = \vec{j} \cdot d\tau \wedge \vec{B}}$

b/ Généralisation :

✓ Un circuit parcouru par un courant et plongé dans un champ $\vec{B}$ est soumis à la force de Laplace définie par :

$$\overrightarrow{dF}_L = d\vec{c} \wedge \vec{B} \quad \text{où } d\vec{c} \text{ est l'élément de courant.}$$

avec $d\vec{c} \begin{cases} \vec{j} d\tau \\ \vec{j}_s dS \\ i d\vec{l} \end{cases}$ suivant la nature de la distribution de courant

On définit alors :

✓ force volumique de Laplace : $\vec{F}_{L,v} = \frac{d\vec{F}_L}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}$

✓ force surfacique de Laplace : $\vec{F}_{L,s} = \frac{d\vec{F}_L}{dS} = \vec{j}_s \wedge \vec{B}$

✓ force linéique de Laplace : $\vec{F}_{L,l} = \frac{d\vec{F}_L}{dl} = i \vec{u} \wedge \vec{B} (d\vec{l} = dl \cdot \vec{u} \text{ avec } \vec{u} : \text{vecteur unitaire de la direction du fil}).$

✓ La résultante de la force de Laplace est :

$$\vec{F}_L = \int_{\text{circuit}} d\vec{c} \wedge \vec{B}$$

c/ Remarques :

✓ Le circuit $\mathcal{C}$ est parcouru par un courant donc il crée un champ magnétique $\vec{B}_{\mathcal{C}}$. Mais, dans l'expression de $\overrightarrow{dF}_L$, $\vec{B}$ est le champ magnétique extérieure.

✓ si $\mathcal{C}$ est filiforme et $\vec{B}$ est uniforme, alors

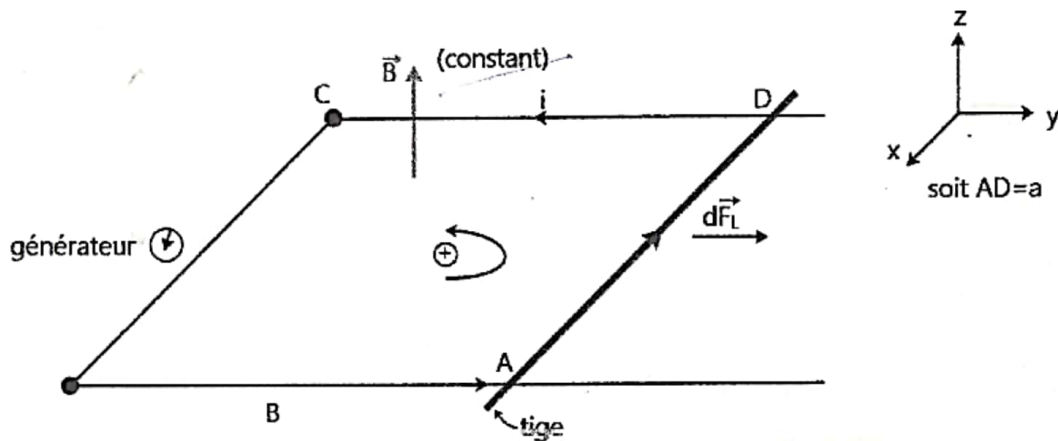
$$\vec{F}_L = \int i d\vec{l} \wedge \vec{B} = i \left(\int d\vec{l} \right) \wedge \vec{B}$$

Soient A, C les limites de $\mathcal{C}$ donc $\vec{F}_L = i \left(\int_A^C d\vec{l} \right) \wedge \vec{B} = i \overrightarrow{AC} \wedge \vec{B}$.

Si $A = C$ ($\mathcal{C}$ est un contour fermé) $\Rightarrow \vec{F}_L = \vec{0}$

$\Rightarrow$ Un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme n'exerce pas une force sur un circuit filiforme fermé.

d/ Application 1 : (Rails de Laplace)



$$d\vec{F}_L = i \frac{d\vec{l}}{dx} \wedge \vec{B} \rightarrow \vec{y}.$$

$$\times \vec{F}_L = i \overrightarrow{AD} \wedge \vec{B} = iaB \vec{y}.$$

I-2/Puissance de la force de Laplace

$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$ La puissance est $P_L = \frac{dE_c}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$, or selon la R.F.D :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_L \Rightarrow \boxed{P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v}} \quad \text{avec } \vec{v} : \text{vitesse du circuit.}$$

Par exemple pour la tige AD , on a :

$$P_L = iaB \vec{u}_y v \cdot \vec{u}_y = iaBv$$

I-3/ Moment ou couple de Laplace

Le moment de $\vec{dF}_L$ en M par rapport à un point O fixe est :

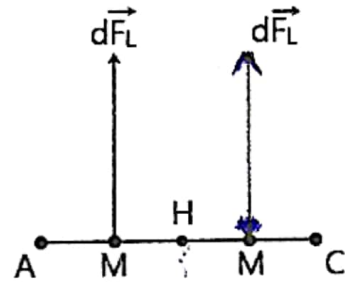
$$d\vec{\Gamma}_{L,O} = \vec{OM} \wedge \vec{dF}_L(M)$$

donc le moment total est : $\vec{\Gamma}_O = \int \vec{OM} \wedge \vec{dF}_L(M) = \int \vec{OM} \wedge (\vec{dc} \wedge \vec{B})$

cas particulier : on considère un segment AC soumis à une force de Laplace répartie d'une façon uniforme sur AC . $\vec{dF}_L = i \vec{dl} \wedge \vec{B}$

✓ Soit H le milieu de $[AC]$

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{L,O} &= \int_A^C \vec{OM} \wedge \vec{dF}_L = \int_A^C (\vec{OH} + \vec{HM}) \wedge \vec{dF}_L \\ &= \vec{OH} \wedge \int_A^C \vec{dF}_L + \int_A^C \vec{HM} \wedge \vec{dF}_L \\ &= \vec{OH} \wedge \vec{F}_L + \underbrace{\left[\int_A^H \vec{HM} \wedge \vec{dF}_L + \int_H^C \vec{HM} \wedge \vec{dF}_L \right]}_{\vec{0}} \end{aligned}$$



donc $\boxed{\vec{\Gamma}_{L,O} = \vec{OH} \wedge \vec{F}_L}$ où $\vec{F}_L = \int_A^C i \vec{dl} \wedge \vec{B} = i \vec{AC} \wedge \vec{B}$

I-4/ Moment magnétique

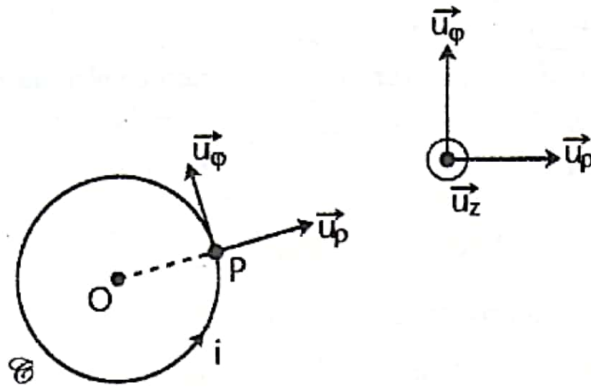
I-4-a/ Définition

Le moment magnétique $\vec{M}$ d'une distribution de courant est $\vec{M} = \frac{1}{2} \int_{\text{Distribution}} \vec{OP} \wedge \vec{dc}$.

$\vec{M}$ est un pseudo-vecteur.

Cas particulier :

$\mathcal{C}$ boucle (c-à-d une spire) de rayon noté R .



donc :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}} &= \frac{1}{2} \int \vec{OP} \wedge i d\vec{l} = \frac{1}{2} i \int_0^{2\pi} R \vec{u}_\rho \wedge R d\varphi \vec{u}_\varphi \\ &= \frac{i}{2} R^2 \cdot 2\pi \vec{u}_z = i(\pi R^2) \vec{u}_z\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\vec{\mathcal{M}} = iS\vec{n} = i\vec{S}}$ unité : $A.m^2$

→ généralisation pour tout circuit filiforme $\mathcal{C}$ fermé plan de surface S , de normale $\vec{n}$ correspondant au sens de i , on a :

$$\vec{\mathcal{M}} = iS\vec{n}.$$

I-4-b/ Ordres de grandeur

- Au niveau atomique $\mathcal{M} \sim \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,3 \cdot 10^{-24} A.m^2$ appelé magnéton de Bohr et correspond au moment magnétique de l'électron dans son atome.

- Au niveau nucléaire, $\mathcal{M} \sim \mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,1 \cdot 10^{-27} A.m^2$ appelé magnéton nucléaire et correspond au moment magnétique du proton.

$\hbar = h/2\pi$ où h est la constante de Planck.

Remarque : Ces 2 moments magnétiques sont quantifiés (voir chapitre de la physique quantique).

- L'aiguille d'une boussole $\mathcal{M} \sim 10 A.m^2$.
- La terre présente $\mathcal{M} \sim 7,5 \cdot 10^{22} A.m^2$ qui explique l'existence de champ magnétique terrestre.

I-5/ Dipôle magnétique :

I-5-a/ Définition :

C'est une distribution de courant de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ non nul dont la taille caractéristique $d \ll L$: longueur caractéristique du problème. (dite approximation dipolaire).

La notion du dipôle magnétique est applicable :

- ✓ Pour calculer $\vec{B}$ d'une distribution de courant de taille d à une distance $r \gg d$.

On parle alors de "dipôle actif".

✓ Pour calculer l'action d'un $\vec{B}_{\text{extérieur}}$ sur une distribution de courant de taille $d \ll L$:
longueur caractéristique de variation spatiale de $\vec{B}_{\text{extérieur}}$.

On parle alors de "dipôle passif".

I-5-b/ Action de Laplace d'un champ magnétique uniforme sur un dipôle magnétique :

Soit un circuit filiforme plan de dimension (d) placé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_{\text{ext}}$.

Soit L la distance caractérisant la variation spatiale de $\vec{B}_{\text{ext}}$.

Si $d \ll L$; ce circuit peut être considéré comme un dipôle passif.

Si $\vec{B}_{\text{ext}}$ est uniforme ; alors $L \rightarrow \infty$ donc tout circuit plongé dans $\vec{B}_{\text{ext}}$ uniforme est assimilable à un dipôle magnétique.

Selon le paragraphe I-4-c/ la résultante de la force de Laplace $\vec{F}_L = \vec{0}$.

Donc les actions de Laplace se réduisent à un couple $\vec{\Gamma}_L$.

Dans ce cas : $\boxed{\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}}$

I-5-c/ Généralisation :

Même si $\vec{B}_{\text{ext}}$ est non uniforme, un dipôle magnétique passif plongé dans ce $\vec{B}_{\text{ext}}$ est soumis à un couple de Laplace $\boxed{\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}}$

Mais dans ce cas la résultante $\vec{F}_L \neq \vec{0}$.

Pour calculer $\vec{F}_L$ on rappelle qu'elle dérive de l'énergie potentielle magnétique.

U_m d'interaction du dipôle avec $\vec{B}_{\text{ext}}$.

Donc : $\vec{F}_L = -\overrightarrow{\text{grad}}(U_m)$.

Si $\vec{M} = \text{constante}$ et si $\vec{B}_{\text{ext}}$ est stationnaire :

$$\boxed{U_m = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}}$$

Donc $\boxed{\vec{F}_L = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M} \cdot \vec{B}_{\text{ext}})}$

I-6/ Théorème de moment cinétique (TMC) :

Soit un solide homogène indéformable en rotation autour d'un axe Δ par rapport à un référentiel galiléen de vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Le moment cinétique de ce solide est $\vec{\mathcal{L}} = J \cdot \vec{\omega}$ avec J son moment d'inertie.

Donc le T.M.C s'écrit :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \Sigma \vec{\Gamma}_{\text{ext}}$$

$$\Rightarrow J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \Sigma \vec{\Gamma}_{ext}$$

Soit $\vec{u}$: vecteur unitaire de Δ : ($\vec{\omega} = \omega \vec{u}$).

Le T.M.C par rapport à l'axe Δ s'écrit :

$$\boxed{J \frac{d\omega}{dt} = \Sigma \Gamma_{ext, \Delta}} \quad \text{avec} \quad \Gamma_{ext, \Delta} = \vec{\Gamma}_{ext} \cdot \vec{u}$$

I-7/ Puissance du couple de Laplace (P_L) :

L'énergie cinétique de rotation d'un circuit est $E_c = \frac{1}{2} J \omega^2$.

J est le moment d'inertie de ce circuit et $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$ son vecteur rotation.

La puissance est $P_L = \frac{dE_c}{dt} = J \vec{\omega} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = (J \frac{d\vec{\omega}}{dt}) \cdot \vec{\omega}$

Selon TMC $J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \Sigma \vec{\Gamma}_{ext} = \vec{\Gamma}_L \Rightarrow \boxed{P_L = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{\omega}}$

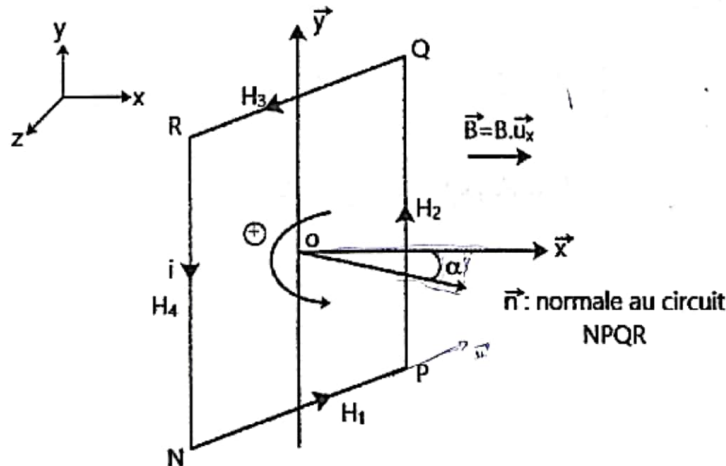
I-7/ Application 2 :

I-7-a/ Action de Laplace :

Considérons une spire rectangulaire de normale $\vec{n}$ parcourue par un courant d'intensité i et en rotation autour de l'axe ($O\vec{y}$) où O est le centre de la spire. Un champ magnétique $\vec{B} = B \cdot \vec{u}_x$ constant est appliqué sur la spire.

On note :

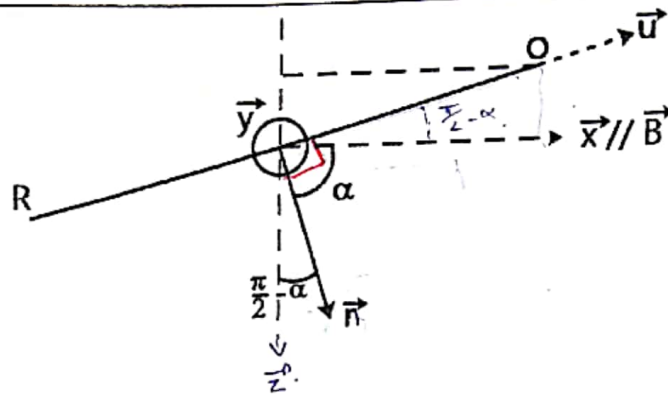
H_1 milieu de NP ; H_2 milieu de PQ ; H_3 milieu de QR ; H_4 milieu de RN .



On note $RQ = a$ et $PQ = b$.

✓ Résultante de Force de Laplace

Circuit filiforme fermé et $\vec{B}$ uniforme. $\Rightarrow \vec{F}_L = \vec{0}$
 $\Rightarrow$ le mt de ce circuit ne peut être qu'une rotation.



✓ Couple de Laplace

Cherchons la force, puis le couple exercée sur chaque segment du circuit :

* Segment [NP]

$$\begin{aligned}\vec{F}_{NP} &= i \vec{NP} \wedge \vec{B} = ia \vec{u}_1 \wedge B \vec{u}_x = iaB \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot (-\vec{u}_y) \\ &= -iaB \cos(\alpha) \cdot \vec{u}_y.\end{aligned}$$

$$\vec{\Gamma}_{NP} = \vec{OH}_1 \wedge \vec{F}_{NP} = \vec{0}.$$

* Segment [PQ]

$$\vec{F}_{PQ} = i \vec{PQ} \wedge \vec{B} = ib \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_x = -ibB \vec{u}_z.$$

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_{PQ} &= \vec{OH}_2 \wedge \vec{F}_{PQ} = \frac{a}{2} \vec{u}_x \wedge (-ibB) \vec{u}_z = \frac{ia}{2} bB \sin(\pi - \alpha) \vec{u}_y \\ &= i \frac{a}{2} bB \sin(\alpha) \vec{u}_y.\end{aligned}$$

* Segment [QR]

$$\vec{F}_{QR} = i \vec{QR} \wedge \vec{B} = ia(-\vec{u}_x) \wedge B \vec{u}_x = iaB \cos(\alpha) \cdot \vec{u}_y.$$

$$\vec{\Gamma}_{QR} = \vec{OH}_3 \wedge \vec{F}_{QR} = \vec{0}.$$

* Segment $[RN]$

$$\vec{F}_{RN} = i \vec{RN} \wedge \vec{B} = ib(-\vec{u}_y) \wedge B \vec{u}_z = ibB \vec{u}_x.$$

$$\vec{\Gamma}_{RN} = \vec{OH}_4 \wedge \vec{F}_{RN} = -\frac{a}{2} \vec{u}_x \wedge (ibB) \vec{u}_z = \cancel{ib} i \frac{a}{2} bB \sin(\alpha) \cdot \vec{u}_y.$$

Méthode rapide :

$\vec{B}$ uniforme : dipôle.

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_L &= \vec{r} \wedge \vec{B} = iS\vec{m} \wedge B\vec{u}_z \\ &= iabB \sin(\alpha) \cdot \vec{u}_y \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{\text{totale}} = \vec{0} \quad \text{car les forces sont 2 à 2 opposées.}$$

$$\checkmark \vec{\Gamma}_L = \vec{\Gamma}_{PQ} + \vec{\Gamma}_{RN} = iab \cdot B \sin \alpha \vec{u}_y.$$

$$\text{Remarque : } \vec{\Gamma}_L = iSB \sin \alpha \vec{u}_y = MB \sin \alpha \vec{u}_y = \vec{M} \wedge \vec{B} \quad (\text{voir paragraphe I-8-c/})$$

I-7-b/ Puissance du couple de Laplace :

$$\begin{aligned} P_L &= \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{\omega} = iabB \sin(\alpha) \vec{u}_y \cdot \omega \cdot \vec{u}_y \\ &= iabB \sin(\alpha) \cdot \alpha \end{aligned}$$

I-7-c/ Analogie :

Translation	Rotation
R.F.D	T.M.C
$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$	$J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum \vec{\Gamma}_{\text{ext}}$
$E_c = \frac{1}{2} m v^2$	$E_c = \frac{1}{2} J \omega^2$
$P = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}$	$P = \vec{\Gamma}_{\text{ext}} \cdot \vec{\omega}$

I-8/ Positions d'équilibre d'un circuit de moment magnétique $\vec{M}$ soumis à un champ $\vec{B}$ uniforme extérieur.

✓ Soit un circuit caractérisé par son moment magnétique $\vec{M}$. Il est soumis à un champ $\vec{B}_{\text{ext}}$ uniforme.

Le couple $\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \wedge \vec{B}$ fait tourner le dipôle jusqu'à atteindre l'équilibre.

Il existe 2 états d'équilibres :

Équilibre stable	Équilibre instable
- L'énergie magnétique est minimale ($U_m \text{ min}$) - Suite à une perturbation, le dipôle retrouve sa position d'équilibre	- L'énergie magnétique est maximale ($U_m \text{ max}$) - Suite à une perturbation le dipôle quitte la position d'équilibre

$$U_m = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$$

L'équilibre est obtenue si U_m est extrémale (ou $\vec{\Gamma}_L = \vec{0}$).

* L'équilibre correspond à :

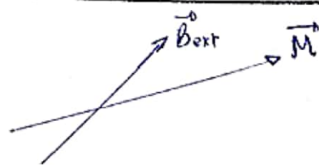
$$1. \vec{\Gamma}_L = \vec{0} \Rightarrow \vec{M} \wedge \vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M} \parallel \vec{B}_{\text{ext}} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \pi.$$

$$2. U_m: \text{Extrémale car } U'_m = 0 \Rightarrow \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \pi.$$

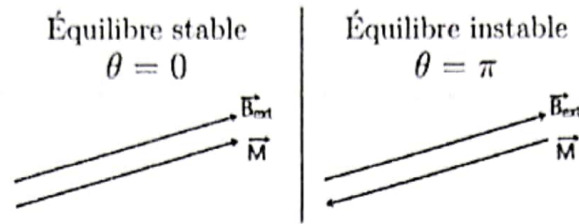
✓ Stabilité :

$$U''_m(0) > 0 \Rightarrow U_m(0) = U_{\text{min}} \Rightarrow \alpha = 0 : \text{Eq stable.}$$

$$U''_m(\pi) < 0 \Rightarrow U_m(\pi) = U_{\text{max}} \Rightarrow \alpha = \pi : \text{Eq instable}$$



Conclusion :



Un système tend spontanément vers l'équilibre stable donc $\vec{B}$ tend spontanément à orienter $\vec{M}$ suivant sa direction et son sens.

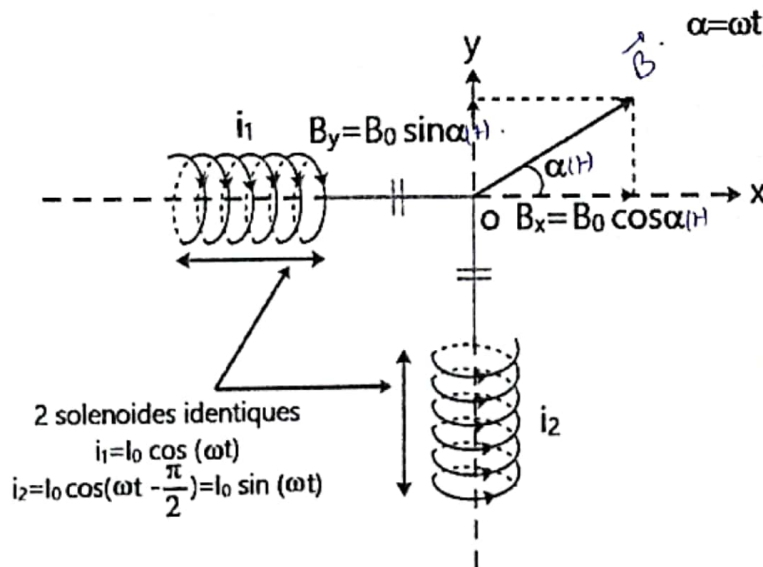
Rappelons l'expérience de la boussole soumise au champ magnétique terrestre.

II) Champ $\vec{B}$ tournant :

Dans certaines applications technologiques (par exemple pour les moteurs électriques) on a besoin d'un champ $\vec{B}$ tournant, pour le réaliser, on propose 2 méthode :

a/ Méthode 1 :

Deux solénoïdes d'axe perpendiculaires : alimentés par 2 courants en quadrature de phase.



Les 2 champ magnétique crée en O par les 2 solénoïdes sont proportionnels à i_1 et i_2 , donc

$\vec{B}_1 = B_0 \cos(\omega t) \cdot \vec{u}_x$, $\vec{B}_2 = B_0 \sin(\omega t) \vec{u}_y$, donc le champ total crée en O .

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad (\text{Théorème de superposition})$$

$$\Rightarrow \vec{B} = B_0(\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y)$$

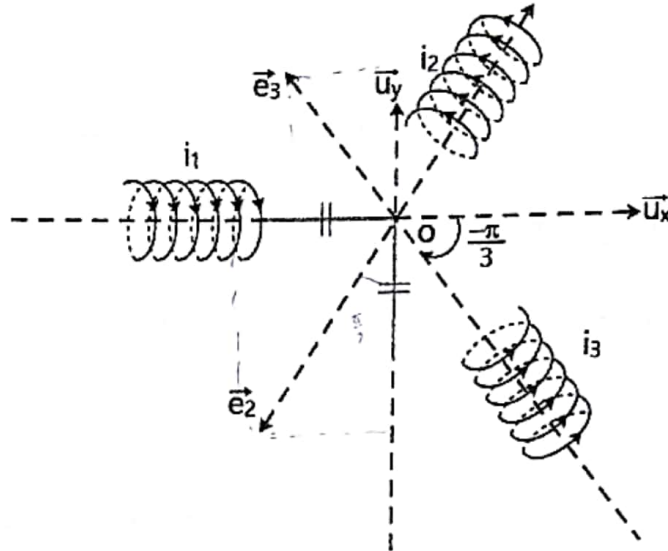
$$\Rightarrow \vec{B} \text{ fait l'angle } \alpha(t) = \omega t \text{ avec } \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \vec{B} \text{ tourne autour de } \vec{u}_z \text{ avec la vitesse } \omega \text{ (qui représente la pulsation des courants).}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{m} \times \vec{u}_z \text{ (si } \vec{m} \text{ est un solénoïde)}$$

b/ Méthode 2 :

3 solénoïdes dont les axes sont ~~par~~ concourants en un point O , faisant d'angle $\frac{2\pi}{3}$ 2 à 2 et leurs courants sont triphasés (c-à-d de déphasage $-\frac{2\pi}{3}$ 2 à 2)



Exprimons les vecteurs $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

$$\vec{e}_3 = -\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{y}$$

$$\vec{e}_2 = -\frac{1}{2}\vec{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{y}$$

Les champs magnétiques sont proportionnelles aux courants :

$$\vec{B}_1 = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_1 \quad \text{où } B_0 = \text{constante positive.}$$

$$\vec{B}_2 = B_0 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \vec{e}_2$$

$$\vec{B}_3 = B_0 \cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) \vec{e}_3$$

Cherchons le champ total $\vec{B}$.

$$\begin{aligned} B_x &= B_0 \left[\cos \omega t - \frac{1}{2} \left[\cos \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(\omega t + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \right] \\ &= B_0 \left[\cos \omega t - \cos(\omega t + \pi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &= \frac{3}{2} B_0 \cos(\omega t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_y &= B_0 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[-\cos \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(\omega t + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \\ &= \sqrt{3} B_0 \cdot (-\sin(\omega t + \pi) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)) \\ &= \frac{3}{2} B_0 \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{3}{2} B_0 \cdot \left(\cos(\omega t) \vec{x} + \sin(\omega t) \vec{y} \right)$$

→ On a bien la forme d'un champ $\vec{B}$ tournant à la vitesse (ω).

III/ Phénomène d'induction électromagnétique

I)
Introduction : Selon le chapitre précédent : un circuit parcouru par un courant et placé dans un champ $\vec{B}$ peut subir le torceur de Laplace (Force + couple).

Cependant, dans certaines conditions, le circuit placé dans $\vec{B}_{\text{ext}}$ peut être le siège du phénomène d'induction. Le but de ce chapitre est d'étudier ces conditions, le phénomène d'induction et ses applications (moteur à courant continu, moteur asynchrone, transformateur, freinage électromagnétique, haut parleur, chauffage inductif, alternateur)

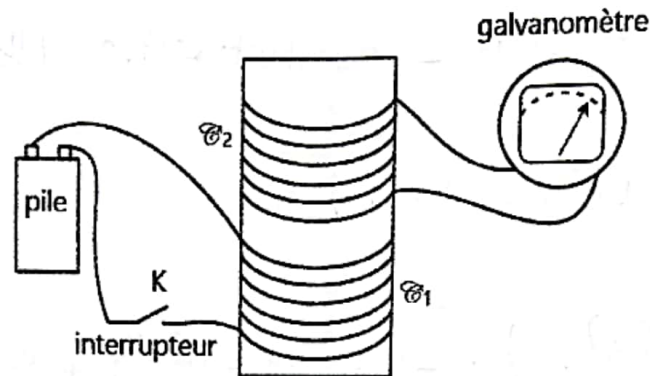
1) Mise en évidence et interprétation :

a/ Expérience de Faraday :

On savait déjà qu'un courant électrique peut créer un champ magnétique.

En 1831, Faraday se demanda si la réciproque pourrait être possible c.à.d pouvait il être à l'origine d'un courant électrique ?

Il réalisa alors l'expérience suivante :



Deux enroulement bobine $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sur un cylindre isolant (en bois) étant reliés l'un à un galvanomètre (Ampèremètre), l'autre à une pile par l'intermédiaire d'un interrupteur.

Malgré que l'interrupteur (k) était fermé, il n'observait rien. Le champ magnétique créé par $\mathcal{C}_1$ et envoyé dans $\mathcal{C}_2$ n'a produit aucun effet.

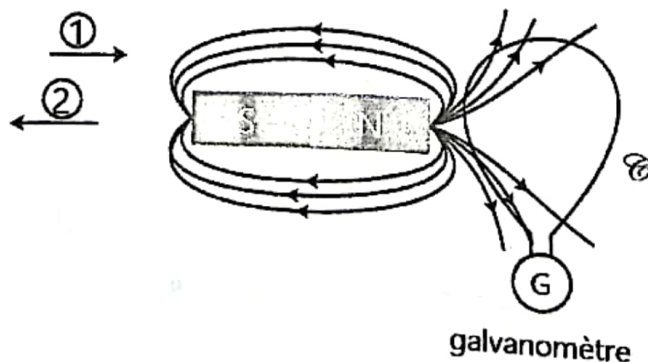
Par contre, Faraday se rendit compte que l'aiguille du galvanomètre déviait brièvement dans un sens à la fermeture de (k) et dans l'autre sens à l'ouverture de k !

Il arrive à la conclusion que c'était la variation de courant dans $\mathcal{C}_1$ et donc la variation du flux du champ $\vec{B}_1$ créée par $\mathcal{C}_1$ dans le circuit $\mathcal{C}_2$ qui était à l'origine du courant dans $\mathcal{C}_2$ appelé courant induit.

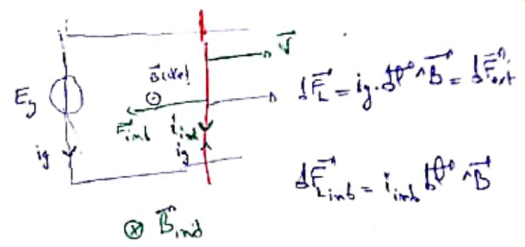
$\mathcal{C}_1$ est appelé l'inducteur et $\mathcal{C}_2$ est appelé l'induit.

Faraday utilisa cette découverte pour inventer le premier générateur électrique de courant alternatif.

b/ Autres expérience :



Un circuit $\mathcal{C}$ est placée dans un champ $\vec{B}$ crée par un aimant permanent.



Soit flux = $\Phi = \iint_{\text{Surface de } \mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

Donc $\Phi = \text{fonction}(t) \rightarrow$ il apparaît alors dans $\mathcal{C}$ un courant induit d'intensité i_{ind} .

Si on déplace l'aimant ou $\mathcal{C} \rightarrow$ on détecte un courant.

Donc on distingue 2 cas possibles pour obtenir l'induction :

$\vec{B} = \text{fonction}(t)$ (déplacement de l'aimant) et $\mathcal{C}$ fixe $\Rightarrow$ Cas de Newman	$\vec{B}$ statique (aimant fixe) $\mathcal{C}$ mobile ou déformable $\Rightarrow$ Cas de Lorentz
--	--

Remarque : On parle du cas général si $\vec{B} = \text{fonction } f(t)$ et $\mathcal{C}$ se déplace où se déforme.

Étudions par exemple le mouvement de l'aimant. Le pôle nord de l'aimant est du côté du circuit $\mathcal{C}$:

✓ Déplacement de l'aimant dans le sens ① :

alors $\Phi(t) \nearrow \rightarrow i_{\text{ind}}$ crée $\vec{B}_{\text{ind}}$ opposée à $\vec{B}$ pour s'opposer à l'augmentation de $\Phi(t)$.

✓ déplacement dans le sens ② :

alors $\Phi(t) \searrow \rightarrow i_{\text{ind}}$ crée $\vec{B}_{\text{ind}}$ de même sens que $\vec{B}$ pour s'opposer à la diminution de $\Phi(t)$.

✓ i_{ind} est d'autant plus grande que l'aimant avance vite soit dans le sens ① ou dans le sens ②.

Remarque :

On peut réaliser toutes ces expériences en mettant le circuit "induit" en circuit ouvert. Dans ce cas, on détecte grâce à un voltmètre une tension induite et évidemment $i_{\text{ind}} = 0$.

2) Les lois fondamentales de l'induction :

2-a) Loi de modération de Lenz (énoncée en 1834)

Le courant induit s'oppose par ses effets à la cause qui lui donne naissance :

Cause	Effet
Courant	Courant induit
Translation (ou Force)	Force de Laplace
Rotation (ou couple)	Couple de Laplace
$\vec{B}_{\text{ext}}$	$\vec{B}_{\text{induit}}$

2-b) Loi de Faraday

$$e = \ominus \frac{d\Phi}{dt}$$

↓
Ce Signe traduit la
loi de Lenz

e : force électromotrice (f.é.m) induite.

Et $\phi = \iint_{\text{Surface de } \mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$, où $\mathcal{C}$ est l'induit et $\vec{B}$ est le champ magnétique créée par l'inducteur.

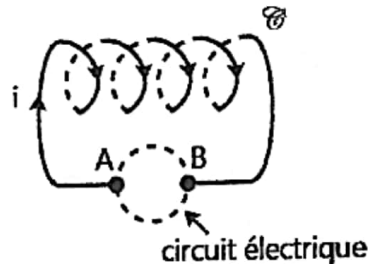
Remarque : Cette loi est valable uniquement pour les circuits filiformes et indéformables. (fixes ou mobiles)

2-c) Loi d'Ohm généralisée

:

Considérons un conducteur "induit" filiforme $\mathcal{C}$:

Supposons que ce conducteur filiforme $\mathcal{C}$ est branché dans un circuit électrique entre deux points A et B comme le montre la figure suivante :



$\mathcal{C}$ est le siège d'un phénomène d'induction grâce à la variation de flux $\phi(t)$ d'un champ magnétique extérieur provenant d'un autre circuit (ou aimant) inducteur.

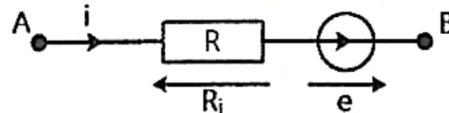
On note R la résistance électrique de $\mathcal{C}$.

Alors la différence de potentielle électrique entre A et B s'écrit :

$$V(A, t) - V(B, t) = Ri(t) - e \quad \text{où } e : \text{f.é.m induite.}$$

C'est la loi d'Ohm généralisée.

$\mathcal{C}$ est donc équivalent d'un point de vue électrique au schéma.



Remarque :

Lorsqu'on relie A et B (c.à.d le circuit branché à $\mathcal{C}$ est un fil) ;

$$V(A, t) = V(B, t) \Rightarrow e = Ri(t)$$

$$\Rightarrow i = \frac{e}{R} = \frac{-1}{R} \frac{d\phi}{dt}$$

2-d) Exemple :

Rails de Laplace, sans générateur : (voir la figure des rails de Laplace dans le paragraphe I-4-d page 9 en éliminant le générateur)

Un opérateur déplace la tige avec la vitesse initiale $\vec{v}_0$

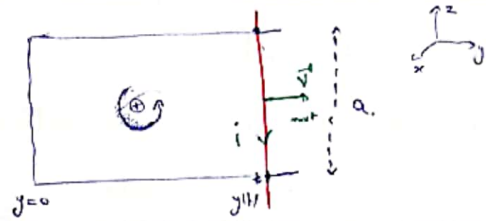
- Décrire le phénomène :

- ✓ Lorsqu'en déplace la tige, la surface DCBA varie $\rightarrow \phi = \text{fonction}(t) \rightarrow \text{création de } i_{\text{ind}}$
- ✓ tige mobile et $\vec{B}$ statique $\rightarrow$ cas de Lorentz

- f.é.m induite : e

$$\Phi = \iint_{\text{ADCB}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot S = B \cdot a \cdot y(t)$$

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = -Ba \cdot \frac{dy(t)}{dt} = -Ba v$$



- En déduire $i(t)$ sachant que le circuit présente une résistance $= R$.

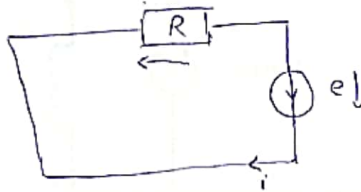
Le circuit équivalent :

Le circuit Equi

Loi des mailles

$$e = Ri$$

$$\Rightarrow i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R} Ba v$$



- Vérifier la loi de Lenz :

$$\vec{v} = v(t) \cdot \vec{u}_y \text{ ou } v(t) > 0 \Rightarrow i < 0 \Rightarrow i \vec{d\vec{s}} // +\vec{u}_x \text{ or } \vec{F}_L = \frac{1}{+u_x} \wedge \vec{B} \cdot \vec{u}_x \Rightarrow \vec{F}_L // -\vec{u}_y$$

$\Rightarrow$ On a bien $\vec{F}_L$ (effat) s'oppose au mvt de la rige.

$\rightarrow$ La loi de Lenz est bien vérifiée.

3) Courant de Foucault :

Soit un conducteur siège d'un phénomène d'induction.

Si le conducteur est non filiforme, le courant induit est appelé courant de Foucault.

Le calcul de ce courant nécessite des formules qui seront énoncées dans le chapitre suivant. Dans ce chapitre on s'intéresse uniquement à l'aspect qualitatif de ce courant.

Quels sont les effets de ce courant ?

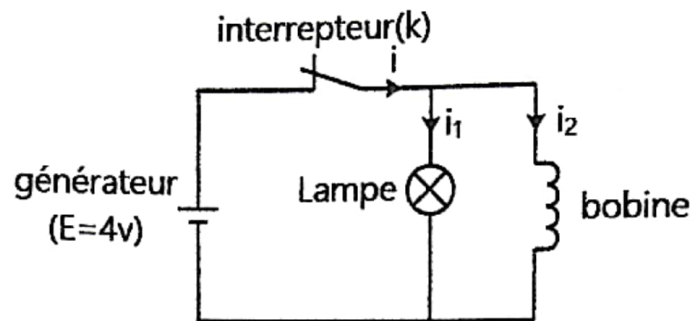
✓ Quant il s'agit d'un conducteur fixe dans un champ magnétique variable (cas de Neumann) ; ce courant dissipe de l'énergie par effet Joule et chauffe le conducteur. Selon les applications ce chauffage peut être néfaste ou utile. On verra des exemples au fur et à mesure de l'avancement de la leçon et des exercices.

✓ Quand il s'agit d'un conducteur mobile dans un champ magnétique stationnaire (cas de Lorentz) ; le courant de Foucault dissipe l'énergie mécanique sous forme d'effet Joule et freine le conducteur. Cette technique est utilisée pour freiner par exemple les camions ou les TGV.

IV/ Cas de Newman : circuit fixe dans un champ $\vec{B}(M, t)$ dépendant du temps

1) Phénomène d'auto-induction :

Considérons l'expérience suivante :



La lampe nécessite 6V pour s'allumer.

- ✓ à $t = 0$: K est fermé mais la lampe est éteinte car elle nécessite plus que 4V pour s'allumer.
- Lorsqu'on ouvre K , on remarque que la lampe s'allume puis s'éteint rapidement.

✓ Explication :

Soit $\vec{B}$ le champ créé par la bobine.

Le flux de $\vec{B}$ à travers la bobine est appelé flux propre (ϕ_p).

$$\text{à } t = 0, \quad i_2 \neq 0 \Rightarrow \vec{B} \neq \vec{0} \Rightarrow \phi_p \neq 0$$

$$\text{au moment de l'ouverture } i_2 = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{0}.$$

$$\Rightarrow \phi_p = 0$$

donc ϕ_p subit une chute brusque.

$$\Rightarrow \left| e = -\frac{d\phi_p}{dt} \right| \gg$$

$\Rightarrow$ "e" est capable d'allumer la lampe.

C'est le phénomène d'auto-induction.

✓ Remarque :

Technologiquement, l'expérience étudiée illustre le phénomène de sur-tension.

2) Inductance propre :

Soit $\mathcal{C}$ un circuit filiforme indéformable parcouru par un courant d'intensité $i(t)$.

$$i \rightarrow \vec{B}_{\mathcal{C}}(\text{champ propre}) \rightarrow \phi_p : \text{flux propre} = \iint_{\mathcal{C}} \vec{B}_{\mathcal{C}} d\vec{S}.$$

Par définition :

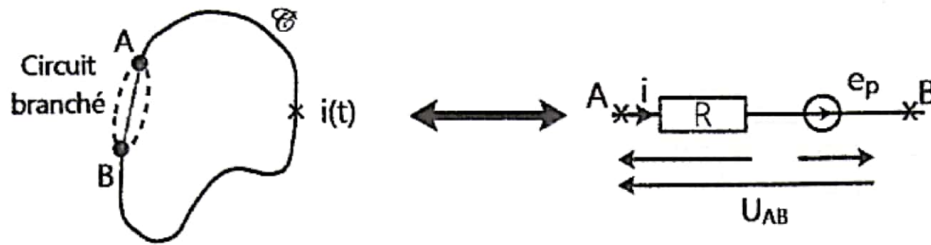
$$\phi_p = Li$$

avec L : inductance propre ou self-inductance.

Son unité est le "Henry" ($\mathcal{H}$)

L est toujours positive et elle dépend principalement de la forme géométrique de $\mathcal{C}$.

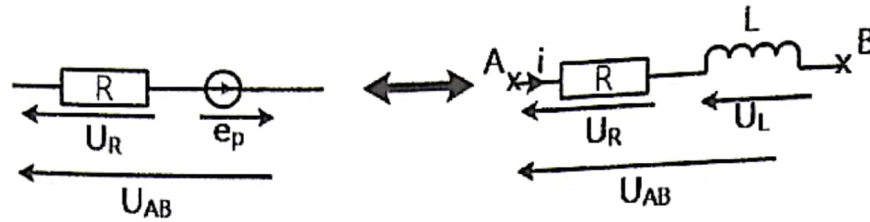
Remarque : Schéma équivalent de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{R}$ la résistance de $\mathcal{C}$ siège d'auto-induction.



Selon la loi d'Ohm généralisée :

$$U_{AB} = Ri - e_p = Ri + \frac{d\phi_p}{dt} = Ri + \underbrace{L \frac{di}{dt}}_{U_L}$$

donc :



Exemple :

Inductance propre L d'un solénoïde infini de longueur l , de rayon R composé de N spires.

On rappelle que la champ intérieur d'un solénoïde infini est $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$ avec :

n : nombre de spires par unité de Longueur

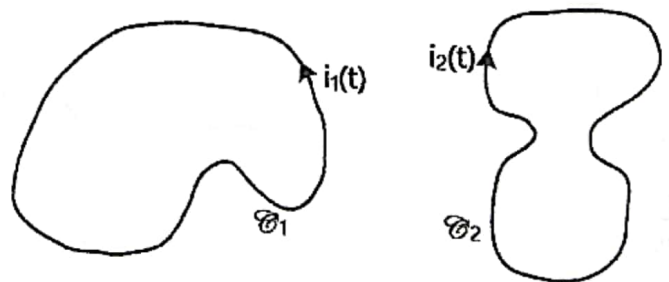
$\vec{u}_z$: axe du solénoïde.

i : intensité du courant circulant dans le solénoïde.

$$\begin{aligned} \Phi_p &= L i \Rightarrow L = \frac{\Phi_p}{i} \quad \text{m. par unité de longueur.} \\ \Phi_p &= \iint_{\text{Surf de solénoïde}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \cdot \iint_{\text{Surf d'une spire}} \mu_0 n i \vec{u}_z \cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{N^2}{l} i \pi R^2 l \\ &\Rightarrow \boxed{L = \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi R^2} \end{aligned}$$

3) Influence magnétique. Inductance Mutuelle :

Considérons 2 circuits $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ parcourus par 2 courants d'intensité $i_1(t)$ et $i_2(t)$ respectivement.



$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont filiformes, fixes et indéformables.

Le champ magnétique créé par l'un des circuits agit sur l'autre $\rightarrow$ influence magnétique.

On note : $\phi_{i \rightarrow j} = \iint_{\mathcal{C}_j} \vec{B}_i \cdot d\vec{S}$: le flux de $\vec{B}_i$ (créé par $\mathcal{C}_i$) à travers $\mathcal{C}_j$.

et soit $\mathcal{E}_{i \rightarrow j} = \frac{-d\phi_{i \rightarrow j}}{dt}$

Donc si les courants sont variables, les 2 circuits seront les sièges des phénomènes d'auto-induction et d'induction mutuelle.

On a déjà :

$$\phi_{1 \rightarrow 1} = \phi_{p,1} = L_1 i_1(t)$$

$$\phi_{2 \rightarrow 2} = \phi_{p,2} = L_2 i_2(t)$$

et par définition : $\phi_{1 \rightarrow 2} = M_{1 \rightarrow 2} \cdot i_1$

$$\phi_{2 \rightarrow 1} = M_{2 \rightarrow 1} \cdot i_2$$

$M_{1 \rightarrow 2}$ et $M_{2 \rightarrow 1}$ sont appelés les inductances mutuelles (unité : Henry)

Dans ce cas les 2 circuits sont dits couplés (Couplage magnétique).

Théorème de Newmann : $M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = M$.

M peut être positive ou négative et dépend de la géométrie du système formé par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

On note : ϕ_i : le flux total à travers $\mathcal{C}_i$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = \phi_{1 \rightarrow 1} + \phi_{2 \rightarrow 1} \\ \phi_2 = \phi_{1 \rightarrow 2} + \phi_{2 \rightarrow 2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \phi_2 = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

On note $[\phi] = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ et $[i] = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow [\phi] = \underbrace{\begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice inductance (symétrique)}} \cdot [i]$$

Matrice inductance
(symétrique)

On définit le coefficient de couplage entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \in [0, 1]$$

si $k \rightarrow 0$: pas de couplage.

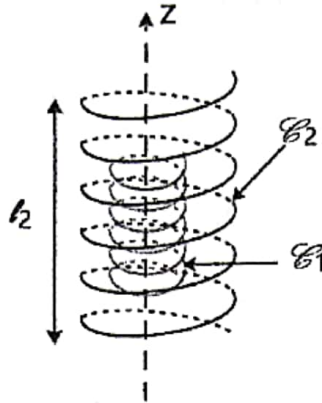
$k \rightarrow 1$: couplage fort (ou serré).

Application : considérons un petit solénoïde $\mathcal{C}_1$ de rayon R_1 et de longueur l_1 plongé dans un autre plus grand $\mathcal{C}_2$ de rayon R_2 et de longueur l_2 . ($R_2 > R_1$ et $l_2 > l_1$).

Soit N_1 : nombre de spire de $\mathcal{C}_1$.

N_2 : nombre de spire de $\mathcal{C}_2$.

On suppose que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ possèdent le même axe et que $l_1 \ll R_1$ et $l_2 \ll R_2$



Déterminer M et en déduire K .

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \iint_{\text{surface } \mathcal{C}_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = N_1 \iint_{\text{surface de spire } \mathcal{C}_1} \mu_0 n_2 i_2 dS = \mu_0 N_1 \cdot \frac{N_2}{l_2} \cdot i_2 \pi R_1^2$$

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{2 \rightarrow 1} \cdot i_2 \Rightarrow M = M_{2 \rightarrow 1} = \mu_0 N_1 \frac{N_2}{l_2} \pi R_1^2$$

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l_1} \pi R_1^2$$

$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{l_2} \pi R_2^2$$

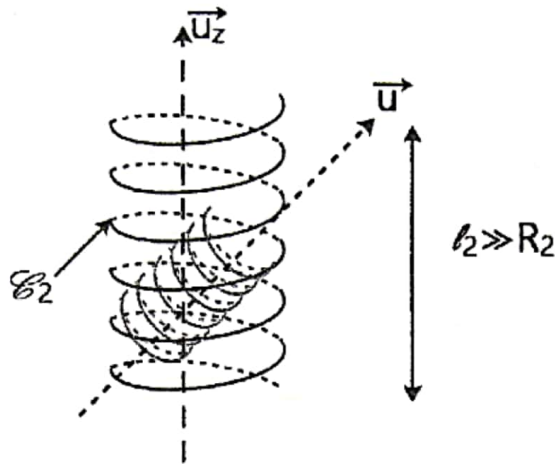
$$K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{R_1}{R_2} \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$$

✓ Même question si l'axe $\vec{u}$ de $\mathcal{C}_1$, fait un angle α très faible avec $\vec{u}_z$.

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \iint_{\text{surface } \mathcal{C}_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = N_1 \iint_{\text{surface de spire } \mathcal{C}_1} \mu_0 n_2 i_2 \vec{u}_2 \cdot d\vec{S} \vec{u}_0$$

$$= \mu_0 N_1 \cdot \frac{N_2}{l_2} \cdot i_2 \pi R_1^2 \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow M_2 = M \cos(\alpha)$$



$$K_2 = \frac{|\vec{B}_2|}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{l_2}} |\cos(\alpha)| = K \cdot |\cos(\alpha)|$$

Remarque : on peut généraliser le phénomène d'influence pour N circuits voisins.

$\Rightarrow$ Soit q, j deux entiers $\in [1, N]$. Le flux du champ $\vec{B}_q$ crée par $\mathcal{C}_q$ dans le circuit $\mathcal{C}_j$ est :

$$\phi_{q \rightarrow j} = M_{q \rightarrow j} \cdot i_q \quad \text{Donc le flux total à travers le circuit } \mathcal{C}_j \text{ est : } \phi_j = \sum_{q=1}^N M_{q \rightarrow j} i_q$$

avec $M_{q \rightarrow q} = L_q$ Donc $[\phi] = \underset{\substack{\text{Matrice inductance} \\ \text{(symétrique)}}}{(M)} \cdot [i]$

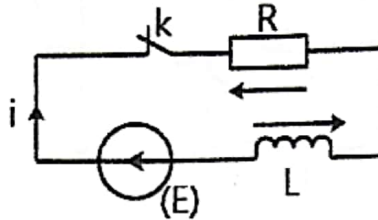
avec $[\phi] = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} ; [i] = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ i_N \end{pmatrix}$

et $(M) = (M_{q \rightarrow j}) \begin{matrix} 1 \leq q \leq N \\ 1 \leq j \leq N \end{matrix}$ avec diagonale
complète par les inductances propres.

4) Énergie magnétique :

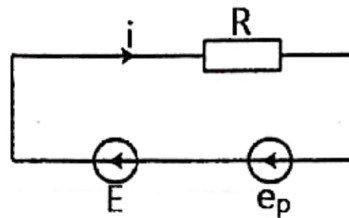
4-a) Cas d'un seul circuit :

Soit un circuit d'inductance L et de résistance R alimenté par un générateur de tension E . Le schéma équivalent est :



et puisque :

$$e_p = -\frac{d\phi_p}{dt} = -L\frac{di}{dt}; \text{ le schéma équivalent peut être aussi :}$$



Loi de Mailles : $E + e_p = Ri$

$$\Rightarrow Ei + e_pi = Ri^2$$

Soient : P_J : puissance dissipée par effet Joule. $\rightarrow P_J = Ri^2$

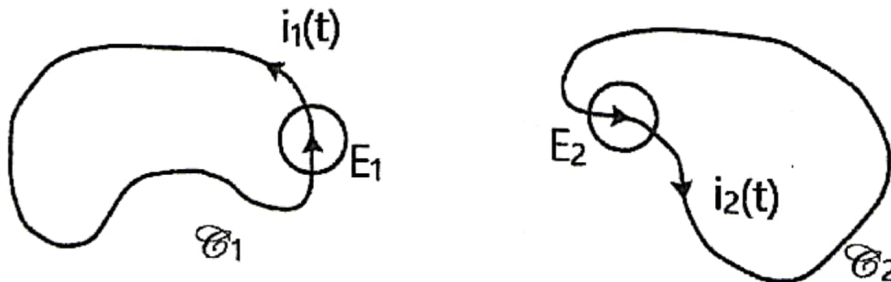
P_g : puissance fournie par le générateur. $\rightarrow P_g = Ei$

Donc la puissance magnétique emmagasinée est $P_m = P_g - P_J = -e_pi = L\frac{di}{dt}i$

$$\Rightarrow P_m = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \Rightarrow \text{L'énergie magnétique : } U_m = \frac{1}{2} Li^2$$

4-b) Cas de 2 circuits en influence (couplés) :

Soient 2 circuits $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en influence alimentés respectivement par les deux générateurs E_1 et E_2 .

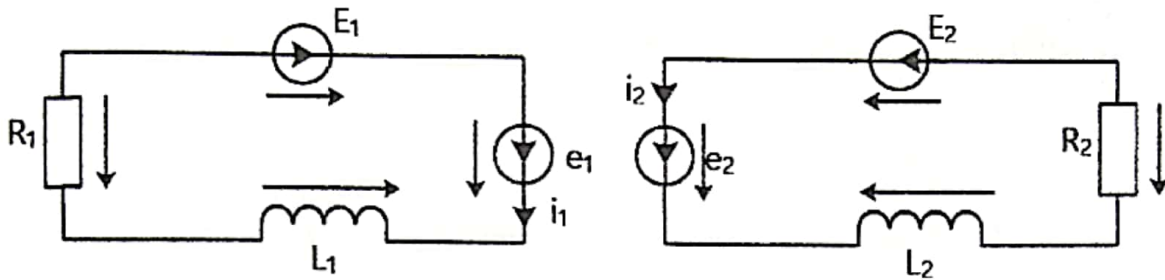


$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \Phi_m + \Phi_{p,2} \\
 &= \frac{B_m}{\mu_0} - \frac{d\Phi_{p,2}}{dt}
 \end{aligned}$$

On note : R_1, R_2 les résistances de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement.

L_1, L_2 les inductances propres de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement.

Le schéma équivalent est :



e_1 et e_2 sont dues à l'influence magnétique.

Donc

$$\begin{cases}
 e_1 = -\frac{d\Phi_{2 \rightarrow 1}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt} \\
 e_2 = -\frac{d\Phi_{1 \rightarrow 2}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}
 \end{cases}$$

Établir le bilan de puissance.

Loi des mailles :

$$\begin{aligned}
 & \bullet [E_1 + e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1] \cdot i_1 \\
 & \bullet [E_2 + e_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2] \cdot i_2 \\
 & \Rightarrow \begin{cases} E_1 i_1 = L_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{i_1^2}{2} \right) + R_1 i_1^2 + M \frac{di_2}{dt} \cdot i_1 & (a) \\ E_2 i_2 = L_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{i_2^2}{2} \right) + R_2 i_2^2 + M \frac{di_1}{dt} \cdot i_2 & (b) \end{cases} \\
 & (a) + (b) \Rightarrow \underbrace{E_1 i_1 + E_2 i_2}_{\text{puissance fournie}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)}_{\text{puissance emmagasinée}} + \underbrace{R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2}_{\text{puissance perdue}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow U_m &= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \\
 &= \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2M i_1 i_2) \\
 &= \frac{1}{2} ((L_1 i_1 + M i_2) i_1 + (L_2 i_2 + M i_1) i_2) \\
 &= \frac{1}{2} ((\Phi_{1 \rightarrow 1} + \Phi_{2 \rightarrow 1}) i_1 + (\Phi_{2 \rightarrow 2} + \Phi_{1 \rightarrow 2}) i_2) \\
 \Rightarrow U_m &= \frac{1}{2} (\Phi_1 i_1 + \Phi_2 i_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_q: U_m &= \frac{1}{2} L i^2 \\
 &= \frac{1}{2} \Phi_p \cdot i
 \end{aligned}$$

Remarque : $\Phi_{1 \rightarrow 2}$

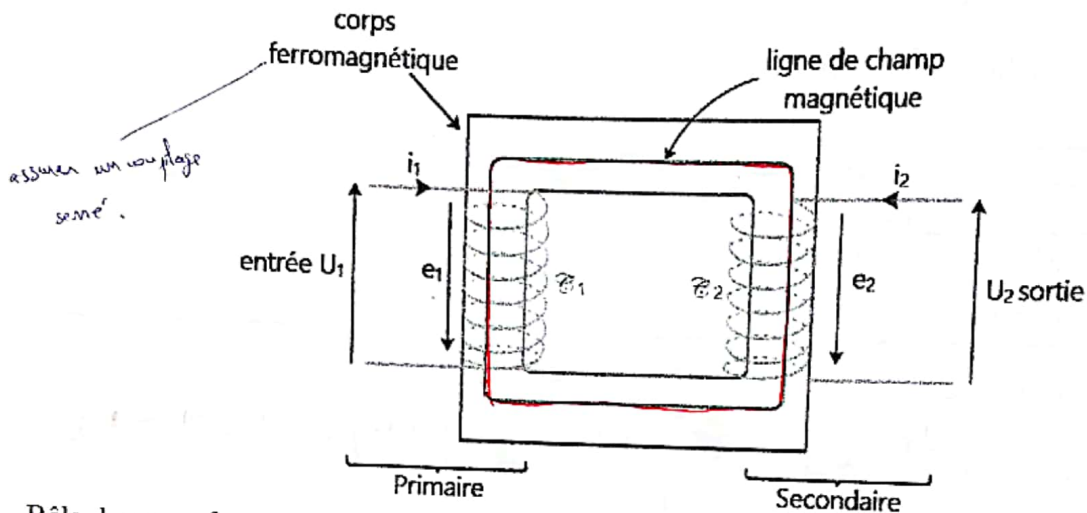
Ce résultat peut être généralisée pour N circuit :

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \phi_j i_j$$

avec $\phi_j = \sum_{q=1}^N M_{q \rightarrow j} i_q$ avec $M_{j \rightarrow j} = L_j$

5) Transformateur idéal :

Il est constitué par 2 bobinages enroulés sur un corps ferromagnétique commun.



Rôle du corps ferromagnétique :

C'est guider (ou canaliser) les lignes de champ magnétique.

→ Donc on obtient un couplage serré

$$\Rightarrow k = 1.$$

Soient N_1 et N_2 le nombre de spires de bobinages primaires $\mathcal{C}_1$ et secondaires $\mathcal{C}_2$ respectivement.

✓ On note e_1, e_2 les f.é.m induites totales (c-à-d propre + mutuelle) de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement.

$$\begin{aligned} U_1 = -e_1 &= + \frac{d\Phi_1}{dt} \\ U_2 = -e_2 &= + \frac{d\Phi_2}{dt} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = \frac{d\Phi_{p,1}}{dt} + \frac{d\Phi_{s,1}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \textcircled{a} \\ U_2 = \frac{d\Phi_{p,2}}{dt} + \frac{d\Phi_{s,2}}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad \textcircled{b} \end{cases}$$

$$\textcircled{a} \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_1} \left(U_1 - M \frac{di_2}{dt} \right)$$

$$\textcircled{b} \Rightarrow U_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \left(\frac{1}{L_1} U_1 - \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} \right) = \frac{M}{L_1} U_1 + \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) \frac{di_2}{dt}$$

$$k=1 \Rightarrow |M| = \sqrt{L_1 L_2} \Rightarrow L_2 - \frac{M^2}{L_1} = 0.$$

$$\Rightarrow \left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \left| \frac{M}{L_1} \right| = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \quad \text{or} \quad R_1 \ll l_1, R_2 \ll l_2 \text{ (approx.)}$$

$$\Rightarrow L_1 = \int_0^l \mu R_1^2 \cdot \frac{N_1^2}{\phi_1}$$

$$L_2 = \int_0^l \mu R_2^2 \cdot \frac{N_2^2}{\phi_2}$$

$$\text{avec } l_1 = l_2 = l \\ R_1 = R_2 = R.$$

$$\Rightarrow \left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \frac{N_2}{N_1}$$

Remarque :

Si $N_2 > N_1 \rightarrow$ Transformateur élévateur.

$N_2 < N_1 \rightarrow$ Transformateur abaisseur.

✓ Il existe des pertes par effet Joule au sein du corps ferromagnétique car il apparaît un courant de Foucault dans ce corps.

– Pour minimiser ces pertes on utilise un corps feuilleté.

V/ Circuit mobile dans un champ magnétique statique (cas de Lorentz)

1) Couplage électromagnétique :

a/ Couplage et conversion de puissance :

Lorsque le circuit (ou une partie du circuit) $\mathcal{C}$ est mobile dans $\vec{B}$, les grandeurs électriques (f.é.m induite e , intensité de courant $i(t)$...) et mécaniques (vitesse ...) sont couplées (dépendantes les unes des autres). Ce couplage est dit "couplage électromécanique".

En particulier l'équation mécanique (EM) fait intervenir les actions de Laplace et donc le courant et l'équation électrique (EE) fait intervenir la f.é.m induite et donc la vitesse.

Donc le comportement mécanique dépend des composants électriques et inversement, le comportement électrocinétique dépend des contraintes mécaniques.

Par conséquent, ces systèmes basés sur le couplage électromécanique peuvent jouer le rôle de convertisseur de puissance (ou transducteur).

Donc un tel système peut recevoir une puissance ou inversement (voir V-3).

Dans le 1^{ère} cas, le système joue le rôle d'un générateur ou d'un frein électromagnétique, alors que

Handwritten: $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$
dans le 2^{ème} cas, le système constitue un moteur électrique.

Théoriquement, les deux sens de conversion sont possibles, mais les appareils sont adaptés techniquement à un seul mode.

b/ Relations des puissances de Laplace et de la f.é.m induite :

Énoncé :

Quand un circuit est mobile dans un champ magnétique statique, le couplage électromécanique est parfait. La puissance des actions de Laplace P_L et celle de la f.é.m induite e se compensent :

$$P_L + ei = 0.$$

Interprétation :

La f.é.m e résulte de la force magnétique de Lorentz $\vec{F}_{\mathcal{L},m}$ appliquée sur les porteurs de charges entraînés par le circuit mobile $\mathcal{C}$ dans le $\vec{B}$ extérieur. En plus, on a vu dans I-4-a/ que la force de Laplace résulte de l'action du champ de Hall $\vec{E}_H$ sur les charges fixes du circuit $\mathcal{C}$. En outre, $\vec{E}_H$ résulte de l'action de la force magnétique de Lorentz $\vec{F}_{\mathcal{L},m}$ sur les porteurs de charges (Voir I-3-c). On en conclue que la f.é.m induite e et les actions de Laplace sont deux manifestations, à l'échelle macroscopique, des effets de la force magnétique de Lorentz $\vec{F}_{\mathcal{L},m}$ exercée sur les porteurs de charges entraînés par le circuit mobile dans le $\vec{B}$ extérieur. Or nous savons que la puissance associée à $\vec{F}_{\mathcal{L},m}$ est nulle ($P_{\mathcal{L},m} = \vec{F}_{\mathcal{L},m} \cdot \vec{v} = (q \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$)

Donc P_L et $P_{f.é.m} = ei$ doivent se compenser.

Conséquences :

✓ P_L et $P_{f.é.m}$ se compensent donc elles ne vont pas apparaître dans le bilan de puissance comme on va le voir dans les exemples traités dans les paragraphes suivants.

✓ Soit un circuit en translation à la vitesse $\vec{v} = v \vec{u}$ ($\vec{u}$: axe de translation) dans un $\vec{B}$ extérieur statique. $\vec{F}_L$ est de la forme $\vec{F}_L = ki(t) \vec{u}$ où k est une constante.

Alors la f.é.m induite e sera de la forme $e = -kv$ (car $\vec{F}_L \cdot \vec{v} + ei = 0 \Rightarrow kiv + ei = 0$)

✓ Soit un circuit en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$ ($\vec{u}$: axe de rotation) dans un $\vec{B}$ extérieur statique.

$\vec{\Gamma}_L$ est de la forme $\vec{\Gamma}_L = \phi_0 i(t) \vec{u}$ où ϕ_0 est une constante homogène à un flux de $\vec{B}$. Alors la f.é.m induite e sera de la forme $e = -\phi_0 \omega(t)$ (car $\vec{\Gamma}_L \cdot \vec{\omega} + ei = 0 \Rightarrow \phi_0 i \omega + ei = 0$)

c/ méthode de résolution d'un problème d'électromécanique :

Un système électromécanique est composé d'un système électrique et d'un système mécanique couplés par le phénomène d'induction et les actions de Laplace.

Pour étudier ces systèmes, on adapte en général le plan suivant :

- Analyse qualitative et exploitation de la loi de Lenz.
- Choix d'un repère d'espace et d'un sens positif arbitraire.
- Détermination de la f.é.m induite par la loi de Faraday.

- Établissement de l'équation électrique ($E.E$) par l'application de la loi des mailles sur le schéma électrique équivalent.
- Détermination des actions de Laplace.
- Établissement de l'équation mécanique ($E.M$) par l'application de la RFD ou le TMC selon la nature du mouvement (translation ou rotation respectivement).
- Résolution du système différentiel $\begin{cases} (E.E) \\ (E.M) \end{cases}$ pour déterminer en général la vitesse ou l'intensité.
- Établissement du bilan énergétique par $\begin{cases} (E.E).i \\ (E.M).v \text{ ou } \omega \text{ (cas de translation ou cas de rotation respectivement)} \end{cases}$
- Exploitation des résultats pour l'interprétation des phénomènes ou pour des applications technologiques.

Remarque :

L'ordre de certaines étapes de ce plan peut être changé d'un problème à un autre.

2) Conversion de puissance mécanique en puissance électrique (Mode générateur ou frein électromécanique) :

a/ Rails de Laplace (Mode frein)

Revenons à l'exemple des rails de Laplace sans générateurs électrique présenté dans le paragraphe III-2-d/ de la partie 2 du cours. On rappelle que l'opérateur déplace la tige juste à l'état initial $t = 0$ à la vitesse initial $\vec{v}_0$

On a déjà décrit le phénomène et on a déterminé l' $E.E$: $e = Ri$; la f.é.m $e = -vBa$ et

l'intensité $i = \frac{-vBa}{R}$. En plus on a vérifié la loi de Lenz.

Pour achever l'étude électromécanique de ce système; il reste à déterminer $\vec{F}_L$, l' $E.M$; la vitesse et le bilan énergétique.

Chercher $\vec{F}_L$ appliquée sur la tige lors de son mouvement.

Commenter. Déterminer la puissance mécanique P_L .

$$\vec{B} \text{ uniforme} \Rightarrow \vec{F}_L = i \vec{AD} \wedge \vec{B} = iaB \vec{y} \quad (i = i_{\text{induit}})$$

$$i = -\frac{vBa}{R} < 0 \text{ car } v > 0 \Rightarrow \vec{F}_L \parallel -\vec{y} \Rightarrow \text{opposé au mv} \rightarrow \text{Freinage.}$$

$$P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = iaBv = -\frac{(Ba)^2}{R} v^2 < 0 \quad \text{Rq: } \vec{F}_L = -\frac{(Ba)^2}{R} \vec{v} : \text{Forme de frottement de type visqueux}$$

Établir l' $E.M$:

$$T_r \Rightarrow \text{RFD} : m \frac{dv}{dt} = \vec{F}_L + \vec{P} + \vec{R}^a : \text{Proj} // \vec{y} : m\dot{v} = iaB + 0 + 0$$

Résoudre le système $\begin{cases} E.E \\ E.M \end{cases}$ pour déterminer v , tracer $v(t)$ et commenter.

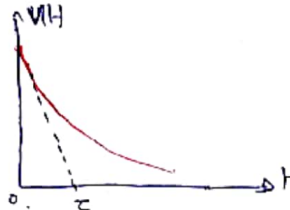
$$(EM): m\dot{v} = iaB$$

$$(EE): i = \frac{-vBa}{R}$$

$$\Rightarrow m\dot{v} = \frac{-(Ba)^2}{R} v$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \quad \text{ou} \quad \tau = \frac{mR}{(Ba)^2}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-t/\tau}$$



on peut jouer sur B et R
(des supraconducteurs)

La tige s'arrête alors après $\sim 5\tau = \frac{5mR}{(Ba)^2}$.

Établir le bilan énergétique. Commenter.

$$(EE): \Rightarrow Ri^2 = -vBa i$$

$$(EM): v \Rightarrow m\dot{v} = iaBv$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = -Ri^2 < 0$$

Commentaire: L' E_c de la tige $\rightarrow$ au cours de t (Freinage) en la transformant en chaleur par effet joule.

Commenter l'absence de P_L et $P_{fém}$ dans le bilan énergétique.

$$P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = iBa v$$

$$P_{fém} = e \cdot i = -vBa i$$

$\Rightarrow P_L$ et $P_{fém}$ se compensent et ceci est prévu par la loi
 $P_L + P_{fém} = 0$ puisque $\vec{B}$ statique.

Remarque :

Le déplacement de la tige dans le champ $\vec{B}$ a créé une puissance électrique $P_e = ei$. Le freinage s'accompagne alors d'une génération de puissance qui pourra être emmagasinée comme c'est le cas pour certains moyens de transports.

Cependant ce système ne pourra pas constituer un générateur permanent car la tige finit par s'arrêter.

L'idée est donc d'entraîner la tige avec une force de traction constante. Ceci constitue l'objet du paragraphe suivant.

b/ Rails de Laplace (Mode générateur)

Le système est identique à celui du paragraphe précédent sauf que maintenant l'opérateur exerce sur la tige une force de traction constante $\vec{f} = f\vec{u}_y$ lors de son mouvement et non pas uniquement à l'état initial $t = 0$. On suppose qu'à $t = 0$, la tige est au repos ($v(t = 0) = 0$).

Ce système reçoit donc une puissance mécanique $P_{\text{méca}} = \vec{f} \cdot \vec{v}$ et la convertit en puissance électrique $P_{\text{em}} = e.i$.

La partie électrique est inchangée donc on conserve les mêmes expressions de e et de l'EM établies dans la paragraphe précédent. Cependant ; l'EM devient $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_L + \vec{p} + \vec{R} + \vec{f}$.

Projection sur $\vec{u}_y \rightarrow \boxed{m \cdot \frac{dv}{dt} = iaB + f}$ E.M.

Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{l} E.E \\ E.M \end{array} \right\}$ pour déterminer $\vec{v}$. Tracer $v(t)$. Commenter.

$$(EE) \Rightarrow i = \frac{-vBa}{R}$$

$$(EM) \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = iaB + f$$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -\frac{v(Ba)^2}{R} + f$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{f}{m} \quad \text{où } \tau = \frac{mR}{(Ba)^2}$$

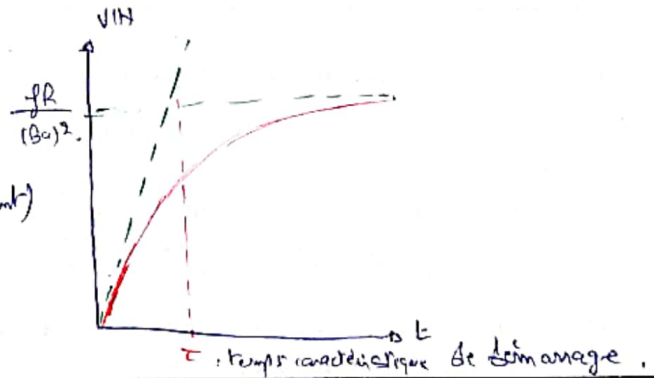
$$\Rightarrow v = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + v_p \quad \text{ou } v_p = \frac{\tau f}{m}$$

$$v(t=0) = 0 \Rightarrow A = -v_p \Rightarrow v = \frac{\tau f}{m} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$v = \frac{fR}{(Ba)^2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

La tige atteint une vitesse de R° permanent)

ce qui assure une production continue de l'énergie.



Déterminer l'intensité $i(t)$. Commenter.

$$(E.E.) \Rightarrow v = \frac{-R}{Ba} i \quad (E.M.) \Rightarrow \frac{-mR}{Ba} \frac{di}{dt} = iab + f$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = -\frac{fBa}{mR} \quad \text{ou } \tau = \frac{-mR}{(Ba)^2}$$

$$\Rightarrow i = A e^{-\frac{t}{\tau}} + i_p \quad \text{ou } i_p = \frac{-\tau f Ba}{mR} = -\frac{f}{Ba}$$

$$i(t=0)=0 \Rightarrow i = -\frac{f}{Ba} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Rq : ou bien

$$\begin{aligned} i &= \frac{-vBa}{R} \\ &= \frac{-Ba}{R} \frac{dh}{(Ba)^2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ &= \frac{f}{Ba} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{aligned}$$

Établir le bilan de puissance. *En régime permanent ($t \gg \tau$) $i = -\frac{f}{Ba} < 0$: loi de Lenz.*

$$(E.E.) \Rightarrow Ri^2 = -vBa$$

$$(E.M.) \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = iBa + \underbrace{f}_{\text{Poussée}}$$

$$P_{\text{opérateur}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)}_{E_c} + \underbrace{Ri^2}_{\text{Puissance dissipée par effet Joule}}$$

En déduire le bilan de puissance en régime permanent.

Commenter.

$$\text{En régime permanent : } v = cte \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow P_{\text{opérateur}} = Ri_p^2 \quad \text{Commentaire : Après } 5\tau \text{ : la réaction exercée par l'opérateur compense les pertes Joule et assure un mouvement continu de la tige.}$$

c/ Principe de l'alternateur (générateur)

Reprenons l'exemple de la spire rectangulaire $NPQR(\mathcal{C})$ étudiée dans le paragraphe (I-11-a/) de la partie 1 du cours.

Un opérateur fournit une puissance mécanique $P_{\text{opér}}$ à cette spire $\mathcal{C}$ en exerçant un couple

$$\vec{\Gamma}_{\text{opér}} = \Gamma_{\text{opér}} \vec{u}_y, \text{ tel que } \vec{\omega} = \omega \vec{u}_y \text{ où } \omega = \text{constante} > 0.$$

Selon le cas de Lorentz, la rotation de cette spire dans le champ magnétique constante $\vec{B} = B \vec{u}_x$ induit un courant d'intensité $i(t)$. Le système se comporte alors comme un générateur.

$$\text{On a déjà calculé le couple de Laplace } \vec{\Gamma}_L = ibaB \sin \alpha \vec{u}_y$$

$\mathcal{C}$ présente une résistance R et une inductance propre L .

$\mathcal{C}$ constitue le rotor de ce système électromécanique et le dispositif qui crée le champ magnétique constitue son stator.

Le couple de l'opérateur assure une vitesse de rotation constante $\omega > 0$ autour de (oy) . Établir l'EM :

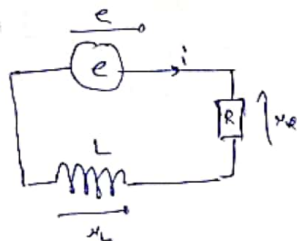
$$TMC: J \cdot \dot{\omega} = \Gamma_{\text{op}} + \Gamma_{\text{pes}}(\text{couple des poids mfp}) \quad \omega = \dot{\alpha}$$

$$\Rightarrow J \dot{\omega} = \Gamma_{\text{op}} + i b a \beta \sin(\alpha) \quad ; \quad \Gamma_{\text{op}} + i b a \beta \sin(\alpha) = 0$$

Déterminer la f.é.m induite et en déduire l'EE :

$$\Phi = \iint_{NPQR} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^b \int_0^a B \, dx \, dy \cdot \cos(\alpha) = B a b \cos(\alpha)$$

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (B a b \cos(\alpha)) = - B a b \omega \sin(\alpha) \quad \alpha = \omega t$$



$$e = L \frac{di}{dt} + R i(t)$$

$$L \frac{di}{dt} + R i(t) = B a b \omega \sin(\omega t)$$

Selon l'EE; $i(t)$ atteint un régime permanent sinusoïdal (forcé).

En utilisant la notation complexe résoudre l'EE et déterminer $i(t)$ dans ce régime sinusoïdal.

(EE): $L \frac{di}{dt} + R i(t) = B a b \omega \sin(\omega t)$, cherchons $i(t)$ de la forme

$$i(t) \rightarrow \underline{i}(t) = I_m e^{i(\omega t - \phi_0)} = \underline{I}_m \cdot e^{i\omega t}$$

$$\underline{i}(t) = \frac{I_m \sin(\omega t - \phi_0)}{I_m \sin(\omega t - \phi_0)}$$

$$(EE) (L i \omega + R) \underline{I}_m = B a b \omega \Rightarrow \underline{I}_m = \frac{B a b \omega}{R + i L \omega}$$

$$\underline{I}_m = |\underline{I}_m| = \frac{B a b \omega}{\sqrt{R^2 + (L \omega)^2}} ; \phi_0 = -\arg(\underline{I}_m) = \arg\left(\frac{1}{\underline{I}_m}\right) = \arg\left(\frac{L \omega}{R}\right)$$

En déduire $\Gamma_{\text{opér}}$ nécessaire pour maintenir $\omega = \text{constante} > 0$ et déterminer sa valeur moyenne temporelle $\langle \Gamma_{\text{opér}} \rangle$.

Remarque :

On rappelle que $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$

$$\begin{aligned} |g(\arg)| &= \frac{I_m}{R_e} \\ \cos(\arg) &= \frac{R_e}{|Z|} \\ \sin(\arg) &= \frac{I_m}{|Z|} \end{aligned}$$

Alors : $\langle \sin^2(\omega t + \psi_0) \rangle = \langle \cos^2(\omega t + \psi_0) \rangle = 1/2 \forall \psi_0 = \text{constante.}$

$$\langle \sin(\omega t + \psi_0) \cos(\omega t + \psi_0) \rangle = 0$$

$$\langle \sin(\omega t + \psi_0) \rangle = \langle \cos(\omega t + \psi_0) \rangle = 0$$

$$\text{EM: } \Gamma_{op} = i I H b a B \sin(\omega t) = \frac{(B a b)^2 \omega}{\sqrt{R^2 + (L \omega)^2}} \cdot \sin(\omega t - \varphi_0) \cdot \sin(\omega t)$$

$$\langle \Gamma_{op} \rangle = \frac{(B a b)^2 \omega}{\sqrt{R^2 + (L \omega)^2}} \langle \sin(\omega t - \varphi_0) \cdot \sin(\omega t) \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \sin(\omega t - \varphi_0) \cdot \sin(\omega t) \rangle &= \langle \sin^2(\omega t) \cdot \cos(\varphi_0) - \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\varphi_0) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \cos(\varphi_0) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\frac{B a b \omega R}{(L \omega)^2 + R^2}}{\frac{B a b \omega}{\sqrt{R^2 + (L \omega)^2}}} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L \omega)^2}} \end{aligned}$$

$$\langle \Gamma_{op} \rangle = \frac{B^2 (a b)^2 \omega R}{2 (R^2 + (L \omega)^2)}$$

3) Conversion de puissance électrique en puissance mécanique (Mode moteur) :

a/ Rails de Laplace (Mode moteur)

Reprenons l'exemple des rails de Laplace alimentées par un générateur de tension continue E évoqué dans le paragraphe I-4-d/ de la partie 1 du cours.

On a déjà calculé la force de Laplace $\vec{F}_L = i a B \vec{u}_y$.

Le système reçoit une puissance électrique du générateur et la convertit en puissance mécanique qui est en fait la puissance de Laplace $P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = i a B v$.

P_L permet à la barre de glisser. C'est le principe du moteur électrique.

Selon le paragraphe II-2-d de la partie 2 du cours on a déterminé la f.é.m induite $e = -v B a$.

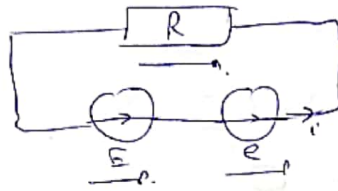
Donc sa puissance est $P_{f.é.m} = e \cdot i = -v B a i = -P_L$ d'où la relation des puissances

$$P_{f.é.m} + P_L = 0 \text{ est bien vérifiée.}$$

Établir le système des équations couplées $\begin{cases} E \cdot E \\ E \cdot M \end{cases}$ On négligera le phénomène d'auto-induction.

$$\text{RFD: } m \frac{dv}{dt} = \vec{F}_L + \vec{P} + \vec{R} \cdot \text{loj sur } \vec{y} : \boxed{m\dot{v} = iaB} \quad \text{EM.}$$

« Circuit Equi. »



$$E + e = Ri$$

$$\Rightarrow \boxed{E - vBa = Ri} \quad \text{EE.}$$

Résoudre le système $\begin{cases} E.E \\ E.M \end{cases}$ et déterminer $\begin{cases} v(t) \\ i(t) \end{cases}$

$$(EE) \Rightarrow i = \frac{E - vBa}{R} \Rightarrow (EM) : m\dot{v} = \frac{(Ba)^2}{R} v + \frac{aBE}{R}$$

$$\Rightarrow \dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{aBE}{mR} \quad \text{ou } \tau = \frac{mR}{(Ba)^2}$$

$$v = v_H + v_p = A \cdot e^{-t/\tau} + v_p \quad ; v_p = \gamma_e \Rightarrow v_p = \frac{\tau aBE}{mR} = \frac{E}{Ba}$$

$$v(t=0) = 0 \Rightarrow v(t) = \frac{E}{Ba} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\text{Donc } i(t) = \frac{E}{R} - \frac{Ba}{R} \cdot \frac{E}{Ba} \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-t/\tau}$$

Comparer le régime permanent de ce mode moteur des rails de Laplace avec le mode générateur étudié dans le paragraphe V-2-b.

Rappel : Mode générateur,
$$\begin{cases} V(t) = \frac{fR}{(Ba)^2} (1 - e^{-t/\tau}) \\ i(t) = -\frac{f}{Ba} (1 - e^{-t/\tau}) \end{cases}$$

Mode Moteur,
$$\begin{cases} V^{(m)}(t) = \frac{E}{Ba} (1 - e^{-t/\tau}) \\ i^{(m)}(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} \end{cases}$$

En régime permanent,
$$\begin{cases} V_{\infty}^{(g)} = \frac{fR}{(Ba)^2} \\ i_{\infty}^{(g)} = -\frac{f}{Ba} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_{\infty}^{(m)} = \frac{E}{Ba} \\ i_{\infty}^{(m)} = 0 \end{cases}$$

- * $i_{\infty}^{(m)} = 0$ alors que $i_{\infty}^{(g)} \neq 0$. $\rightarrow$ le générateur est destiné pour la production du courant électrique.
- * $V_{\infty}^{(g)} \neq 0$, $V_{\infty}^{(m)} \neq 0$; $V_{\infty}^{(m)}$ est proportionnelle à l'excitation en particulier $V_{\infty}^{(m)} = fV(E) = f(\sin \omega t)$
 $V_{\infty}^{(g)} = fV(i) = f(\cos \omega t)$

Établir le bilan de puissance.

$$\begin{cases} (EE).i \\ (Ei).v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ei - vBai = Ri^2 \\ miv = iBav \end{cases} \Rightarrow \underbrace{Ei}_{\text{Puiss fournie par le générateur}} = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (mv^2)}_{E_c} + \underbrace{Ri^2}_{\text{Puiss perdue par effet Joule}}$$

Remarque :

Dans ce mode moteur; la puissance fournie est $P_{\text{générateur}}$ par contre dans le mode générateur; la puissance fournie est $P_{\text{opérateur}}$ donc si on remplace $P_{\text{générateur}}$ par $P_{\text{opérateur}}$ dans l'équation; on retrouve le bilan de puissance du mode générateur (voir V-2-b)

Déterminer le bilan énergétique total du système entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant final $t = +\infty$. En déduire le rendement de ce moteur. Commenter.

* Energie fourni par le générateur : $W_G = \int_0^{+\infty} P_G \cdot dt = \int_0^{+\infty} E \cdot i(t) \cdot dt$

$$\Rightarrow W_G = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt = \frac{E^2}{R} \cdot (-\tau) \cdot \left[e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^{+\infty} \Rightarrow W_G = \frac{E^2 \tau}{R} = \frac{m E^2}{(B_0)^2 L}$$

* Energie cinétique: $\Delta E_c = E_c(t=\infty) - E_c(t=0)$.

$$= \frac{1}{2} m (V_0^2 - 0) = \frac{1}{2} m \left(\frac{E}{B_0} \right)^2 = \frac{m E^2}{2 (B_0)^2} = \frac{W_G}{2}$$

selon le principe de conservation, l'énergie produite par effet Joule

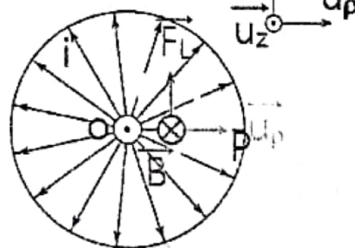
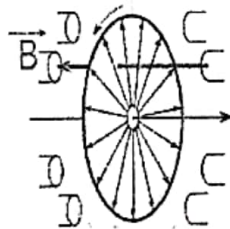
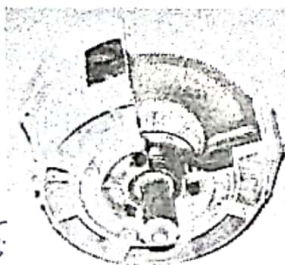
$W_G = W_G - \Delta E_c = W_{G/2}$: donc une équipartition de l'énergie fournie par le générateur entre les 2. forme cinétique et thermique.

b/ Machine (ou Moteur) à courant continu (MCC) à entrefer plan

* Rendement : $\frac{P_{utile}}{P_{fournie}} = \frac{E \cdot i_{utile}}{E \cdot i_{fournie}} = \frac{\Delta E_c}{W_G} = 50\%$: faible

Description :

Nous allons maintenant étudier le principe du moteur à courant continu (c.à.d alimenté en courant continu et non alternatif) à entrefer plan, c.à.d que l'espace rotor et le stator est un plan.



Le stator (voir figure) est constitué d'un ensemble d'aimants placés de part et d'autre du rotor. Ce stator crée un champ magnétique constant $[\vec{B} = -B\vec{u}_z \text{ (} B = \text{constante} > 0 \text{)}]$. Le rotor est une roue d'axe (oz) constituée d'un cercle externe et de rayon, tous conducteurs. Un dispositif, non représenté, permet à un courant électrique de circuler radialement entre le centre et la périphérie, le long des rayons.

Analyse qualitative :

Ce dispositif est réversible et peut fonctionner en générateur ou en moteur. On s'intéresse au mode moteur.

Le système reçoit donc une puissance électrique fournie par le générateur de f.é.m E et la convertit en puissance mécanique de Laplace.

Chaque rayon est parcouru par un courant et soumis à un $\vec{B}$ extérieur donc il subit une force de

$$V_H = \int_{-H}^H \vec{E} \cdot d\vec{r} = e.$$

Laplace. L'ensemble de toutes les forces de Laplace est de résultante nulle, mais de couple non nul : $\vec{\Gamma}_L$.

Ce couple tend à faire tourner la roue autour de (oz) . Le rotor étant mobile dans $\vec{B}$, il apparaît une f.é.m induite e opposée à la f.é.m E du générateur selon la loi de Lenz.

Calculer $\vec{\Gamma}$: le couple moteur de Laplace. On note a le rayon de la roue et N le nombre des rayons.

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= N \cdot \vec{\Gamma}_{\text{rayon}}, \quad \vec{\Gamma}_{\text{rayon}} = \vec{OH} \wedge \vec{F}_{\text{rayon}} = \vec{OH} \wedge (i \vec{OP} \wedge \vec{B}) \\ &= \frac{a}{2} \vec{y}_p \wedge (i a \vec{y}_p \wedge B(-\vec{x}_2)) = i \frac{a^2}{2} B \vec{x}_2. \\ \Rightarrow \vec{\Gamma} &= N i \frac{a^2}{2} B \vec{x}_2. \end{aligned}$$

ça ma bien $\Gamma = \Phi i$ or $\Phi = N \frac{a^2}{2} B$

On ne peut pas utiliser la loi de Faraday pour déterminer la f.é.m induite e . En déduire l'expression de e de $\vec{\Gamma}_L$.

Puissance électromagnétique : $\Rightarrow P_{\text{em}} + P_r = 0 \Rightarrow e i = -\Gamma \omega \Rightarrow e = -\frac{\Gamma \omega}{i} = -\Phi \omega = -\frac{N a^2 B \omega}{2}$

Inconvénients de cette MCC :

En pratique, l'alimentation du rotor nécessite un contact électrique frottant en rotation assuré par des balais. Ces contacts créent un couple résistant et s'usent. Ils doivent donc être remplacés régulièrement.

La MCC est alors peu adaptée aux vitesses de rotation élevées.

Sa puissance disponible reste limitée à environ 1 kW.

Avantages de cette MCC passive.

La MCC à entrefer plan a un faible encombrement, une faible inertie et une faible inductance propre. Par suite, son temps de réponse est extrêmement court.

La vitesse de la MCC à entrefer plan est très contrôlée et stable (de 1 à 4000 tour/min). Elle présente une très grande accélération angulaire (jusqu'à 150 000 rad/s²). Son couple est indépendant de la vitesse de rotation.

Applications :

La MCC à entrefer plan est utilisée, en général, lorsqu'il faut créer un mouvement de rotation de précision dans un volume limité. Sa géométrie très plate est appréciée en motorisation des bicyclettes, des chaises roulantes et des véhicules solaires. Sa précision de rotation est exploitée en robotique industrielle, médicale (pompes à sans, à dialyse...), informatique (disque de stockage...) et militaire (chargeurs automatiques...)...