
Support de Cours : Généralités sur l'Optique Ondulatoire.

Phénomène d'interférence lumineuse

Cohérence Temporelle

2eme Année MP/T/PC

Proposé par : Prof. Neil JOMAA

I) Généralités :

I-1) Vibration lumineuse et le modèle scalaire de la lumière :

Selon l'électromagnétisme (Équations de Maxwell) lumière $\equiv$ Onde électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$

Mais 50 ans avant l'établissement des équations de Maxwell ; Fresnel a proposé la notion de vibration lumineuse $s(M, t)$.

→ En fait $s \equiv E$ qui est le module du champ électrique $\vec{E}$.

→ Modèle scalaire de la lumière.

"s" se propage le long des rayons lumineux.

→ Rayon $// \vec{k}$: direction de propagation

Vitesse de propagation est $V = \frac{c}{n}$ (dans un milieu transparent homogène)

$$\text{Or } V = V_\varphi = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{c} \cdot n}$$

Or dans le vide, loin de sources, illimité, $\frac{\omega}{c} = k_0$ et on a $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ Donc $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n}$

I-2) Intensité (I) et Éclairement (ϵ) de la lumière :

Un photo-récepteur (exemple : œil, camera, photo-diode,...) présente un temps de réponse $\tau \gg T_{\text{visible}}$: période des ondes lumineuses.

exp : $\tau_{\text{oeil}} = 0,1s$ or $T_{\text{visible}} \simeq 10^{-15}s$

→ intensité est proportionnelle à $\langle \text{puissance} \rangle$

d'ailleurs, selon le module de l'électromagnétisme : $I = \frac{\langle P_{\text{ray}} \rangle}{\text{surface}} = \langle \|\vec{\pi}\| \rangle$

$$\text{Or } \|\vec{\pi}\| = \frac{\|\vec{E} \wedge \vec{B}\|}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \Rightarrow I \text{ est proportionnelle à } \langle E^2 \rangle$$

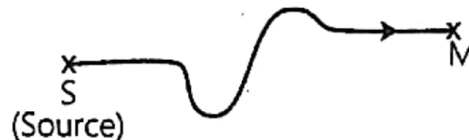
L'éclairement est ε proportionnel à I .

Conclusion : à une constante multiplicative près : $I \equiv \varepsilon \equiv \langle E^2 \rangle = \langle \underline{E} \cdot \underline{E}^* \rangle$ où $\underline{E}^*$ est le conjugué de $\underline{E}$, Or $s = E$.

$$\Rightarrow I \equiv \varepsilon \equiv \langle s^2 \rangle = \langle \underline{s} \cdot \underline{s}^* \rangle$$

I-3) Chemin optique :

Considérons un milieu transparent quelconque :



$$\text{Le chemin optique } (SM) = L_{SM} = \int_S^M n \cdot dl$$

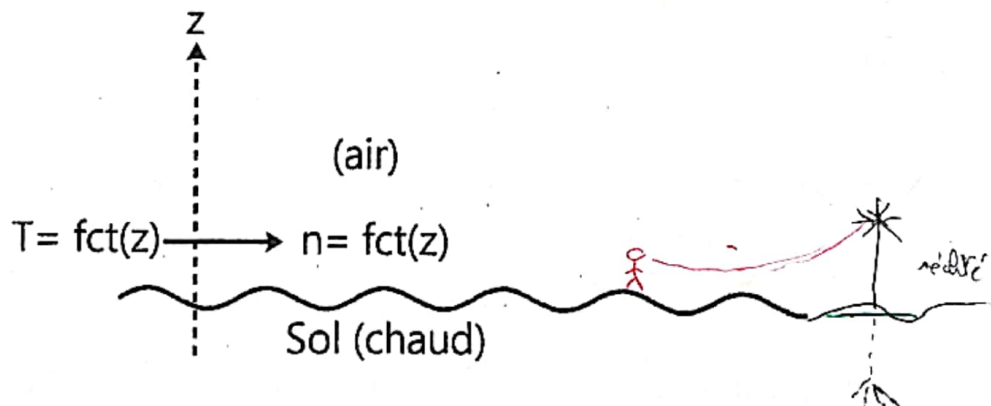
$$(SM) = L_{SM} = (SM)$$

où n est l'indice optique du milieu et dl un élément de longueur sur le chemin suivi par la lumière.

Si le milieu est homogène → $n = \text{cte}$

$$\Rightarrow (SM) = n \cdot SM$$

Exemple :

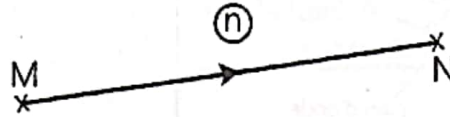


Ceci explique le phénomène du mirage.

I-4) Relation fondamentale entre le chemin optique et le retard de phase :

Considérons une vibration lumineuse monochromatique : $s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$
 $\varphi(M)$: Retard de phase au point M par rapport à la source S de création de la vibration.

$\varphi(N) = \varphi(M) + \omega \cdot t_{MN}$ avec t_{MN} : durée de la propagation de la lumière du point M vers le point N .



(Milieu homogène d'indice n)

$$\text{Or } t_{MN} = \frac{MN}{v} = \frac{1}{c} \cdot \underbrace{n \cdot MN}_{(MN)}$$

$$\text{Donc } \varphi(N) = \varphi(M) + \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{\frac{2\pi}{\lambda_0}} \cdot (MN)$$

Conclusion : $\varphi(N) = \varphi(M) + \frac{2\pi}{\lambda_0} (MN)$

I-5) Surface d'onde et théorème de Malus :

* La surface d'onde relative à une source ponctuelle S est définie par l'ensemble des points M tels que $(SM) = \text{cte}$ (cte).

$$\text{Or } \varphi(M) = \underbrace{\varphi(S)}_{\varphi_0 = \text{cte (phase initiale)}} + \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM)$$

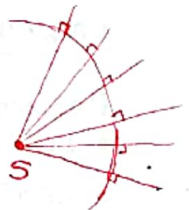
$\Rightarrow \varphi(M) = \text{cte} \rightarrow \text{surface d'onde} \equiv \text{Surface équiphasé}$

En plus $s(M, t) = A(M) \cdot \cos(\omega t - \underbrace{\varphi(M)}_{\text{cte}})$

$\Rightarrow$ à t fixé, $s(M, t) = \text{cte}$ pour un point $M \in \text{surface d'onde}$.

* : Théorème de Malus :

Les surfaces d'onde relative à la source S sont orthogonales aux rayons issus de S .



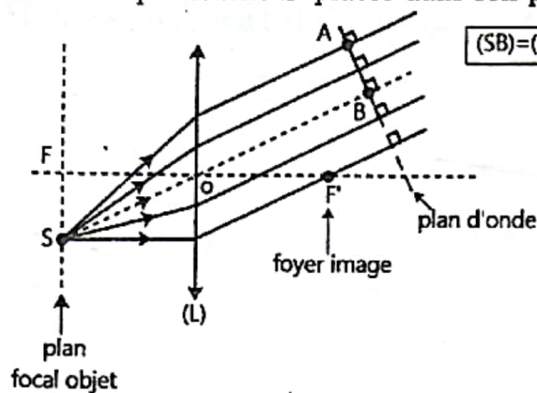
I-6) Onde lumineuse Plane :

* La surf d'onde est plane

$\xRightarrow{\text{Malus}}$ les rayons lumineux sont parallèles.

* Ce type d'onde peut modéliser :

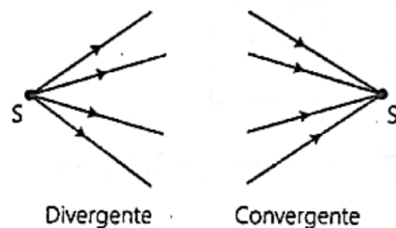
- Un faisceau LASER
- La lumière issue d'une source située à l'infini (exemple : étoile).
- La lumière émise par un collimateur (c.à.d l'ensemble formé par une lentille convergente (L) et une source ponctuelle S placée dans son plan focal objet) :



répéter la figure

I-7) Onde Lumineuse Sphérique :

La surface d'onde est une sphère de centre S (source ponctuelle) $\xRightarrow{\text{Malus}}$ les rayons sont des droites concourantes au point S



Ce type d'onde modélise la lumière émise par une source ponctuelle placée dans un milieu homogène.

I-8) Modèle de l'émission lumineuse :

I-8-a/ Types de lumière et densité spectrale d'éclairement :

Remarque :

- Lumière blanche $\rightarrow$ lumière polychromatique de spectre continue
 - LASER $\rightarrow$ lumière quasi-monochromatique.
 - Lampe spectrale $\rightarrow$ lumière polychromatique de spectre discontinue
- Une source lumineuse est caractérisée par une densité spectrale d'éclairement (ou d'intensité) noté :

$$\checkmark \varepsilon_{\lambda} = \frac{d\varepsilon}{d\lambda} \left(\text{ou } I_{\lambda} = \frac{dI}{d\lambda} \right) \text{ par rapport à } \lambda$$

$$\checkmark \varepsilon_\nu = \frac{d\varepsilon}{d\nu} \left(\text{ou } I_\nu = \frac{dI}{d\nu} \right) \text{ par rapport à } \nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\checkmark \varepsilon_\sigma = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \left(\text{ou } I_\sigma = \frac{dI}{d\sigma} \right) \text{ par rapport à } \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

I-8-b/ train d'onde :

Les atomes d'une source lumineuse n'émettent pas la lumière de façon continue, mais sous forme de train d'onde de durée de vie noté τ_c appelée temps de cohérence. En fait, un train d'onde est un paquet d'onde.

$\checkmark \tau_c$ vérifie : $\Delta\nu \cdot \tau_c \sim 1$ (voir la transformée de Fourier définie dans le paragraphe du paquet d'onde du chapitre sur la propagation des ondes électromagnétiques dans le plasma et le métal.) où $\Delta\nu$: largeur spectrale de la source supposée quasi-monochromatique.

Remarque :

$\checkmark$ une source monochromatique émet un seul train de durée de vie τ_c infinie (c'est une source théorique)

En effet : monochromatique $\rightarrow \Delta\nu = 0 \Rightarrow \tau_c = \frac{1}{\Delta\nu} \rightarrow +\infty$.

$\checkmark$ La phase initiale φ_0 de l'onde lumineuse émise par une source S change de façon aléatoire d'un train à un autre.

c/ Largeur (ou longueur) de cohérence temporelle (notée L_c) :

définition : c'est la distance parcourue dans le vide par le train d'onde pendant sa durée de vie τ_c .

$\Rightarrow L_c = c \cdot \tau_c$ où c : célérité de la lumière dans le vide.

$\checkmark$ Exemples :

Source	$\tau_c(s)$	$\Delta\nu(Hz)$	L_c
lumière blanche	$3 \cdot 10^{-15}$	$3 \cdot 10^{14}$	$0,9 \mu m$
Lampe Hg	10^{-12}	10^{12}	$0,3 mm$
Laser	10^{-6}	$7,5 \cdot 10^5$	$300m$

$\Rightarrow$ LASER : source la plus cohérente

I-9) Définition de l'interférence entre 2 ondes :

Soient 2 ondes lumineuses d'intensité I_1 et I_2 (ou d'éclairement ε_1 et ε_2) respectivement.

Soit I (ou ε) l'intensité (ou l'éclairement) de l'onde résultante de leur superposition.

On dit qu'on a interférence si $I \neq I_1 + I_2$ (ou $\varepsilon \neq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$).

C.à.d $I = I_1 + I_2 + \text{Terme d'interférence}$.

I-10) Superposition de 2 ondes lumineuses. Conditions d'interférence :

Considérons 2 sources S_1 et S_2 émettant 2 vibrations lumineuses :

$$s_1(M, t) = A_1 \cdot \cos(\underbrace{\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \varphi_{01}}_{\varphi_1})$$

$$s_2(M, t) = A_2 \cdot \cos(\underbrace{\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \varphi_{02}}_{\varphi_2})$$

Dans le cadre du modèle scalaire :

$$I_1 = \langle s_1^2 \rangle = \frac{A_1^2}{2} \Leftrightarrow A_1 = \sqrt{2I_1}$$

$$I_2 = \langle s_2^2 \rangle = \frac{A_2^2}{2} \Leftrightarrow A_2 = \sqrt{2I_2}$$

La vibration de l'onde résultante est $s = s_1 + s_2$

$\Rightarrow$ L'intensité de l'onde résultante est

$$I = \langle s^2 \rangle = \langle (s_1 + s_2)^2 \rangle = \langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle + 2 \langle s_1 s_2 \rangle$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 + 2A_1 A_2 \langle \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \rangle$$

$$I = I_1 + I_2 + \underbrace{2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \rangle}_{\text{Terme d'interférence}}$$

Conditions d'interférence :

Terme d'interférence

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \rangle = 2\sqrt{I_1 I_2} (\langle \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \rangle + \langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle) \\ &= 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\underbrace{((\omega_1 + \omega_2)t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \varphi_{01} - \varphi_{02})}_0) \rangle + 2\sqrt{I_1 I_2} \end{aligned}$$

$$\langle \cos \left((\omega_1 - \omega_2)t + \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \underbrace{\varphi_{02} - \varphi_{01}}_{\Delta \varphi_0} \right) \rangle$$

* Si $\omega_1 \neq \omega_2 \Rightarrow$ Terme d'interférence $\equiv 0 \Rightarrow$ pas d'interférence

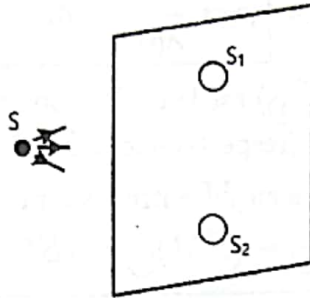
Si $\omega_1 = \omega_2 = \omega \Rightarrow$ Terme d'interférence $= 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \langle \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \Delta \varphi_0) \rangle$

d'où la première condition d'interférence : $\omega_1 = \omega_2$ dite condition de synchronisme (ou isochronisme) des sources S_1 et S_2 .

* Il faut que $\Delta \varphi_0 = \text{constante par rapport au temps}$

Selon la Remarque du I.8.b) $\tau_R(\text{oeil}) \gg \tau_c$ donc la phase initiale du train d'onde change plusieurs fois de façon aléatoire

→ Si S_1 et S_2 sont indépendantes alors $\varphi_{01}; \varphi_{02}$ sont 2 fonctions de temps aléatoires indépendantes $\Rightarrow \Delta\varphi_0 =$ fonction de temps aléatoire $\Rightarrow$ terme d'interférence $\equiv 0 \Rightarrow$ pas d'interférence. Donc il faut que S_1 et S_2 dérivent d'une même source mère S pour que $\Delta\varphi_0 = cte$. C'est la 2^{ème} condition d'interférence. (dite condition de cohérence des sources) X



→ division du même train émis par S

$$\text{Donc } \begin{cases} \varphi_{01} = \varphi_0(s) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(SS_1) & (\text{voir I.4}) \\ \varphi_{02} = \varphi_0(s) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(SS_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi_0 = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \underbrace{((SS_2) - (SS_1))}_{cte}$$

Remarque : Si on n'a pas adopté le modèle scalaire c.à.d $I = \langle E^2 \rangle = \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 \rangle$ alors une 3^{ème} condition d'interférence apparaîtra qui impose que $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ soient non orthogonaux.

En général on choisit $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ parallèles.

Cette condition est à la limite du nouveau programme. (dite condition de polarisation) X

I-11) Formule de Fresnel :

$$\text{rayon // vecteur d'onde} \Rightarrow \begin{cases} \vec{S_1M} // \vec{k}_1 \\ \vec{S_2M} // \vec{k}_2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{S_1M} \\ \vec{r}_2 = \vec{S_2M} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 // \vec{k}_1 \\ \vec{r}_2 // \vec{k}_2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 = k_2 r_2 \\ \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 = k_1 r_1 \end{cases}$$

Considérons un milieu homogène d'indice (n)

$$\Rightarrow k_1 = k_2 = \frac{\omega}{c}n = k_0 n = \frac{2\pi}{\lambda_0}n$$

$$\Rightarrow \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0}(nS_2M - nS_1M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}((S_2M) - (S_1M))$$

$$\text{donc } \varphi = (\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1) + \Delta\varphi_0$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\underbrace{((S_2M) + (SS_2))}_{(SM)_{\textcircled{2}}} - \underbrace{((S_1M) + (SS_1))}_{(SM)_{\textcircled{1}}} \right)$$

Conclusion :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left((SM)_{\textcircled{2}} - (SM)_{\textcircled{1}} \right)$$

où $(SM)_{\textcircled{2}}$ (respectivement $(SM)_{\textcircled{1}}$) est le chemin optique de la source S vers le point M en passant par la source secondaire S_2 (respectivement S_1).

Par définition la différence de marche en M entre les 2 rayons qui s'interfèrent est :

$$\delta = (SM)_{\textcircled{2}} - (SM)_{\textcircled{1}} = (SS_2M) - (SS_1M)$$

$$\text{donc } I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \right)$$

Formule de Fresnel

Remarque : En pratique, en général $I_1 = I_2 = I_0$;

$$\text{donc } I = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \right) \right)$$

- On définit l'ordre d'interférence : $p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{\varphi}{2\pi}$.

$$\checkmark \quad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2\pi p)$$

✓ Par définition un système interférentiel est un dispositif permettant d'assurer les conditions d'interférence pour l'observer.

Remarque :

Certains systèmes interférentiels introduisent un déphasage supplémentaire $\Delta\varphi_{\text{supp}}$

$$\rightarrow \delta_{\text{supp}} = \frac{\lambda_0}{2\pi} \Delta\varphi_{\text{supp}}$$

Par exemple, le miroir de Lloyd, introduit le $\Delta\varphi_{\text{supp}} = \pi$ dû à la réflexion

$$\text{donc } \delta_{\text{supp}} = \frac{\lambda_0}{2\pi} \Delta\varphi_{\text{supp}} = \frac{\lambda_0}{2}$$

donc le déphasage φ devient :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \underbrace{\left(\delta + \frac{\lambda_0}{2} \right)}_{\delta_{\text{tot}}}$$

II/ Interférences de 2 ondes cohérentes :

II-1) démonstration de la formule de Fresnel en notation complexe :

✓ Ondes cohérentes → conditions d'interférence vérifiées.

✓ Onde ① → vibration : $\underline{s}_1 = A_1 e^{i\varphi_1(M)}$

✓ Onde ② → vibration : $\underline{s}_2 = A_2 e^{i\varphi_2(M)}$

$$\begin{aligned} I &= \langle s^2 \rangle = \langle \underline{s} \cdot \underline{s}^* \rangle = \langle (\underline{s}_1 + \underline{s}_2)(\underline{s}_1 + \underline{s}_2)^* \rangle \\ &= \underbrace{\langle \underline{s}_1 \cdot \underline{s}_1^* \rangle}_{I_1} + \underbrace{\langle \underline{s}_2 \cdot \underline{s}_2^* \rangle}_{I_2} + \langle \underline{s}_1 \cdot \underline{s}_2^* \rangle + \langle \underline{s}_2 \cdot \underline{s}_1^* \rangle \\ &= I_1 + I_2 + 2 \cdot \langle \text{Re}(\underline{s}_1^* \cdot \underline{s}_2) \rangle = I_1 + I_2 + 2A_1A_2 \cdot \text{Re}(e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}) \end{aligned}$$

$$I_1 = \langle \underline{s}_1 \cdot \underline{s}_1^* \rangle = A_1^2 \cdot I_2 = A_2^2 \text{ et soit } \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \text{ donc } \boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi}$$

II-2) Types d'interférences :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi.$$

✓ si $\cos \varphi > 0 \Rightarrow$ Interférence constructive.

✓ si $\cos \varphi < 0 \Rightarrow$ Interférence destructive.

II-3) Surface d'égale intensité (ou éclairement) et notion de Frange :

Une surface d'égale intensité est l'ensemble des points de l'espace tels que $I = cte \Rightarrow \delta = cte$.

$$\text{Or } \delta = (n(S_2M - S_1M)) + \underbrace{\frac{\lambda_0}{2\pi} \Delta\varphi_0}_{cte} \text{ où } n \text{ est l'indice du milieu.}$$

donc :

$$\delta = cte \rightarrow S_2M - S_1M = cte$$

c'est l'équation d'une hyperboloïde de foyers S_1 et S_2

Cas particulier : $cte = 0 \Rightarrow$ plan médiateur.

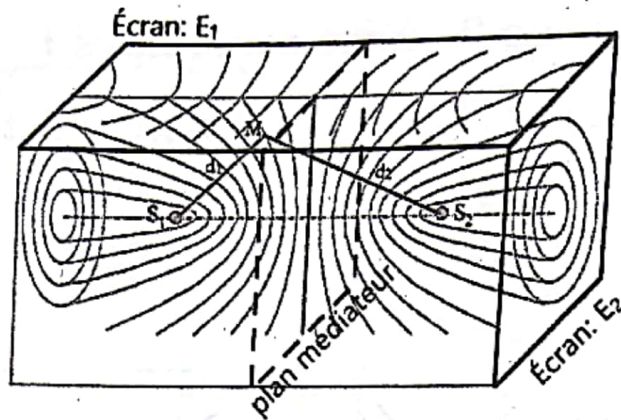


Figure II-3:
Hyperboloïdes de foyers S_1 et S_2

L'intersection de ces surfaces avec un écran donne des franges, on distingue 2 cas :

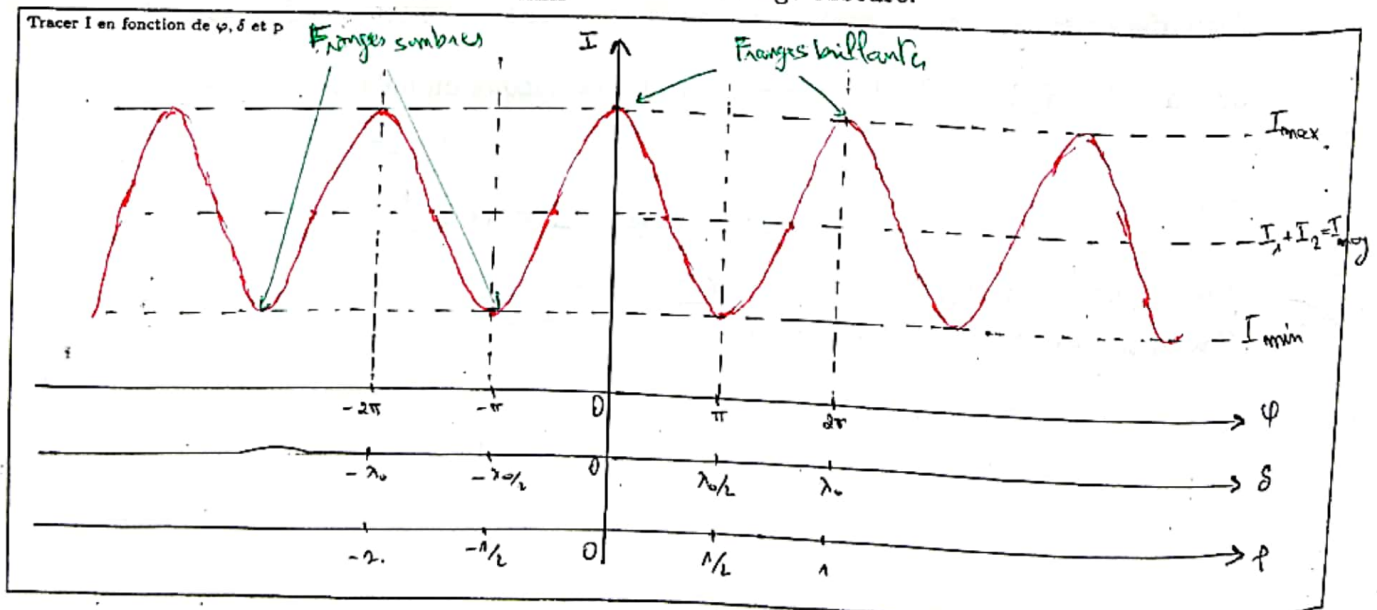
- L'écran E_1 : est suffisamment éloigné de (S_1S_2) et il est parallèle à (S_1S_2) → on observe sur E_1 des franges rectilignes. (les franges qui sont proches du plan médiateur)
- L'écran E_2 : est suffisamment éloigné de $[S_1S_2]$ et il est orthogonal à (S_1S_2) → on observe sur E_2 des franges circulaires d'axe (S_1S_2) dite "anneaux".

– Les franges sont dites :

• Brillantes: si $I = I_{\max} \Leftrightarrow \cos(\varphi) = 1, \Leftrightarrow \varphi = 2m\pi \Leftrightarrow \delta = \frac{\lambda_0}{2\pi} \varphi = m\lambda_0$
 $\Leftrightarrow p = m$: entier et $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$

• Sombres: si $I = I_{\min} \Leftrightarrow \cos(\varphi) = -1 \Leftrightarrow \varphi = (2m+1)\pi \Leftrightarrow \delta = \frac{\lambda_0}{2\pi} \varphi = (m+\frac{1}{2})\lambda_0$
 $\Leftrightarrow p = \frac{m+\frac{1}{2}}{2}$ et $I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$
 demi-entier

Remarque : Si $I_1 = I_2 = I_0 \Rightarrow I_{\min} = 0 \rightarrow$ frange obscure.



II-4) Contrast (ou visibilité) :

Par définition, le contraste sur l'écran de la figure d'interférence est $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \in [0, 1]$

C : mesure la netteté de la figure d'interférence.

- Si $C \rightarrow 0$: figure ou zone brouillée
- Si $C \rightarrow 1$: figure ou zone nette (bien contrastée).

Pour 2 ondes cohérentes : $\begin{cases} I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 \\ I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \end{cases}$

$\Rightarrow C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$ Alors le contraste est max c-à-d : $C = 1$ Si $I_1 = I_2 = I_0$ donc $I_{\min} = 0$

Le contraste est mauvais si $\begin{cases} I_1 \gg I_2 \\ \text{ou} \\ I_1 \ll I_2 \end{cases} (C \rightarrow 0)$

Remarque :

$$I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (I_1 + I_2)(1 + C)$$

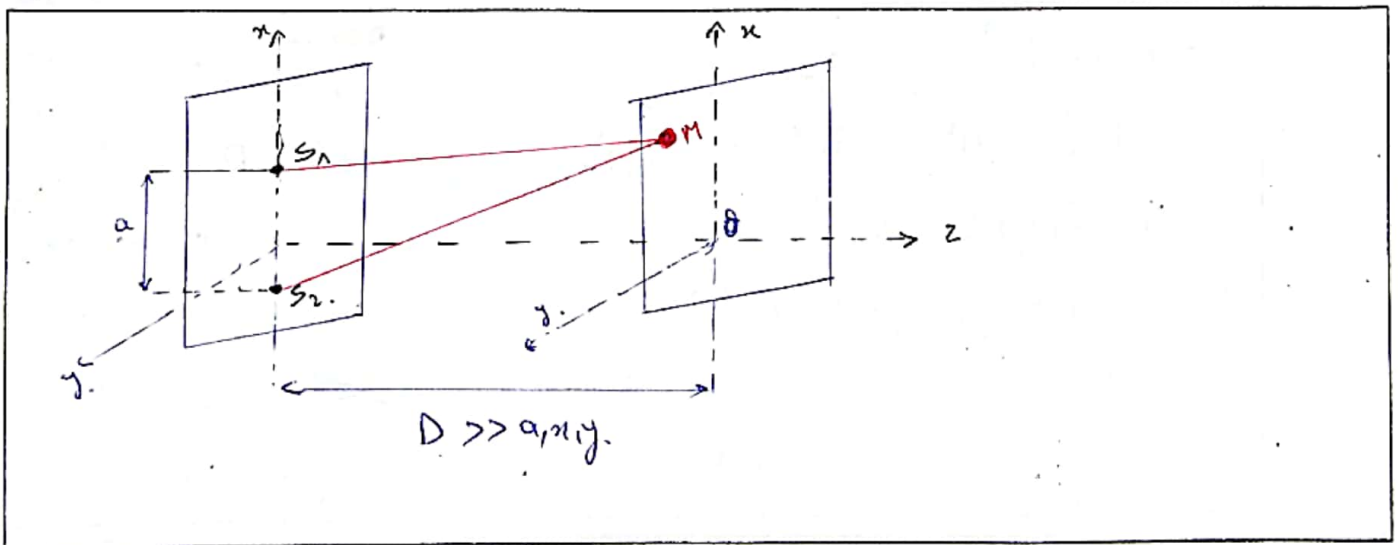
$$\Rightarrow I_{\max} = I_{\text{moy}}(1 + C)$$

$$\text{de même } I_{\min} = I_{\text{moy}}(1 - C)$$

II-5) Calcul de la différence de marche et de l'ordre d'interférence p :

$\delta = n(S_2M - S_1M) + \frac{\lambda_0}{2\pi} \Delta\varphi_0$. La détermination de δ et p nécessite le calcul de $S_2M - S_1M$, on distingue 2 cas :

1^{ère} cas : Écran // $(S_1 S_2)$



$$S_1 M = \left[(x_M - x_{S_1})^2 + (y_M - y_{S_1})^2 + (z_M - z_{S_1})^2 \right]^{1/2}$$

$$M(x, y, 0) : S_1 \left(\frac{a}{2}, 0, -D \right) \quad \text{avec } a, x, y \ll D$$

$$\Rightarrow S_1 M = \left[\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 + D^2 \right]^{1/2} = D \left[1 + \left(\frac{y}{D} \right)^2 + \left(\frac{x - a/2}{D} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\underline{DL}: (1+x)^x \approx 1 + x$$

x.

$$S_1 M \approx D \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{D} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - a/2}{D} \right)^2 \right]$$

$$\text{de m} \quad S_2 M \approx D \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{D} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x + a/2}{D} \right)^2 \right]$$

$$\text{donc } S_2 M - S_1 M = \frac{D}{2} \left[\left(\frac{x^2 + a^2/4 + 2ax}{D^2} \right) - \left(\frac{x^2 + a^2/4 - 2ax}{D^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow S_2 M - S_1 M \approx \frac{ax}{D}$$

$$\Rightarrow \delta = m \cdot \left(\frac{ax}{D} \right) + \frac{\lambda}{2\pi} \Delta\phi$$

2ème cas : Écran 1 (S_1, S_2)

En général, $m = \Delta \phi / \lambda \Rightarrow \delta = \frac{ax}{D} + \frac{\lambda}{2\pi} \Delta\phi$ et donc $p = \frac{f}{\lambda_0} = \frac{ax}{\lambda_0 D} + \frac{\Delta\phi}{2\pi}$

Frange $\Leftrightarrow I = I_e$ or $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right)$

$$\Rightarrow \delta = I_e \Rightarrow \frac{ax}{D} = I_e \Rightarrow x = I_e \Rightarrow \text{Droite } // \vec{y^0}$$

Conclusion: Les franges sont rectilignes et de direction $\perp$ à la droite ($S_1 S_2$).

2ème Cas: Écran $\perp (S_1 S_2)$:

$$S_1 M = \left(\overrightarrow{S_1 M} \right)^{1/2} = \left(\left(\overrightarrow{S_1 C} + \overrightarrow{CM} \right)^2 \right)^{1/2}$$

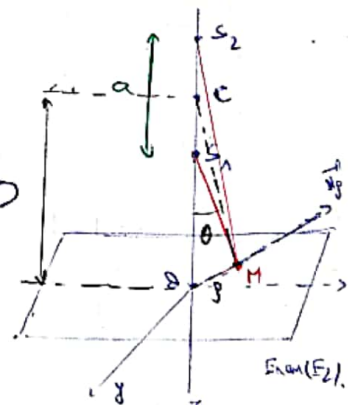
$$= \left[S_1 C^2 + CM^2 - 2\overrightarrow{CS_1} \cdot \overrightarrow{CM} \right]^{1/2} = \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 + r^2 - 2r \frac{a}{2} \cos(\theta) \right]^{1/2} \quad D$$

$$= r \left[1 + \left(\frac{a}{2r} \right)^2 - \frac{a}{r} \cos(\theta) \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow S_1 M \approx r \left[1 - \frac{a}{2r} \cos(\theta) \right] \quad (DL \text{ à l'ordre 1 en } \frac{a}{r})$$

$$\text{de m} : S_2 M \approx r \left[1 + \frac{a}{2r} \cos(\theta) \right] \Rightarrow S_2 M - S_1 M \approx a \cos(\theta)$$

$$\text{Donc dans : } \delta = a \cos(\theta) + \frac{\lambda_0}{2\pi} \Delta\phi_0 \Rightarrow p = \frac{a}{\lambda_0} \cos(\theta) + \frac{\Delta\phi_0}{2\pi}$$



Dans le triangle COM : $\cos(\theta) = \frac{p}{D}$: $D \gg p \Rightarrow \theta$ faible $\Rightarrow \cos(\theta) \approx 1$ et $\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$\text{Donc } \delta = a \cdot \left(1 - \frac{p^2}{2D^2} \right) + \frac{\lambda}{2\pi} \Delta\phi_0 \quad \text{Frange } \Leftrightarrow I = I_e \Leftrightarrow \delta = I_e$$

$$\Leftrightarrow p = I_e$$

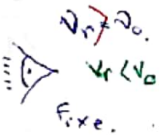
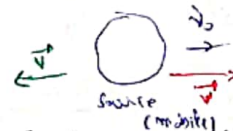
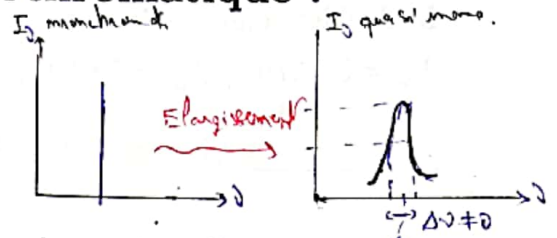
III/ Interférence en lumière non monochromatique : (Cohérence temporelle non parfaite)

III-1) Élargissement spectrale :

Cette étude est valable pour tous les systèmes interférentiels.

En réalité, il n'existe pas une source de lumière strictement monochromatique. Une source réelle quasi-monochromatique présente un élargissement spectral de son intensité émise dû principalement à :

- ✓ Durée de vie des états excités → élargissement naturel
- ✓ Effet Doppler → élargissement Doppler.



III-2) Importance et signification physique de la longueur de cohérence temporelle :

- ✓ En M , on observe l'interférence de 2 divisions provenant des sources secondaires S_1 et S_2 d'un même train d'onde issu de la source mère S .
- ✓ Soit Δt : différence de temps de marche en M entre les 2 divisions.
- ✓ Pour obtenir l'interférence en M , il faut que $\Delta t(M) \leq \tau_c$, où τ_c est le temps de cohérence (Voir I-8-b).

$$\text{Donc } \underbrace{c\Delta t}_{\delta} \leq \underbrace{c\tau_c}_{L_c} \Rightarrow \text{Condition d'interférence } \delta(M) \leq L_c.$$

III-3) Exemples d'interférence en lumière non monochromatique :

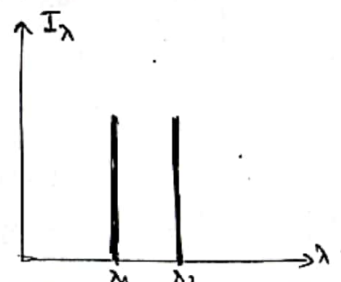
- Dans ces exemples, on considère un système interférentiel réalisant 2 sources secondaires S_1 et S_2 à partir d'une même source mère S .
- S_1 et S_2 émettent chacune une onde lumineuse d'intensité I_0

III-3-a) Cas d'une source mère (S) bichromatique (ou dichromatique) :

(S) présente 2 radiations de longueur d'onde λ_1 et λ_2 :

✓ $\lambda_1 \rightarrow$ Système de franges décrits par : $I_1 = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta \right) \right)$

✓ $\lambda_2 \rightarrow$ Système de franges décrites par : $I_2 = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \delta \right) \right)$



Les 2 composantes spectrales sont non isochrones car $\lambda_1 \neq \lambda_2$ donc $\omega_1 \neq \omega_2 \rightarrow$ pas d'interférence entre elles $\rightarrow I = I_1 + I_2$.

$$\Rightarrow I = 2I_0 \left(2 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \delta \right) \right) = 4I_0 \left[1 + \cos \left(\pi \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \delta \right) \cdot \cos \left(\pi \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \delta \right) \right]$$

2. facteur de visibilité

En pratique, λ_1 et λ_2 sont très proches, exemple :

Le doublet Jaune de Sodium :

$$\lambda_1 = 589 \text{ nm} ; \lambda_2 = 589,6 \text{ nm} \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 6 \text{ \AA}$$

à appeler

Approximation : Notons $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, $\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$

$$\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$$

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \simeq \frac{2\lambda_0}{\lambda_0^2} = \frac{2}{\lambda_0}$$

$$\text{Donc } I = 4I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi \cdot \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \delta \right) \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \right)$$

Remarque : Si la source était monochromatique $\rightarrow \Delta\lambda = 0 \Rightarrow \mathcal{J} = 1$ (cas parfait)

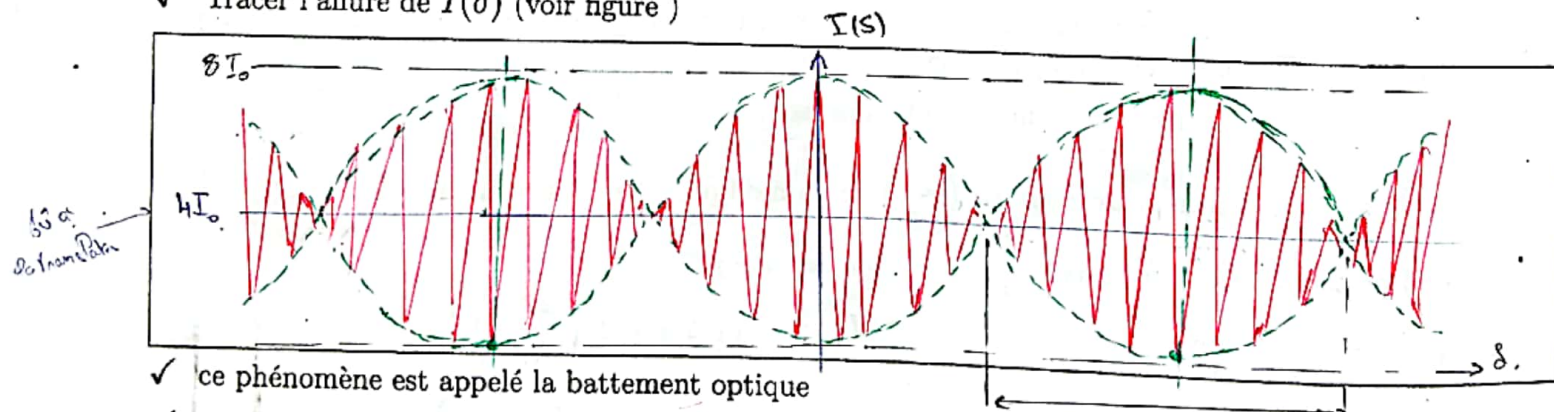
$$\rightarrow I = 4I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \right) \right) \quad [\text{Forme de Fresnel}]$$

$$\checkmark ? C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

$$\begin{cases} I_{\max} = 4I_0(1 + |\nu(\delta)|) \\ I_{\min} = 4I_0(1 - |\nu(\delta)|) \end{cases}$$

$$\text{donc : } C = |\nu(\delta)| = \left| \cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \delta \right) \right|$$

✓ Tracer l'allure de $I(\delta)$ (voir figure)



✓ ce phénomène est appelé la battement optique

✓ les nœuds représentent des positions de brouillage c-à-d $C = 0$

$$C = 0 \Rightarrow \cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \delta \right) = 0$$

$\frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$: demi-période de $\nu(\delta)$.

$$\Rightarrow \frac{\pi \Delta \lambda}{\lambda_0^2} S_m = (m + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{2} \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow S_m = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda}$$

✓ Sur l'écran, on observe la superposition des 2 systèmes de franges, pour certains valeurs de δ on peut observer :

① des coïncidences : c-à-d :

une frange brillante de λ_1 coïncide avec une frange brillante de λ_2

ou une frange sombre de λ_1 coïncide avec une frange sombre de λ_2

dans ce cas : $p_2 - p_1 = n$: entiers $\left(p_1 = \frac{\delta}{\lambda_1}; p_2 = \frac{\delta}{\lambda_2} \right)$

② des antioïncidences : c-à-d :

une frange brillante de λ_1 coïncide avec une frange sombre de λ_2

ou une frange sombre de λ_1 coïncide avec une frange brillante de λ_2

dans ce cas : $p_2 - p_1 = n + \frac{1}{2}$: demi entier.

Remarque :

Les anti-coïncidences sont tq $p_1 - p_2 = n + \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\lambda_1} - \frac{\delta}{\lambda_2} = n + \frac{1}{2} \Rightarrow \delta \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2} = n + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \delta_n = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda}, \text{ ce sont les positions des nœuds c-à-d : des brouillages} \rightarrow C = 0,$$

III-3-b) Cas d'une source mère quasi-monochromatique :

Ce cas modélise en général, une raie spectrale.

Remarque : En pratique, une raie décrit le profil spectral d'un LASER où d'une lumière transmise par un filtre interférentiel.

✓ Profil Gaussien : $I_\nu = A e^{-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\alpha^2}}$ avec $\alpha \ll \nu_0$ (A, α, ν_0 = constantes positives)

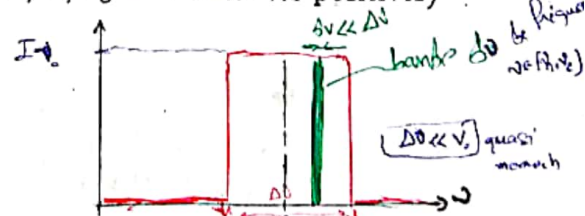
✓ Profil Lorentzien : $I_\nu(\nu) = \frac{I_0}{\beta^2 + (\nu - \nu_0)^2}$ avec

$\beta \ll \nu_0$ (I_0, β, ν_0 = constantes positives)

- les profils peuvent être approximés par le profil rectangulaire.

La distribution rectangulaire $\Leftrightarrow$ juxtaposition de bandes ($d\nu$) de fréquence $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$.

Chaque bande est supposée monochromatique.



$$\Rightarrow \Delta I = 2\Delta I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot s\right) \right) \quad \text{avec } \Delta I_0 = I_0 \cdot \Delta v = I_0 \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow \Delta I = 2\Delta I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot s\right) \right) \cdot \Delta v$$

Les bandes sont non isochrones $\Rightarrow I = \int \Delta I$ (somme continue des bandes d'intensités élémentaires).

$$\Rightarrow I = \Delta \cdot \int_0^{\Delta v} I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} s v\right) \right) dv = \Delta \cdot I_0 \int_{v_1}^{v_2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} s v\right) \right) dv$$

$$= 2\Delta I_0 \left[\Delta v + \frac{c}{2\pi s} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} s v_2\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} s v_1\right) \right) \right]$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$= 2\Delta I_0 \Delta v \left(1 + \frac{c}{\pi s \Delta v} \sin\left(\frac{\pi \Delta v s}{c}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi s v_0}{\lambda}\right) \right) \quad \text{car } \Delta v = v_2 - v_1$$

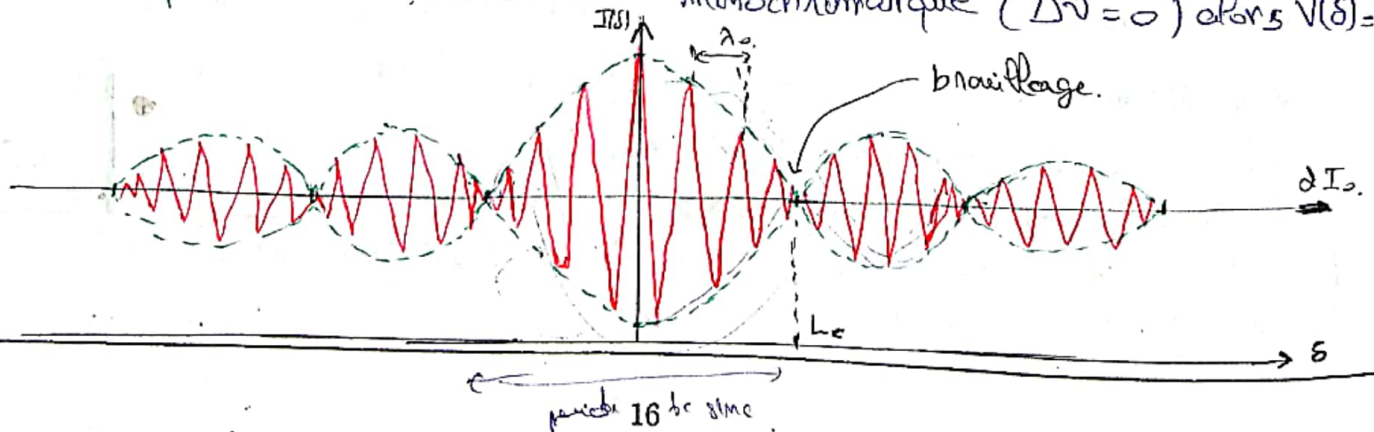
$$\text{et } v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

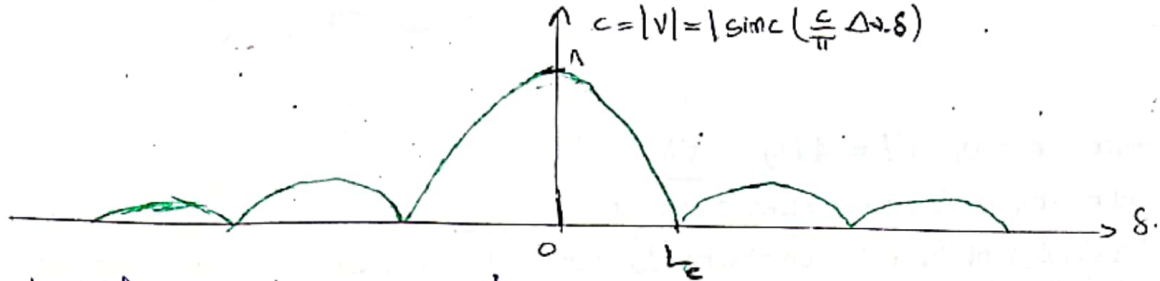
Rappel : sinus cardinal : $x \mapsto \text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

$$\text{soit } I_0 = I_0 \Delta v \quad \text{et} \quad \frac{c}{\lambda_0} = \lambda_0$$

$$\text{Donc } I = \Delta I_0 \left(1 + \underbrace{\text{sinc}\left(\frac{\pi \Delta v}{c} \cdot s\right)}_{V(s)} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} s\right) \right)$$

Remarque : si la source était monochromatique ($\Delta v = 0$) alors $V(s) = 1$





~~pour la 1^{re} fois~~ : $c = \left| \text{sinc} \left(\frac{c}{\pi} \Delta \nu \cdot \delta \right) \right| = 0 \rightarrow \frac{c}{\pi} \Delta \nu \cdot \delta = m\pi, m \in \mathbb{Z}^*$

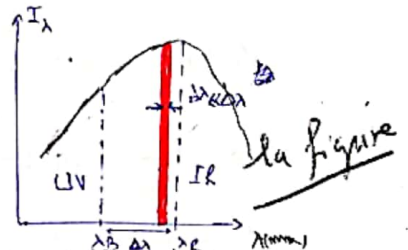
(pour $m=1$) : $\delta = L_c = \frac{c}{\Delta \nu}$ ou L_c représente la longueur de cohérence temporelle (voir I-8-c).

La zone de l'écran correspondant à $|\delta| > L_c$ est une zone blottiee

Remarque : $L_c = \frac{c}{\Delta \nu} \Rightarrow \frac{L_c}{c} \Delta \nu = 1 \Rightarrow \boxed{\tau_c \cdot \Delta \nu = 1}$ voir (I-8-b).

si le profil était Gaussien ou Lorentzien :

$$\boxed{L_c = \text{d.e.} \cdot \frac{c}{\Delta \nu}}$$



III-3-c) Cas d'une source mère polychromatique : lumière blanche

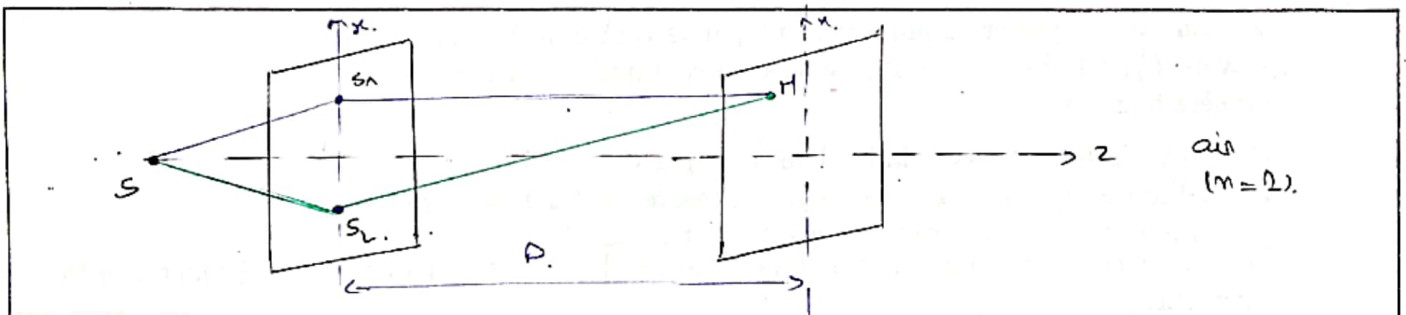
Exemple :

✓ La lumière émise par le soleil par exemple est caractérisée par le profil suivant (figure) :

Chaque bande $d\lambda$ (supposée monochromatique) donne un système de franges.

– Sur l'écran on observe la superposition de tous les systèmes de franges associées à toutes les bandes $d\lambda$ de la lumière blanche.

– Considérons par exemple le dispositif des trous d'Young : (figure)



$$\delta = (SS_2M) - (SS_1M) = \underbrace{[SS_2 - SS_1]}_0 + \underbrace{[S_2M - S_1M]}_{\frac{ax}{D}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{ax}{D}}$$

✓ Qu'observe-t-on sur l'écran ?

Chaque bande $d\lambda$ donne :

$$dI = 2dI_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} \right) \right)$$

au centre : $x = 0$, $dI = 4dI_0 \quad \forall \lambda$

$\Rightarrow$ au centre, on observe une frange blanche

✓ En s'éloignant du centre, on observe ~~des~~ ^{une} frange obscure puis des franges irisées, ensuite une zone de blanc d'ordre supérieure (c-à-d, la lumière blanche qui lui manque quelques radiations).

Remarque :

✓ Certains systèmes interférentiels (comme par exemple le miroir de Lloyd) ajoute une $\delta_{supp} = \frac{\lambda}{2}$

$$\Rightarrow dI = 2dI_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{D} + \frac{\lambda}{2} \right) \right) \right) = 2dI_0 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} \right) \right)$$

✓ au centre : $x = 0 \rightarrow dI = 0, \quad \forall \lambda \Rightarrow$ La frange au centre est obscure.

✓ Il ne faut pas confondre la frange centrale (définie par $\delta = 0$) et la frange au centre (définie par $x = 0$) (voir p. 15) $F_{0,5}$ ^{frange centrale} ^{frange au centre}

✓ Spectroscopie : Pour différencier la lumière blanche du blanc d'ordre supérieur, on utilise un spectroscope. (Figure 2)

On note F_s sa fente d'entrée et E_s son écran.

✓ En faisant passer la lumière reçue par le centre de l'écran à travers F_s , on observe sur E_s , le spectre continu complet de la lumière blanche.

✓ Mais, En faisant passer la lumière reçue par une abscisse $x_0 \in$ blanc d'ordre supérieure à travers F_s , on observe sur E_s un spectre discontinu contenant des cannelures dit spectre cannelé.

Le nombre et les longueurs d'onde des cannelures dépendent de l'abscisse $x_0 \in$ blanc d'ordre supérieur.

Cherchons le nombre de cannelures observées sur (E_s) ; Si F_s reçoit la lumière située au niveau de l'abscisse x_0 donnée de l'écran :

Cannelure $\Leftrightarrow$ radiation qui a subi une interférence destructive $\rightarrow p =$ demi-entier.

Or $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{ax_0}{\lambda D}$ et on a $\lambda_B \leq \lambda \leq \lambda_R$ (B : bleu et R : Rouge)

$\Rightarrow \frac{ax_0}{\lambda_R D} \leq p \leq \frac{ax_0}{\lambda_B D}$. Si par exemple l'application numérique donne $3,2 \leq p \leq 10,7$

$\Rightarrow p \in \{3,5|4,5|\dots|10,5\} \Rightarrow 8$ cannelures. Or $\lambda = \frac{ax_0}{pD}$ donc on pourra calculer λ associée à chaque p .

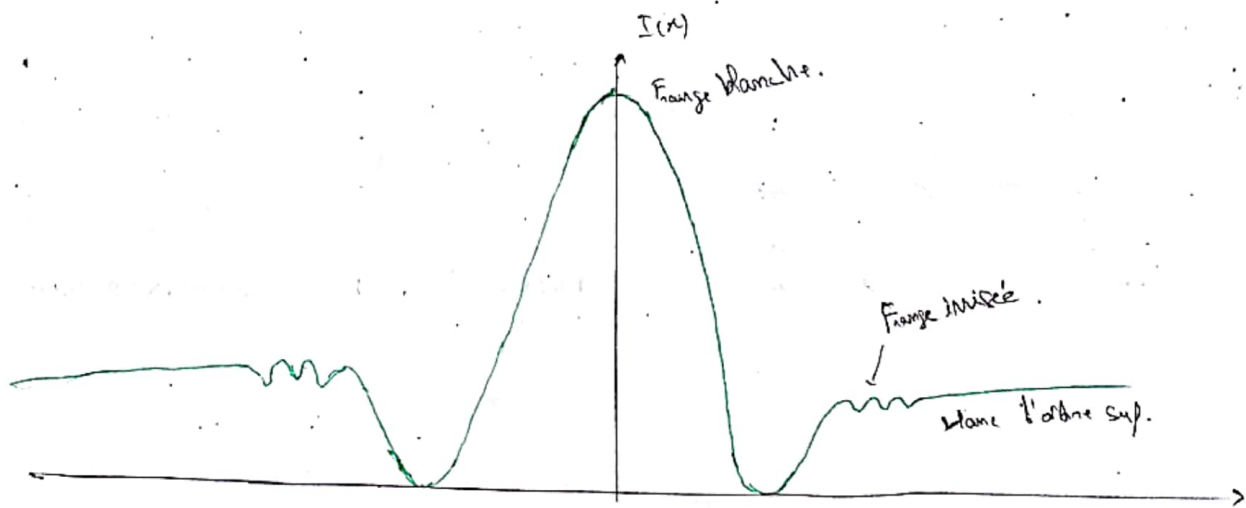
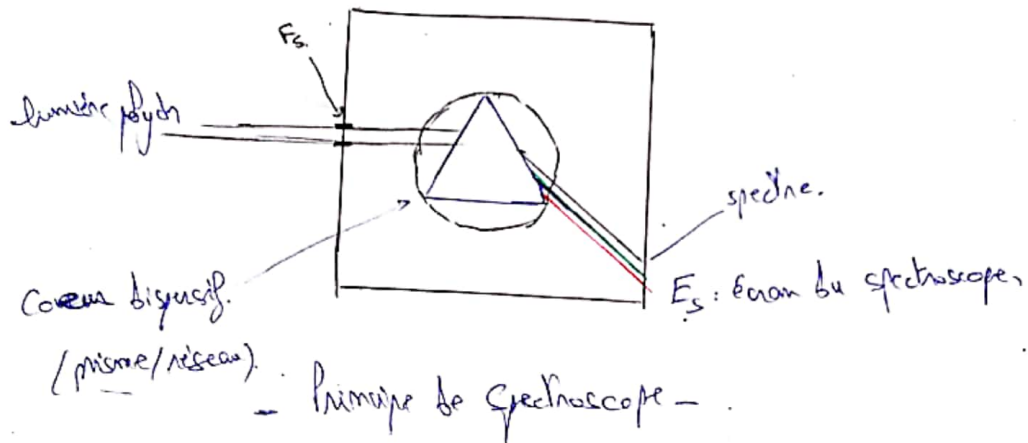


Fig 1.



- Principe de Spectroscopie -

Fig 2.