
Support de Cours :
Chapitre 3 : Interférence de N ondes

2eme Année MP/T/PC

Proposé par : Prof. Neil JOMAA

Plan de la leçon :

I) Préliminaire

1) Amplitude de l'onde diffractée par une fente ou un miroir

2) Remarque générale :

II) Définition

III) Expression de la différence de marche δ et du déphasage φ entre 2 motifs successifs.. Formule fondamentale

III-1) Tableau récapitulatif

III-2) Interprétation de la formule fondamentale

IV) Expression de l'intensité de l'onde diffractée par le réseau (qui résulte de l'interférence de N ondes)

V) Minimum de déviation d'un réseau :

VI) Critère de Rayleigh

VII). Dispersion

VIII) Pouvoir de résolution théorique R_{th} d'un réseau

I) Préliminaire :

1) Amplitude de l'onde diffractée par une fente ou un miroir

Une fente ou un miroir rectangulaire de largeur ε ($< 100\lambda$) et de longueur $l \gg \varepsilon$, diffracte la lumière incidente (voir figure 1) :

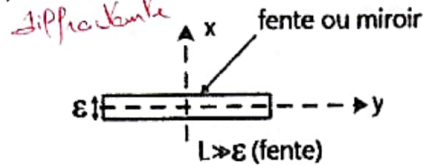


Figure 1

not in la diffraction / 12°

Cas d'une fente :

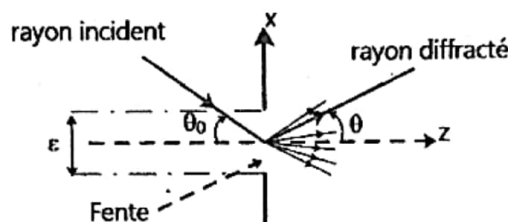


Figure 2

On admet que l'amplitude de la vibration lumineuse diffractée est $s = s_0 \cdot \text{sinc}(\pi u \varepsilon)$ avec

$$u = \frac{\sin \theta - \sin \theta_0}{\lambda} \text{ et } s_0 \text{ est une constante (voir figure 2).}$$

Cas d'un miroir :

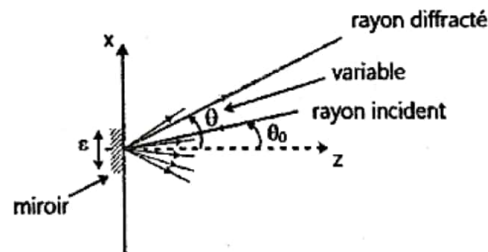


Figure 3

$$s = s_0 \cdot \text{sinc}(\pi v \varepsilon) \text{ avec } v = \frac{\sin \theta + \sin \theta_0}{\lambda} \text{ et } s_0 \text{ est une constante (voir figure 3).}$$

Remarque : s est max pour $\text{sinc}(\pi v \varepsilon) = 1 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \theta = -\theta_0$ ce qui correspond à la loi de Descartes pour la réflexion donnant la direction de l'onde réfléchi prévue par l'optique géométrique.

2) Remarque générale :

Dans ce cours, on s'intéresse à l'interférence de N ondes avec N un nombre fini de motifs (miroirs ou fentes) ce qui correspond au cas des réseaux optiques plans. Cependant, N peut être aussi infini et ceci correspond au cas du filtre interférentiel qui sera traité dans les exercices (Voir TD).

II) Définition :

Dans la pratique, un réseau optique plan est constitué d'une suite de N motifs (miroirs ou fentes) identiques équidistant d'une distance a appelée "pas de réseau" compris entre la longueur d'onde λ_0 et $100\lambda_0$. Ceci sera justifié plus loin (voir III-2/). Ces motifs sont appelés traits du réseau ; ils sont invariants par translation le long de l'axe Oy et décalés chaque fois de a suivant Ox . Nous caractériserons souvent le réseau par son nombre de traits par unité de longueur.

Si le réseau est constitué par N fentes (respectivement miroirs) il est dit "réseau par transmission" (respectivement par réflexion) . (voir figure 4)

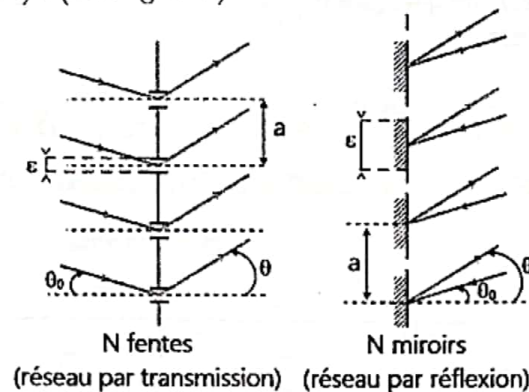


Figure 4

Remarque :

On s'intéresse à la diffraction de Fraunhofer c.à.d la source et l'écran sont rejetés à l'infini grâce à 2 lentilles convergentes.

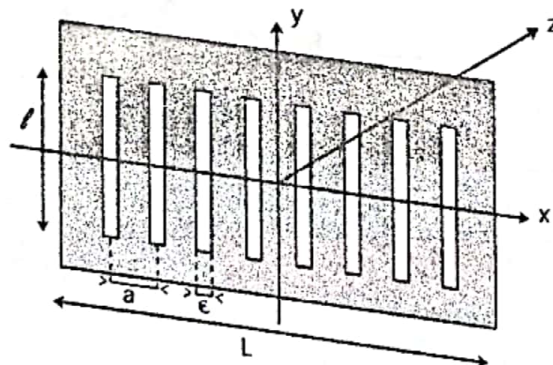


Figure 5: réseau par transmission

Nous considérons dans la suite de cours un réseau par transmission constitué d'un plan opaque percé de N ouvertures rectangulaires, parallèles entre elles et équidistantes de a (voir figure 5). Nous le supposons éclairé sur sa largeur totale $L = Na$. Les traits du réseau ont une largeur $\epsilon < 100\lambda$ et une longueur $l \gg \epsilon$.

Le réseau par réflexion sera traité dans les exercices (Voir TD).

Remarque : Réalisation pratique d'un réseau

Les traits doivent être rigoureusement identiques, un défaut de périodicité donne par exemple des figures de diffraction parasites. Les réseaux les plus précis sont les réseaux calibrés qui sont obtenus en gravant des traits parallèles régulièrement espacés avec une fine pointe de diamant sur une

surface métallisée. En enregistrant la figure d'interférences de deux ondes planes, on peut fabriquer un réseau holographique d'excellente qualité. Ces deux types de réseaux sont très coûteux.

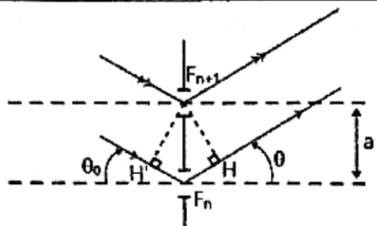
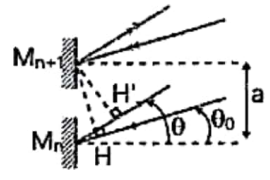
À partir de réseaux calibrés, on fabrique des répliques en déposant sur le réseau original une résine que l'on détache et que l'on fixe sur une plaque de verre. Ces répliques sont souvent de très bonne qualité.

Donnons quelques ordres de grandeur :

- un réseau optique comporte typiquement 100 à 1000 traits par millimètre ;
- il a donc un pas $a = 1$ à $10\mu m$;
- il est éclairé sur une longueur L de quelques millimètres ; le nombre de traits éclairés N est donc au minimum de quelques centaines.

III) Expression de la différence de marche δ et du déphasage φ entre 2 motifs successifs. Formule fondamentale

III-1) Tableau récapitulatif

Type du réseau	Par transmission	Par réflexion
Marches de deux rayons issus de deux motifs successifs	 Figure 6	 Figure 7
Différence de marche	$\delta = H'F_n + F_nH$ $= a \sin(-\theta_0) + a \sin \theta$ $= a(\sin \theta - \sin \theta_0)$	$\delta = M_nH + M_nH'$ $= a(\sin \theta_0 + \sin \theta)$
Déphasage	$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta = \frac{2\pi}{\lambda} a(\sin \theta - \sin \theta_0)$	$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a(\sin \theta_0 + \sin \theta)$
Formule fondamentale ($\delta = p\lambda$; p : entier)	$p\lambda = a(\sin \theta - \sin \theta_0)$	$p\lambda = a(\sin \theta_0 + \sin \theta)$

III-2) Interprétation de la formule fondamentale

Le nombre N est élevé : si le réseau comporte par exemple 300 traits par millimètres et s'il est éclairé sur une largeur de 1 millimètre environ, il y a 300 ondes qui interfèrent. Dans ces conditions, l'éclairement de la lumière diffractée par le réseau est non nul uniquement si toutes les ondes qui interfèrent sont en phase donc si les ondes diffractées par deux traits consécutifs sont elles-mêmes en phase.

Les directions possibles pour la lumière diffractée sont donc telles que $\varphi(M)$ est un multiple entier de 2π ou encore telles que δ est un multiple entier de λ_0 .

Nous en déduisons que :

Le réseau diffracte la lumière dans des directions θ_p précises données par la formule des réseaux (ou formule fondamentale) :

$$\sin \theta_p - \sin \theta_0 = p \frac{\lambda_0}{a}$$

où p est un entier relatif appelé ordre de diffraction.

Remarques :

1) Le nombre d'ordres p observables est limité par la condition $-1 \leq \sin \theta_p \leq 1$; ainsi

$$-\frac{a}{\lambda_0} \leq p \leq \frac{a}{\lambda_0}$$

2) Nous pouvons maintenant comprendre la condition sur a donnée plus haut. (voir II/ Définition)

En effet, pour qu'il existe au moins un ordre de diffraction non nul il faut que $a > \lambda_0$. De plus, pour que des directions θ_p distinctes soit observables il faut $|\sin \theta_{p+1} - \sin \theta_p|$ ne soit pas trop

petit ; si nous prenons comme valeur minimale $\frac{1}{100}$ nous trouvons la condition $a < 100\lambda_0$.

IV) Expression de l'intensité de l'onde diffractée par le réseau (qui résulte de l'interférence de N ondes) :

On suppose que la source est **monochromatique**. Considérons par exemple un réseau par transmission :

on note s_n l'amplitude de la vibration lumineuse diffractée par la fente F_n (n : entier $\in [1, N]$)

$$s_2 = s_1 e^{i\varphi} ; \quad s_3 = s_2 e^{i\varphi} = s_1 e^{2i\varphi}$$

$$\text{Par récurrence } s_n = s_1 e^{(n-1)i\varphi} ; \quad n \in [1, N]$$

Notons $s_1 = s_F$: amplitude de l'onde diffractée par une seule fente.

donc l'amplitude de l'onde diffractée par le réseau est

$$\begin{aligned} S_r &= \sum_{n=1}^N s_n = s_F \cdot \sum_{n=1}^N e^{i(n-1)\varphi} \\ &= s_F \cdot \frac{1 - (e^{i\varphi})^N}{1 - e^{i\varphi}} \\ &= s_F \cdot \frac{e^{iN\varphi/2}}{e^{i\varphi/2}} \cdot \frac{e^{iN\varphi/2} - e^{-iN\varphi/2}}{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}} \\ &= s_F \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}(N-1)} \cdot \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \end{aligned}$$

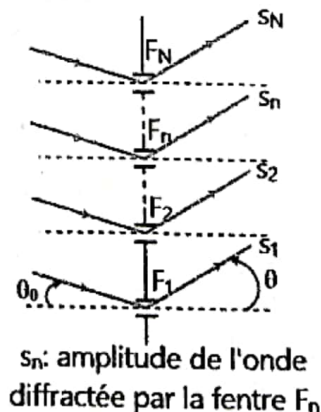


Figure 8

On peut déterminer alors l'intensité I_R de l'onde diffractée par tout le réseau :

$$I_R = \langle \underline{S}_R \cdot \underline{S}_R^* \rangle = \langle \underline{S}_F \cdot \underline{S}_F^* \rangle \cdot \left[\frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \right]^2$$

$$\langle \underline{S}_F \cdot \underline{S}_F^* \rangle = \langle |\underline{S}_F|^2 \rangle = \underbrace{N^2 S_0^2}_{I_0} \frac{\text{sinc}^2(\pi u \epsilon)}{N^2}; u = \frac{\sin\theta - \sin\theta_0}{\lambda_0}$$

Notons $I_0 = N^2 S_0^2$

$$\Rightarrow I_R = \underbrace{I_0 \cdot \text{sinc}^2(\pi u \epsilon)}_{\text{Tasse de Diffraction "Enveloppe"}} \cdot \underbrace{\left[\frac{\sin(N\phi/2)}{N \cdot \sin(\phi/2)} \right]^2}_{\text{Tasse d'interférence "Enveloppé"}}$$

✓ On définit la fonction réseau par $f(\phi) = \left[\frac{\sin(N\phi/2)}{N \sin(\phi/2)} \right]^2$

C'est une fonction périodique, elle est représentée sur la figure 9 :

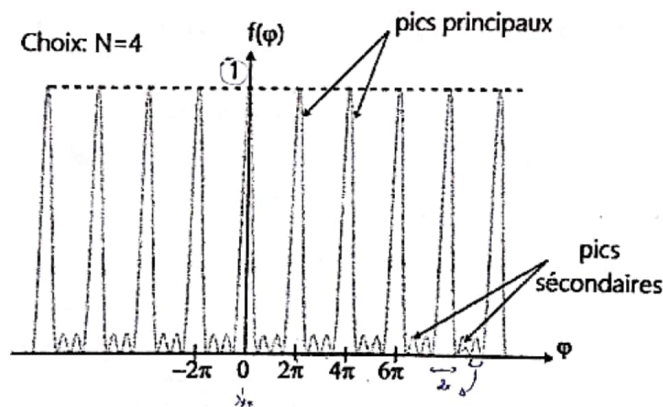


Figure 9: Fonction réseaux

✓ Les abscisses des maxima principaux :

Elles sont données par $\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\phi}{2} = p \cdot \pi \Rightarrow \boxed{\varphi_{\max}^{\text{principal}} = 2p\pi}_{p \in \mathbb{Z}}$

Remarque : On a écrasement d'un pic principal, si son abscisse coïncide avec celle d'un minimum nul de l'enveloppe. Déterminons la condition de l'écrasement :

L'enveloppe s'annule si $\text{sinc}(\pi u \epsilon) = 0 \Rightarrow \pi u \epsilon = n\pi, n \in \mathbb{Z}^*$

$$\Rightarrow u_{\min} = \frac{\sin\theta - \sin\theta_0}{\lambda} = \frac{n}{\epsilon}$$

Or $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin\theta - \sin\theta_0) \Rightarrow \varphi_{\min}^{\text{enveloppe}} = \frac{n}{\epsilon} \cdot 2\pi a$

On a écrasement si $\varphi_{\max}^{\text{principal}} = \varphi_{\min}^{\text{enveloppe}}$

$$\Rightarrow 2p\pi = \frac{n}{\varepsilon} \cdot 2\pi \cdot a \Rightarrow \frac{a}{\varepsilon} = \frac{p}{n} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{\varepsilon} \in \mathbb{Q}} : \text{condition d'écrasement.}$$

Les abscisses de minima de $f(\varphi)$:

$$f(\varphi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{N\varphi}{2} = k\pi \\ \frac{\varphi}{2} \neq p\pi \end{cases} \quad p, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_{\min} = \frac{2k\pi}{N} \text{ avec } k \text{ non multiple de } N}$$

Déterminons la largeur $\Delta_0\varphi$ d'un pic principal :

$$\varphi_{\min}(k=1) = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow \Delta_0\varphi = 2\varphi_{\min}(k=1) = \frac{4\pi}{N}. \text{ On note la demi largeur}$$

$$\Delta\varphi_{1/2} = \frac{\Delta_0\varphi}{2} = \frac{2\pi}{N}$$

L'intensité de l'onde diffractée par le réseau I_R est représentée sur la figure 10 :

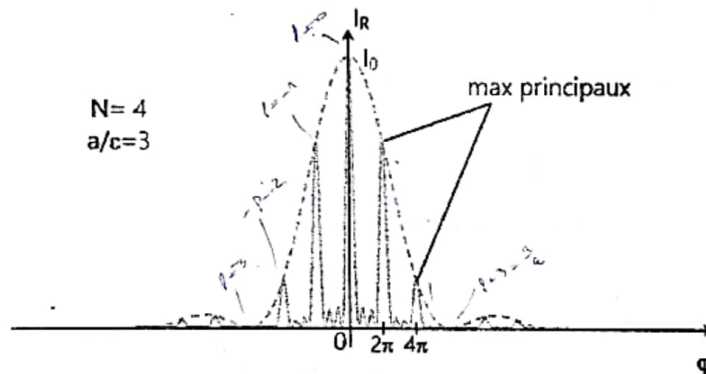


Figure 10-a

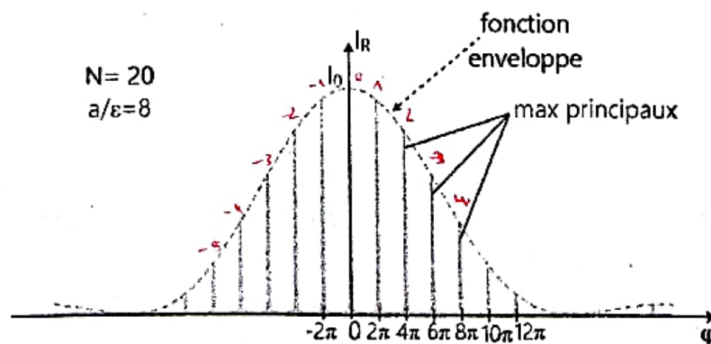


Figure 10-b

Remarquer que lorsqu'on augmente le nombre N de motifs, les pics principaux deviennent plus

minces et les pics secondaires deviennent négligeables.

V) Minimum de déviation d'un réseau :

La déviation d'un réseau par transmission est définie par :

$D = \theta - \theta_0$ (voir figure 11).

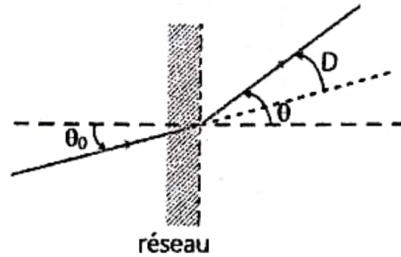


Figure 11

Pour un ordre p et une longueur d'onde λ fixés, lorsque θ_0 varie, D varie et passe par un minimum

$D_{\min}$ tel que $\frac{dD}{d\theta_0} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d\theta - d\theta_0}{d\theta_0} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{d\theta_0} = 1 \text{ or la formule fondamentale s'écrit : } p\lambda = a(\sin \theta - \sin \theta_0)$$

$$\Rightarrow \text{Pour } p, \lambda \text{ fixés ; } 0 = a(\cos \theta d\theta - \cos \theta_0 d\theta_0) \Rightarrow \frac{d\theta}{d\theta_0} = \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}$$

donc $D_{\min}$ est telle que $\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 : \text{impossible car elle correspond à la même direction de l'onde incidente} \\ \text{ou} \\ \theta = -\theta_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta = -\theta_0 \Rightarrow D_{\min} = -2\theta_0$$

et dans ce cas : la formule fondamentale s'écrit $p\lambda = -2a \sin \theta_0$ or $p \in \mathbb{Z}$ donc

$$\boxed{p\lambda = 2a \sin \theta_0}$$

VI) Critère de Rayleigh :

On peut distinguer (ou résoudre) théoriquement 2 longueurs d'ondes voisines λ et $\lambda + \delta\lambda$ ($\delta\lambda \ll \lambda$) si l'abscisse du maximum d'intensité relatif à $(\lambda + \delta\lambda)$ est au moins égale à l'abscisse du 1^{ère} min nul relatif à (λ) .

On note : $\Delta\theta_{\max}$: distance angulaire entre les maxima relatifs à λ et $\lambda + \delta\lambda$.

$\Delta\theta_{1/2}$: demi-largeur angulaire d'un pic relatif à une longueur d'onde.

Le critère de Rayleigh est représenté sur les figures 12-a et 12-b :

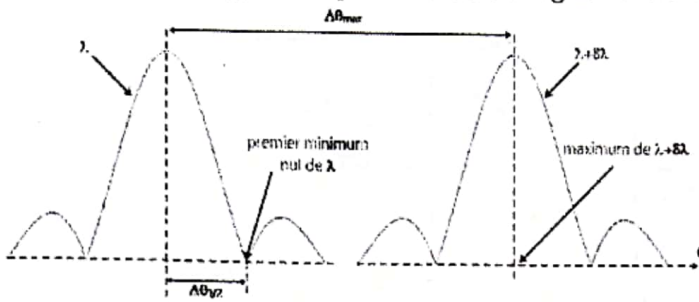


Figure 12-a: λ et $\lambda + \delta\lambda$ sont résolues

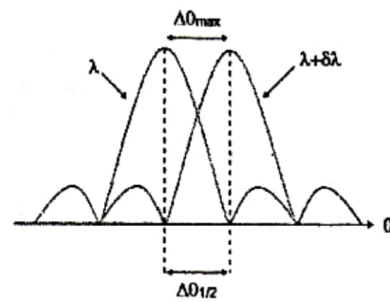


Figure 12-b: λ et $\lambda + \delta\lambda$ sont à la limite de résolution

Conclusion : On a résolution selon le critère de Rayleigh si $\Delta\theta_{\max} \geq \Delta\theta_{1/2}$.

VII) Dispersion :

✓ Formule fondamentale : $p\lambda = a(\sin\theta - \sin\theta_0)$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{p\lambda}{a} + \sin\theta_0$$

Le pas $a = \text{cte}$

Pour θ_0 et $p \neq 0$ donnés, $\theta = \text{fonction}(\lambda)$.

→ dispersion de la lumière polychromatique incidente si $p \neq 0$

✓ Si la lumière incidente est la lumière blanche et $p = 0$

$\sin\theta = \sin\theta_0 \Rightarrow \theta = \theta_0 \neq \text{fonction}(\lambda) \Rightarrow$ toutes les couleurs se superposent dans cette direction ($\theta = \theta_0$) $\Rightarrow$ pour $p = 0$, on observe sur l'écran une seule frange blanche.

Considérons le montage expérimental illustrant le principe du spectromètre à réseau représenté sur les figures 13-a et 13-b :

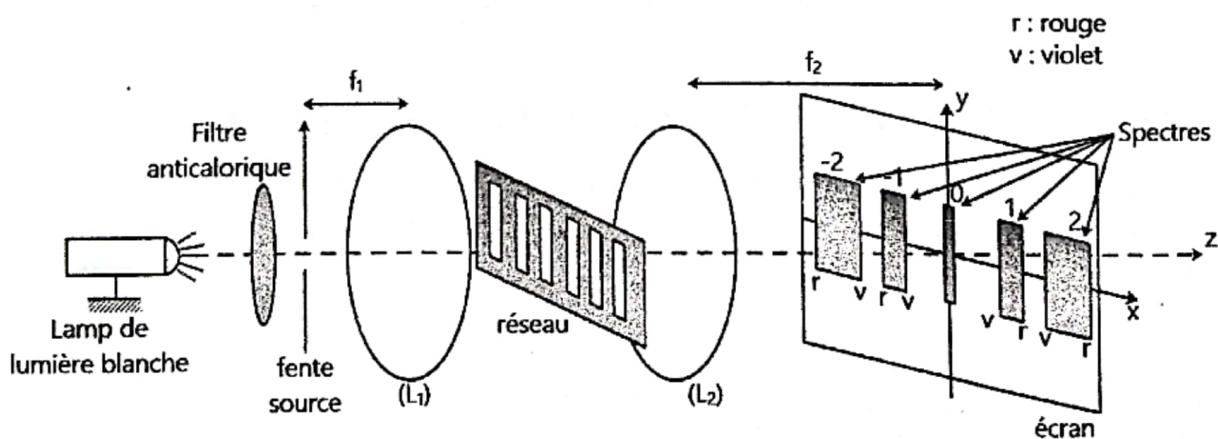


Figure 13-a: montage expérimental illustrant le principe du spectromètre à réseau

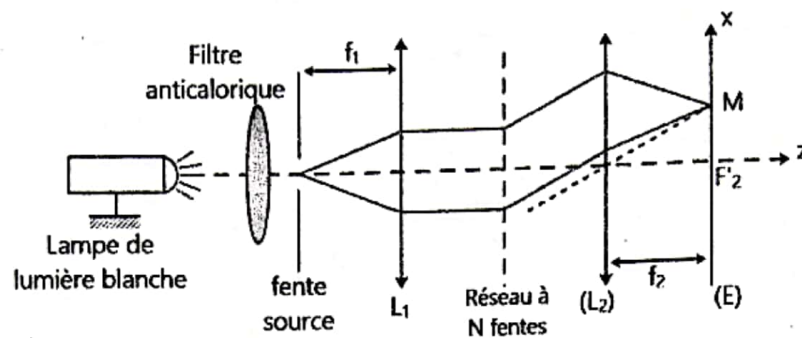


Figure 13-b: montage en projection sur le plan (x,z)

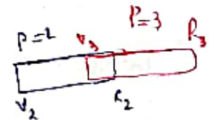
on observe sur l'écran (E) une figure constituée par plusieurs spectres d'ordre différents.

– Le spectre d'ordre zéro est constitué d'une seule frange blanche.

De part et d'autre de ce spectre, on observe des spectres symétriques constitués par des franges relatives à toutes les radiations :

On remarque que si $|p|$ augmente ; on a :

- Un avantage : Les radiations sont plus séparées.
- Un inconvénient : la luminosité diminue.



Remarque : À partir de l'ordre $k = 2$ les spectres donnés par un réseau se recouvrent partiellement. En effet, la radiation rouge de plus grande longueur d'onde ($\lambda_r = 0,75\mu m$)

correspond, dans le spectre d'ordre 2, à un angle donné par $\sin \theta_{r2} = \sin \theta_0 + \frac{2\lambda_r}{a}$ et la radiation violette de plus petite longueur d'onde ($\lambda_v = 0,40\mu m$) correspond, dans le spectre d'ordre 3, à

un angle donné par $\sin \theta_{v3} = \sin \theta_0 + \frac{3\lambda_v}{a}$. Or, $2\lambda_r = 1,50\mu m$ et $3\lambda_v = 1,20\mu m$. Nous constatons que $\theta_{r2} > \theta_{v3}$, c'est-à-dire que la raie violette du spectre d'ordre 3 est plus près du centre que la raie rouge du spectre d'ordre 2 ce qui explique le recouvrement partiel entre les spectres d'ordre 2 et d'ordre 3. ($\lambda_v < \lambda_r$)

VIII) Pouvoir de résolution théorique R_{th} d'un réseau :

✓ R_{th} mesure la capacité d'un réseau à séparer (ou résoudre) deux radiations voisines λ et $\lambda + \delta\lambda$ ($\delta\lambda \ll \lambda$) appartenant à un même spectre d'ordre p donnée.

Par définition :

$$R_{th} = \frac{\lambda}{(\delta\lambda_{min})}$$

où $(\delta\lambda)_{min}$ = écart spectral minimal que peut résoudre le réseau.
Le calcul de R_{th} se base sur le critère de Rayleigh.

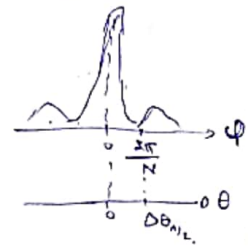
- ✓ On cherche tout d'abord la demi-largeur angulaire $\Delta\theta_{1/2}$ d'un pic principal :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} s = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin\theta - \sin\theta_0)$$

$$\Rightarrow d\phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \cos\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \text{à } \lambda, \theta_0 \text{ fixé ; } \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{2\pi}{\lambda} a \cos\theta \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \cos\theta \Delta\theta_{1/2}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta_{1/2} = \frac{\lambda}{N a \cos\theta}$$



- ✓ On cherche ensuite la distance angulaire entre les maxima relatifs à λ et $\lambda + \delta\lambda$, $\Delta\theta_{\max}$:

$$FF: p\lambda = a (\sin\theta - \sin\theta_0)$$

$$\text{à } \theta_0; p \neq 0 \text{ fixés, } p \frac{d\lambda}{\delta\lambda} = a \cos\theta \frac{d\theta}{\Delta\theta_{\max}} \Rightarrow \Delta\theta_{\max} = \frac{p \cdot \delta\lambda}{a \cos\theta}$$

Selon le critère de Rayleigh : λ et $(\lambda + \delta\lambda)$ sont résolues si :

$$\Delta\theta_{\max} \geq \Delta\theta_{1/2}$$

$$\frac{p \cdot \delta\lambda}{a \cos\theta} \geq \frac{\lambda}{N a \cos\theta} \Rightarrow \delta\lambda \geq \frac{\lambda}{N \cdot p} \Rightarrow (\delta\lambda)_{\min} = \frac{\lambda}{N \cdot p}$$

$$\Rightarrow R_{th} = \frac{\lambda}{(\delta\lambda)_{\min}} = N \cdot p \quad : \text{pouvoir de résolution th.}$$

Remarque :

- ✓ On vérifie bien que si p augmente, le pouvoir de résolution augmente.
- ✓ En plus, on en déduit que si N augmente, la résolution augmente d'où l'intérêt de graver un nombre N assez grand de motifs du réseau.
- ✓ R_{th} présente une limite théorique, en effet :

$$p = \frac{a}{\lambda} (\sin\theta - \sin\theta_0) \leq \frac{2a}{\lambda}$$

$$\text{Or } p \text{ est entier} \Rightarrow p \leq E\left(\frac{2a}{\lambda}\right) \Rightarrow R_{th} \leq N \cdot E\left(\frac{2a}{\lambda}\right)$$

- ✓ Le pouvoir de résolution pratique du montage R_{montage} est toujours inférieur à R_{th} . Ceci résulte principalement de la largeur de la fente source.

Application : monochromateur à réseaux.