Révision cours –SM-ST — Mhamdi Aidi

Signaux périodiques, Filtrage

Tout signal périodique de fréquence f_s peut se reconstituer par la superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de f_s : 0, f_s, 2 f_s, … ,n f_s,… Il peut donc s'écrire sous la forme :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n)$$

où les A_n sont des constantes positives et les φ_n des constantes.

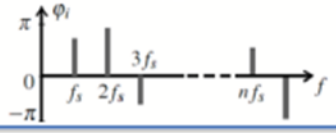
Cette opération s'appelle le développement en **série de Fourier** du signal $s(t)$.

Toute l'information concernant le signal est contenue dans A_0, les amplitudes A_1, A_2, … et les phases initiales φ_1, φ_2, … de ses composantes sinusoïdales. Cette information est représenté sur deux graphes en fonction de la fréquence

Le spectre en amplitude représentant les A_n.
(A_0 correspondant à la fréquence nulle)



Le spectre en phase représentant les φ_n.



- La valeur moyenne dans le temps du signal $s(t)$ est définie par: $\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T_s}\int_{t_0}^{t_0+T_s} s(t)\,dt$.

vérifier que A_0 est la valeur moyenne de $s(t)$, on l'appelle composante continue.

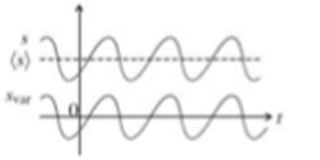
- La valeur efficace de $s(t)$ est définie par: $s_{eff} = \sqrt{\langle s(t)^2\rangle}$

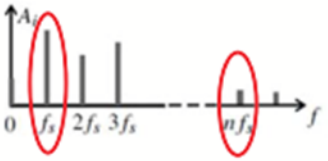
où $\langle s^2(t)\rangle = \frac{1}{T_s}\int_{t_0}^{t_0+T_s} s^2(t)\,dt$ est la valeur quadratique moyenne du signal $s(t)$.

- La partie variable du signal est:

$$s_{var}(t) = s(t) - \langle s(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n)$$

- $s_{var}(t)$ a la même forme que $s(t)$ mais centré autour de 0.
- La composante sinusoïdale $A_1 \cos(2\pi f_s t + \varphi_1)$ qui a la même fréquence f_s que le signal $s(t)$ est appelée **fondamental**.
- La composante sinusoïdale $A_n \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n)$ qui a une fréquence n fois plus élevée que la fréquence du signal, avec $n \geq 2$, est appelée **harmonique de rang n**.





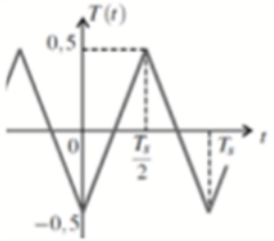
a. Soit le signal triangulaire de période T_s défini par:

$$T(t) = \begin{cases} \frac{-2t}{T_s} - \frac{1}{2} & si \quad \frac{-T_s}{2} < t < 0 \\ \frac{2t}{T_s} - \frac{1}{2} & si \quad 0 < t < \frac{T_s}{2} \end{cases}$$

- Montrer que son développement en série de Fourier est:

$$T(t) = -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2p+1)^2} \cos(2\pi(2p+1)\frac{t}{T_s})$$

- Tracer le spectre du signal $T(t)$.



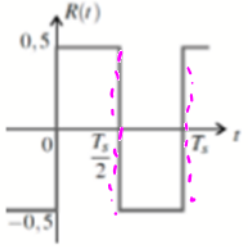
b. Soit le signal carré de période T_s défini par:

$$R(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & si \quad \frac{-T_s}{2} < t < 0 \\ \frac{1}{2} & si \quad 0 \leq t \leq \frac{T_s}{2} \end{cases}$$

- Montrer que son développement en série de Fourier est:

$$R(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2p+1)} \sin(2\pi(2p+1)\frac{t}{T_s})$$

- Tracer le spectre du signal $R(t)$.



$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_s t) + b_n \sin(2\pi n f_s t)]$$

Les coefficients de Fourier a_n et b_n sont donnés par les intégrales :

$a_n = \frac{2}{T_s}\int_{t_0}^{t_0+T_s} s(t)\cos(2\pi n f_s t)\,dt$ et $b_n = \frac{2}{T_s}\int_{t_0}^{t_0+T_s} s(t)\sin(2\pi n f_s t)\,dt$ où t_0 est un temps arbitraire.

si $s(t)$ paire $\Rightarrow b_n = 0$

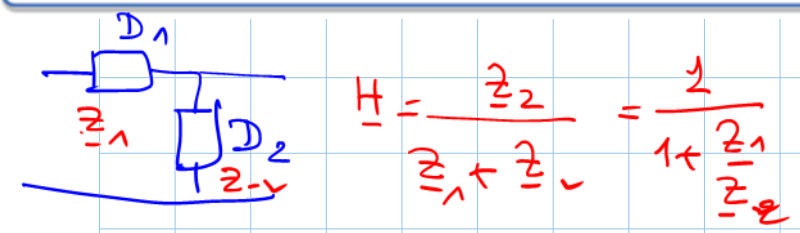
si $s(t)$ impaire $\Rightarrow a_n = 0$

Conclusion: Le fondamental et les premiers harmoniques contiennent la forme générale du signal. Les harmoniques de rang élevé contiennent les détails fins et les discontinuités du signal

La **fonction de transfert** d'un filtre est par définition :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{S}{E} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)} = |\underline{H}(j\omega)| e^{j\varphi}$$

$|\underline{H}(j\omega)| = G(\omega)$ est le gain du filtre et $\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega))$ est le déphasage entre $s(t)$ et $e(t)$.



$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}$$

Un filtre est **intégrateur** dans une bande atténuée si on peut écrire à l'intérieur de cette bande, A étant une constante réelle positive :

$$\underline{H}(j\omega) \simeq A/j\omega \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) \simeq -\pi/2$$

Le gain s'écrit: $G(\omega) = A/\omega \Rightarrow g_{dB} = 20\log A - 20\log\omega$

⇒ La courbe d'amplitude du diagramme de Bode a une asymptote de pente **−20 dB/décade**.

Remarque: Si la constante A est réelle négative, le filtre est dit **intégrateur-inverseur.**

Un filtre est **dérivateur** dans une bande atténuée si on peut écrire à l'intérieur de cette bande, A étant une constante réelle positive :

$$\underline{H}(j\omega) \simeq jA\omega \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) \simeq \pi/2$$

Le gain s'écrit: $G(\omega) = A\omega \Rightarrow g_{dB} = 20\log A + 20\log\omega$

⇒ La courbe d'amplitude du diagramme de Bode a une asymptote de pente **20 dB/décade**.

Remarque: Si la constante A est réelle négative, le filtre est dit **dérivateur-inverseur.**

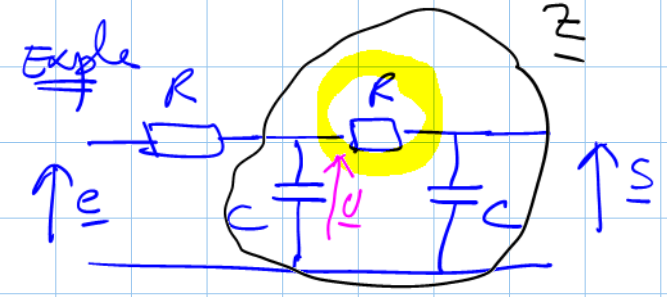
L'expression du signal d'entrée est: $e(t) = E\cos(\omega t + \varphi_e)$

Ainsi l'expression du signal de sortie est: $s(t) = E.G(\omega)\cos(\omega t + \varphi_e + \varphi(\omega))$

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n\omega t + \varphi_{ne}) = E_0 + E_1\cos(\omega t + \varphi_{1e}) + \cdots + E_n\cos(n\omega t + \varphi_{ne}) + \cdots$$

Par superposition, le signale de sortie sera alors:

$$s(t) = \underline{H}(0).E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G(n\omega).E_n\cos(n\omega t + \varphi_{ne} + \varphi(n\omega))$$



$$\underline{s} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + R}\,\underline{u}$$

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R} \cdot \underline{e}$$

Électronique numérique

. Numérisation d'un signal analogique

- L'opération de numérisation correspond à la succession de 3 étapes:

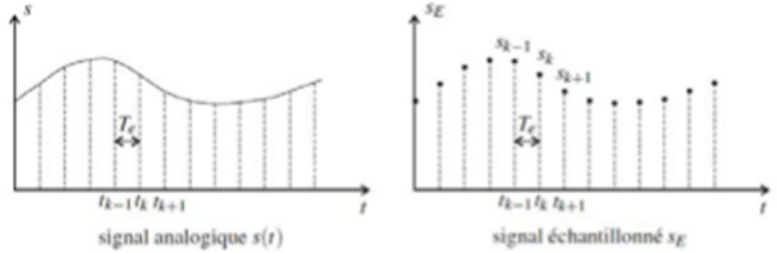
➢ **l'échantillonnage** permet de prélever un ensemble de valeurs (appelées échantillons) prises à des instants discrets.

➢ **la quantification** allouer à chacun de ces échantillons une valeur approchée (et qui correspond à une discrétisation des valeurs du signal).

➢ **le codage** consiste à coder en binaire sur un nombre fini de bits chaque niveau quantifié.

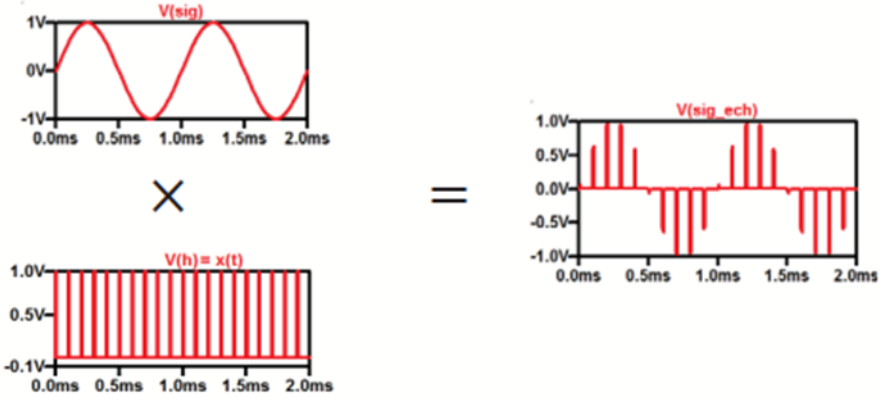


L'échantillonnage consiste à prélever les valeurs du signal **s(t)** étudié à des instants régulièrement espacés, de la forme $t_k = kT_e$ où $k \in \{0..N-1\}$, **N** étant le nombre de points d'acquisition et T_e est la période d'échantillonnage. On définit alors $F_e = 1 / T_e$ comme étant la fréquence d'échantillonnage.



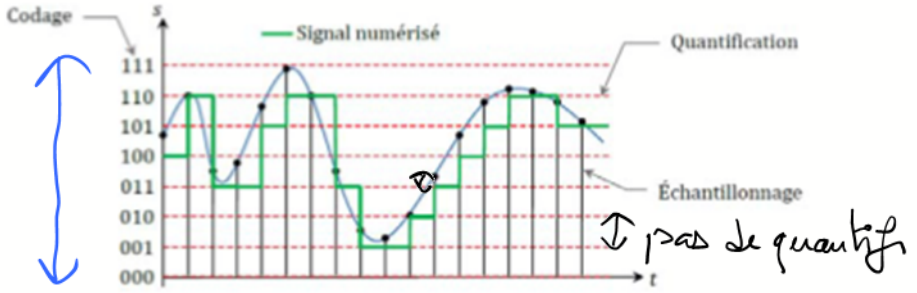
On obtient le signal échantillonné : $s_E = \{s_1, s_2, ..., s_{N-1}\}$ où $s_k = s(t_k)$.

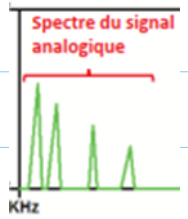
Mathématiquement cette opération revient à multiplier le signal analogique original **s(t)** par un signal **x(t)** d'amplitude 1 à chaque instant $t_k = kT_e$ et d'amplitude zéro sinon. Cette fonction est appelée peigne de Dirac.



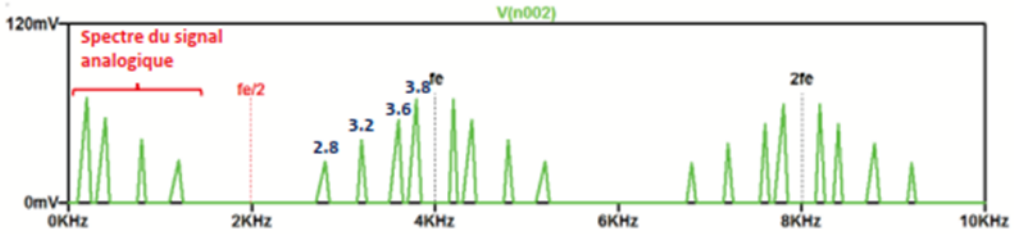
C.A.N à n bits ⟹ 2^N valeurs

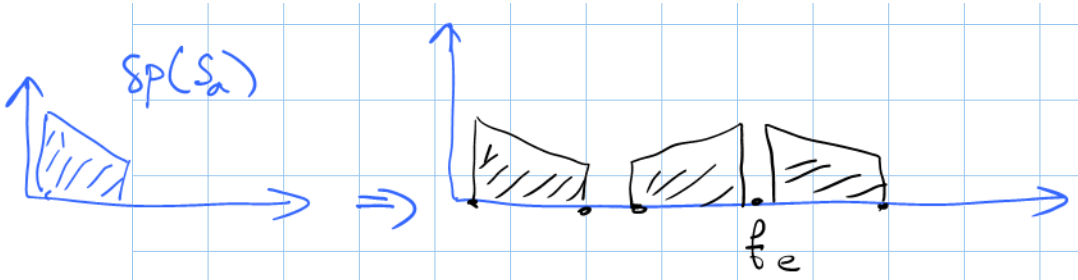
Lors de la numérisation, il faut également discrétiser les valeurs de l'amplitude du signal. **La quantification** consiste à affecter une valeur numérique approchée à chaque échantillon prélevé, parmi un nombre limité de valeurs possibles. Cette valeur de l'amplitude s'exprime en « bit » et l'action de transformer la valeur numérique de l'amplitude en une valeur binaire s'appelle **le codage**.





$$\text{Pas} = \frac{\text{Plage}}{2^N - 1}$$



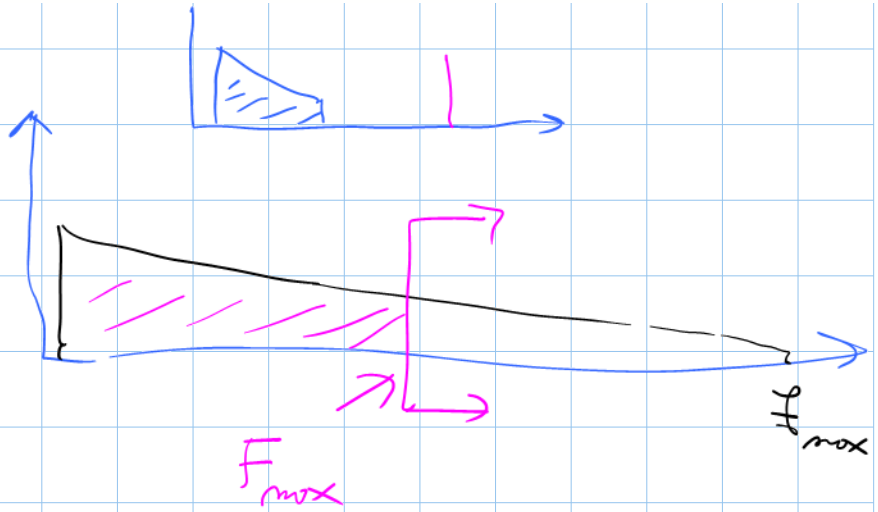


Condition de Nyquist-Shannon : pour que l'échantillonnage d'un signal ne modifie pas son spectre, il faut que la fréquence d'échantillonnage soit supérieure au double de la plus grande fréquence contenue dans ce spectre : $f_e > 2f_{max}$

Si cette condition n'est pas respectée, il y a un **sous-échantillonnage.** Entre 0 et f_{max}, le spectre du signal échantillonné comporte des harmoniques parasites résultant du repliement du spectre.

III.3. Nécessité d'un filtre anti-repliement

Les signaux réels présentent en général un spectre contenant un très grand nombre de raies. Le critère de Shannon est alors impossible à satisfaire. Cependant, il existe une fréquence f_{max} telle que les fréquences supérieures à f_{max} ne soient pas réellement porteuses d'informations dans le signal (le son : les fréquences supérieures à 20kHz n'étant pas audibles, il est inutile de les traiter.). On peut donc utiliser un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c telle que $f_{max} < f_c$, ce qui éliminera les fréquences inutiles, puis choisir une fréquence d'échantillonnage f_e telle que $f_c \leq f_e/2$ de manière à satisfaire le critère de Nyquist-Shannon. Le filtre utilisé porte le nom de **filtre anti-repliement.**



Actions d'un champ magnétique

La force de Laplace exercée sur un tronçon de conducteur de longueur $\overrightarrow{dl}$ plongé dans un champ magnétique uniforme extérieur $\vec{B}$ et parcouru par un courant d'intensité i est :

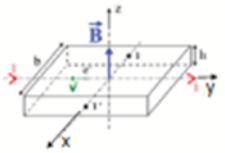
$$\overrightarrow{dF} = i\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$

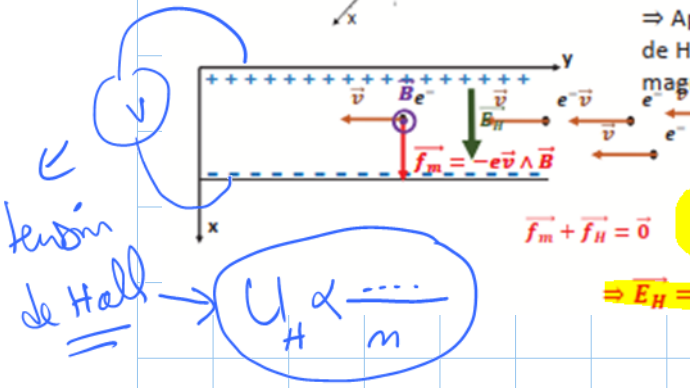
Pour un conducteur rectiligne MN, plongé dans un champ magnétique uniforme et parcouru par un courant d'intensité i allant de M vers N, la force de Laplace s'écrit : $\vec{F} = i\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}$

$$\begin{cases} d\vec{F} = \vec{J}_s \wedge \vec{B} \cdot dS & \text{surfacique} \\ d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B}\, d\tau & \text{volumique} \end{cases}$$

Effet Hall

Soit un conducteur de forme parallélépipédique parcouru par un courant d'intensité i, placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire.





Sous l'effet du champ magnétique, les électrons sont déviés vers la face d'équation $x = b/2$, la face d'équation $x = -b/2$ devient chargée positivement.
⇒ Apparition d'un champ électrique appelé: champ de Hall qui a un effet antagoniste à l'effet du champ magnétique sur les électrons.

⇒ En régime permanent, les lignes de courant redeviennent parallèles à Oy.

$$\overrightarrow{f_m} + \overrightarrow{f_H} = \vec{0} \quad \Rightarrow -e\vec{v} \wedge \vec{B} + (-e\overrightarrow{E_H}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{E_H} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

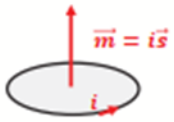
tension de Hall = $U_H \propto \dots$

→ Application = Teslamètre

« plaque semi-conductrice »

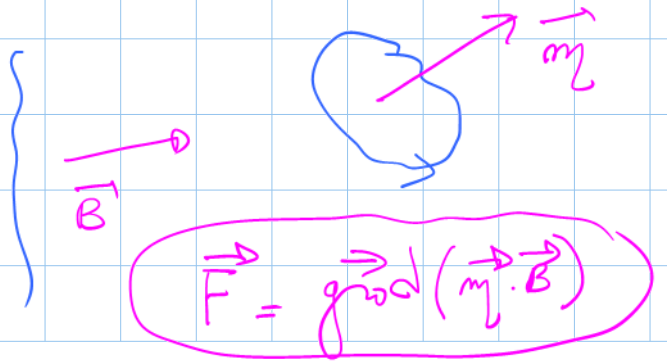
I.2. Moment de Laplace

Rappel: un circuit fermé parcouru par un courant d'intensité i se comporte comme un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{m} = i\vec{S}$

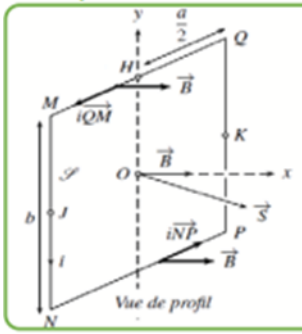


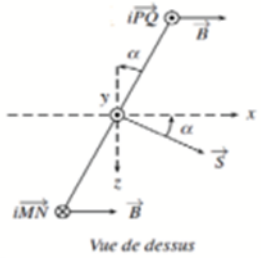
Un circuit ou un aimant de moment magnétique $\vec{m}$ plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B}$ subit un couple magnétique de moment :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$



Exemple





Une spire rectangulaire $MNPQ$ parcourue par un courant i, et plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. La spire peut tourner autour de l'axe (Oy). Déterminer l'expression de la force de Laplace ainsi que le couple magnétique exercé sur la spire.
Étudier la stabilité de la spire.

I.3. Puissance des actions de Laplace

Dan le cas d'un mouvement de translation à la vitesse $\vec{v}$, la puissance de Laplace s'écrit :

$$\mathcal{P}_L = \vec{f}.\vec{v}$$

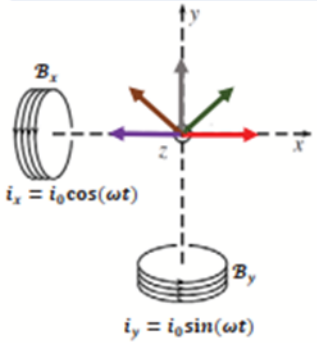
Dan le cas d'un mouvement de rotation à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$, la puissance de Laplace est :

$$\mathcal{P}_L = \vec{\Gamma}.\vec{\omega}$$

II. Effet moteur d'un champ magnétique tournant

III.1. Création d'un champ magnétique tournant

On peut créer un champ magnétique tournant avec deux bobines d'axes perpendiculaires, alimentées par des courants en quadrature de phase.



- La bobine $\mathcal{B}_x$ crée au point O le champ: $\vec{B_x} = Ki_0\cos(\omega t)\vec{u_x}$
- La bobine $\mathcal{B}_y$ crée au point O le champ: $\vec{B_y} = Ki_0\sin(\omega t)\vec{u_y}$

⇒ Le champ magnétique total créer au point O s'écrit:

$$\vec{B} = Ki_0(\cos(\omega t)\,\vec{u_x} + \sin(\omega t)\,\vec{u_y})$$

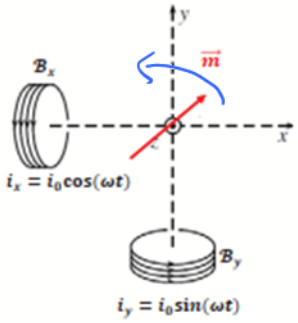
$$\vec{B}(\omega t = 0) = Ki_0\vec{u_x}$$

$$\vec{B}(\omega t = \pi/4) = \frac{Ki_0}{\sqrt{2}}(\vec{u_x} + \vec{u_y})$$

$$\vec{B}(\omega t = \pi/2) = Ki_0\vec{u_y}$$

$$\vec{B}(\omega t = 3\pi/4) = \frac{Ki_0}{\sqrt{2}}(-\vec{u_x} + \vec{u_y})$$

$$\vec{B}(\omega t = \pi) = -Ki_0\vec{u_x}$$



lorsqu'on place un aimant, de moment magnétique $\vec{m}$ au point O, mobile en rotation autour de l'axe (Oz), le champ magnétique exerce un couple sur l'aimant. Ainsi l'aimant tourne pour s'orienter parallèlement au champ magnétique. Quand celui-ci tourne, celui-là en fait de même. L'aimant tourne donc à la vitesse angulaire ω autour de (Oz). C'est le principe des moteurs synchrones, dans lesquels le champ magnétique et l'aimant tournent à la même vitesse angulaire.

Induction électromagnétique

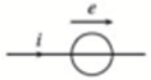
I.3. Loi de Faraday (1831)



En 1831, Faraday déduisit de ses expériences la loi
La variation temporelle du flux magnétique envoyé à travers un circuit engendre dans ce dernier une f.ém induite telle que

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}$$

- Le signe (-) traduit la loi de Lenz.
- La f.é.m. induite est comptée positive dans le sens conventionnel positif du courant



ce qui correspond à une convention générateur.

Loi de Lenz
Les effets de l'induction (magnétiques, électrocinétiques et mécaniques) sont orientés de façon à s'opposer à ses causes.

II.1. Auto-induction

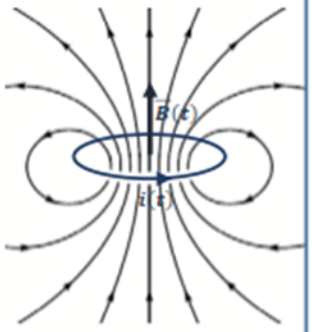
II.1.a. Inductance propre

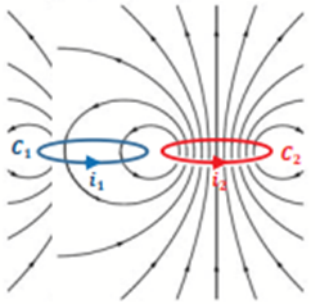
Soit un circuit parcouru par un courant d'intensité $i(t)$. Il crée un champ magnétique $\vec{B}(t)$, ce champ magnétique traverse le circuit qui lui a donné naissance, il crée donc un flux magnétique à travers son propre circuit, nommé **flux propre** φ_p.

φ_p est proportionnel à la norme de $\vec{B}(t)$, qui est elle même proportionnelle à $i(t)$; ⇒ φ_p est finalement proportionnel à $i(t)$.

$$\varphi_p = L.i$$

L :coefficient d'auto-inductance ou inductance propre du circuit.
L :s'exprime en **Henry** de symbole H.
L est toujours positif.
L est une constante pour un circuit rigide.





Les flux magnétiques envoyés réciproquement par un circuit C_1 et un circuit C_2 l'un à travers l'autre sont donnés par les formules :

$$\varphi_{1\to2} = M.i_1 \text{ et } \varphi_{2\to1} = M.i_2$$

- M est appelé **inductance mutuelle** entre les deux circuits C_1 et C_2
- M s'exprime en Henry H
- M est une grandeur algébrique

L = ? → $\varphi_p = L.I$

→ $W_m = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{1}{2} L i^2$

$e = \begin{cases} \to -d\varphi/dt \\ \to P_{em} + P_L = 0 \end{cases}$

E·E → schéma équivalt

EM → RFD → T·MC

Pour un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, on a toujours: $P_{em} + P_L = 0$

$e\,i + \vec{F}_L \cdot \vec{v} = 0$ (Translation)

$e\,i + \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega} = 0$ (Rotation)

Bilan de puissance:

$E \cdot E \times i + EM \cdot v \Rightarrow$

$EE \times i + EM \cdot \omega \Rightarrow$

Les équations de Maxwell

1-Opérateur nabla

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Notation classique	Notation avec l'opérateur nabla
$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}) = 0$	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$
$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$	$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$[5]
$\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,M = \Delta M$	$\nabla \cdot (\vec{\nabla} M) = \vec{\nabla}^2 M$
$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,M = \vec{0}$	$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} M) = \vec{0}$

Théorème de la divergence (Green-Ostrogradski)

$$\oiint_{P\in\mathscr{S}} \vec{a}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_P = \iiint_{M\in\mathscr{V}_{\mathscr{S}}} \operatorname{div}\vec{a}(M)\,\mathrm{d}\tau_M \quad .$$

Théorème du rotationnel (Stokes)

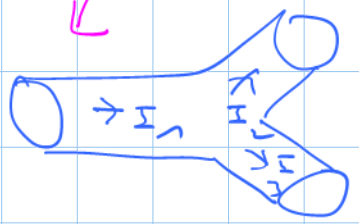
$$\oint_{P\in\Gamma} \vec{a}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{l}_P = \iint_{M\in\mathscr{S}_\Gamma} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{a}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M \quad .$$

1-équation de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}(M,t) = 0$$

R. stat. $\Rightarrow$ $\operatorname{div}\vec{j} = 0 \Leftrightarrow \oiint \vec{j}\,d\vec{S} = 0$

(1) Dém = voir Coul.



2-les équations de maxwell

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E}(M,t) = \dfrac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0} & \text{(M.G)} \\ \operatorname{div}\vec{B}(M,t) = 0 & \text{(M.Ø)} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}(M,t) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M,t) & \text{(M.F)} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}(M,t) = \mu_0\left(\vec{j}(M,t) + \varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M,t)\right) & \text{(M.A)} \end{cases} \qquad (16.5)$$

3-forme integrale des equations de Maxwell

$$\operatorname{div}\vec{E}(M,t)=\frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0} \iff \oiint_{M\in\Sigma}\vec{E}(M,t)\cdot d\vec{S}_M=\frac{Q_{int}(t)}{\varepsilon_0}.$$

Le champ magnétique est à flux conservatif :

$$\operatorname{div}\vec{B}(M,t)=0 \iff \oiint_{M\in\Sigma}\vec{B}(M,t)\cdot d\vec{S}_M=0,\ \forall\Sigma.$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}(M,t)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}(M,t) \iff \oint_{M\in\Gamma}\vec{E}(M,t)\cdot d\vec{\ell}_M=-\frac{d}{dt}\iint_{P\in\Sigma}\vec{B}(P,t)\cdot d\vec{S}_P.$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}(M,t)=\mu_0\left(\vec{j}(M,t)+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(M,t)\right) \Longleftarrow \oint_{M\in\Gamma}\vec{B}(M,t)\cdot d\vec{\ell}_M=\mu_0\left[\iint_{P\in\Sigma}\vec{j}(P,t)\cdot d\vec{S}_P+\varepsilon_0\iint_{P\in\Sigma}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(P,t)\cdot d\vec{S}_P\right]$$
$$=\mu_0\left[I_{enlacé}(t)+I_d(t)\right].$$

théo d'Ampère généralisé.

En régime stationnaire, le potentiel électrique vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta V(M)+\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}=0 \qquad (16.14)$$

Dans une zone vide de charge, dans laquelle $\rho(M)=0$, cette équation devient l'équation de Laplace :

$$\Delta V(M)=0 \qquad (16.15)$$

$\operatorname{div}\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$

$\operatorname{div}(-\vec{\nabla}V)=\rho/\varepsilon_0$

$\Delta V=-\rho/\varepsilon_0$

La puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à la matière est :

$$\mathscr{P}_V(M,t)=\vec{j}(M,t)\cdot\vec{E}(M,t).$$

La puissance cédée à un volume élémentaire $d\tau_M$ autour de M est :

$$d\mathscr{P}=\mathscr{P}_V(M,t)d\tau_M. \qquad (17.4)$$

La **loi d'Ohm locale** relie la densité de courant $\vec{j}(M,t)$ au champ électrique local $\vec{E}(M,t)$ par l'équation :

$$\vec{j}(M,t) = \gamma \vec{E}(M,t),$$

où γ est une constante appelée **conductivité** qui s'exprime en $\Omega^{-1}.m^{-1}$.

La **densité volumique d'énergie électromagnétique** est :

$$u_{em}(M,t) = \frac{\varepsilon_0 E^2(M,t)}{2} + \frac{B^2(M,t)}{2\mu_0} \qquad (17.9)$$

Le **vecteur de Poynting** ou vecteur densité de courant d'énergie est :

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t) \qquad (17.10)$$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ réels

d-bilan d'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + J.E + div\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) = 0$$

Identité de Poynting

Le bilan d'énergie électromagnétique pour une surface de contrôle fermée $\mathscr{S}$ s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_{M \in \mathscr{V}_{\mathscr{S}}} u_{em}(M,t)\,d\tau_M\right) + \oiint_{P \in \mathscr{S}} \vec{\Pi}(P,t)\cdot d\vec{S}_P = -\iiint_{M \in \mathscr{V}} (\vec{j}\cdot\vec{E})(M,t)\,d\tau_M, \qquad (17.11)$$

ou encore, de manière abrégée :

$$\frac{dU_{em}}{dt} + \Phi_{\Pi} = -\mathscr{P}_{\text{perdue}}. \qquad (17.12)$$

$\left(div\,\vec{\Pi} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\vec{j}\cdot\vec{E} \;;\; \mathscr{P}_{dem}\right)$

(SM 2003)

$\oint \vec{\Pi}\,d\vec{s} + \frac{dU_{em}}{dt} = -\mathscr{P}_{perdue}$

Thm de Poynting

8-ARQS (Approximation des régimes quasi-stationnaire)

L'ARQS (approximation des régimes quasi-stationnaires) est valide si le temps de propagation du champ électromagnétique τ est négligeable devant la période de ce champ T : $\tau \ll T$
ou encore que la dimension du circuit soit très inférieures à la longueur d'onde : $L \ll \lambda$

En régime quasi-stationnaire, on néglige les courants de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0 . \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant devant les courants électriques $\vec{j}$

Exemple:

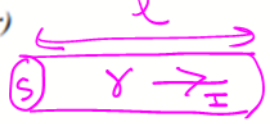
Conducteur en ARQS: $\left\| \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} \right\| \ll \|\vec{j}(M,t)\|$ MA s'écrit alors: $\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}(M,t)\right) = \mu_0 \vec{j}(M,t)$

Condensateur en ARQS: $\|\vec{j}(M,t)\| = 0$ MA s'écrit alors: $\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}(M,t)\right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t}$

$\vec{j} = \vec{0}$

Expression de la résistance
(effet conductivité + géométrie conducteur)

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$



relation de passage à la traversée d'une surface chargée en électromagnétisme:

$$\vec{E}_{voisinage\ milieu\ 2}(M) - \vec{E}_{voisinage\ milieu\ 1}(M) = \frac{\sigma_{au\ point}(M)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{de\ 1\ vers\ 2}$$

relation de passage à la traversée d'une nappe de courant surfacique en électromagnétisme:

$$\vec{B}_{voisinage\ milieu\ 2}(M) - \vec{B}_{voisinage\ milieu\ 1}(M) = \mu_0 \vec{j}_{S\ au\ point}(M) \wedge \vec{n}_{de\ 1\ vers\ 2}$$

Données

(L'ARQS consiste à négliger le temps de propagation $\tau_p = \frac{PM}{c}$ devant la durée T qui caractérise l'évolution de la source)

(si le phénomène est périodique)

ARQS $\frac{PM}{c} \ll T$

$PM \ll \lambda$

PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

Dans un milieu vide de charges et de courants, les équations de Maxwell s'écrivent :

MG $div(\vec{E}(M,t)) = 0$ MΦ $div(\vec{B}(M,t)) = 0$

MF $\overrightarrow{rot}(\vec{E}(M,t)) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$ MA $\overrightarrow{rot}(\vec{B}(M,t)) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t}$

$$\Delta(\vec{E}(M,t)) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}(M,t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Équations de propagation du champ électrique

$$\Delta(\vec{B}(M,t)) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}(M,t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Équations de propagation du champ magnétique

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \Psi(x,t) = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$$

$$\Delta(S(x,t)) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad \Rightarrow s(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

En notation complexe, le champ electrique (ou) magnétique d'une OPPM s'ecrit :

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})] \; ; \; \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{B}}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = i\omega \; ; \; \nabla = -i\mathbf{k}$$

OPPM

$$\begin{cases} \partial/\partial t = -i\omega \\ \vec{\nabla} = i\vec{k} \end{cases}$$

Règles de dérivation temporelle des OPPM en notation complexe :

$$\frac{\partial \vec{\underline{a}}}{\partial t} = i\omega\vec{\underline{a}}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\underline{a}}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{\underline{a}};$$

règles de dérivation spatiale :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\underline{a}} = -i\vec{k}\wedge\vec{\underline{a}}$$

$$\text{div}\,\vec{\underline{a}} = -i\vec{k}\cdot\vec{\underline{a}}$$

$$\Delta\vec{\underline{a}} = -k^2\vec{\underline{a}}.$$

Les equations de maxwell en notation complexe s'ecrivent :

$$-i\mathbf{k}\cdot\underline{\mathbf{E}}=0\ ;\ -i\mathbf{k}\wedge\underline{\mathbf{E}}=-i\omega\underline{\mathbf{B}}\ ;\ -i\mathbf{k}\cdot\underline{\mathbf{B}}=0\ ;\ -i\mathbf{k}\wedge\underline{\mathbf{B}}=i\epsilon_0\mu_0\omega\underline{\mathbf{E}}$$

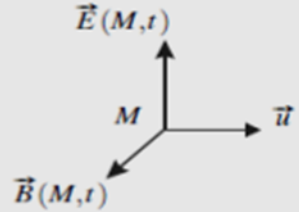
$\vec{B}=\frac{1}{c}\vec{u}\wedge\vec{E}$ et $\vec{E}=c\vec{B}\wedge\vec{u}$.

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ d'une **OPP électromagnétique dans le vide** sont perpendiculaires à la direction de propagation. On dit qu'ils sont **transversaux** et que l'onde est **transversale**. Ceci provient de la nullité de leur divergence.

En conclusion :

La structure de l'OPP électromagnétique dans le vide est la suivante :

- les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation $\vec{u}$,
- les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires entre eux,
- le trièdre $(\vec{u},\vec{E},\vec{B})$ est direct ;
- $\|\vec{B}\|=\frac{\|\vec{E}\|}{c}$.



$u_{em}(M,t)=\varepsilon_0E^2(M,t)=\frac{1}{\mu_0}B^2(M,t)$.

$v_\varphi=\frac{\omega}{k}$.

La relation k=f(w) : relation de dispersion

Il y a **dispersion** quand la vitesse de phase dépend de la pulsation ω de l'OPPM.

Dans ce cas la relation k=f(w) n'est pas linéaire

Polarisation d'une OPPM

La **polarisation** d'une OPPM est définie à partir de son vecteur champ électrique $\vec{E}$, comme la nature de la courbe décrite par l'extrémité de $\vec{E}$ dans un plan d'onde.

$$\left(\frac{E_x}{E_{mx}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{my}}\right)^2-2\left(\frac{E_x}{E_{mx}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{my}}\right)\cos(\varphi)=\sin^2(\varphi)$$

(Dém)

pol. rectiligne
- $\vec{E}$ a une seule Cpte ≠
- $\vec{E}$ a 2 Composantes ($\varphi = 0$ ou π)

pol. circulaire : 2 cptes de m̂ ampli
⊕
$\varphi = \pm \pi/2$

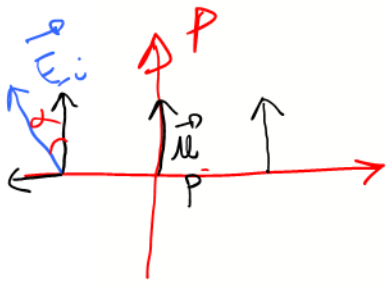
pol. ellip : si non

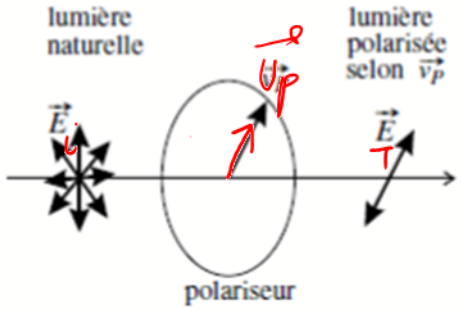
Rq si $\varphi = \varphi(t)$ → non polarisée

(cir. dte ⊕ circ. G ou che de m̂amp)
↓
rectilignes → Dém

Polariseur

Un polariseur transforme une lumière naturelle en lumière polarisée rectilignement selon sa direction de transmission privilégiée $\vec{v_P}$.

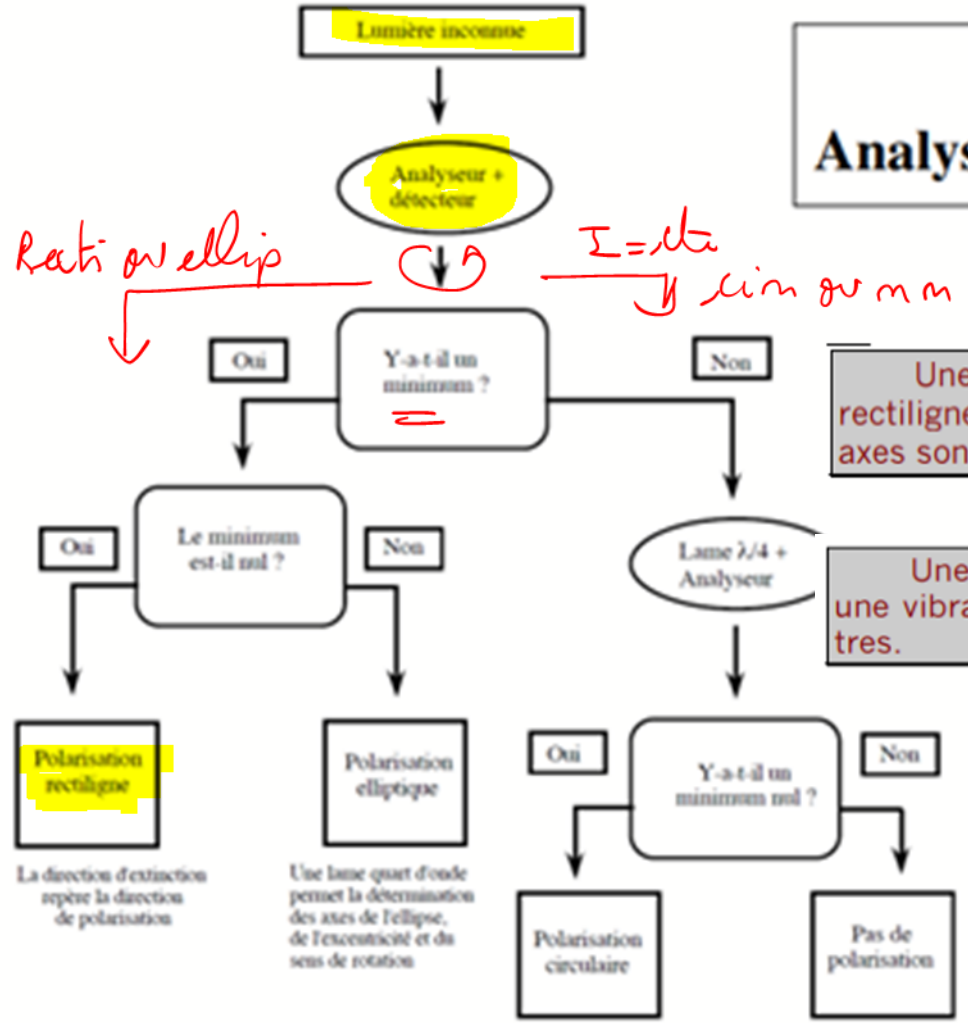




$$\vec{E}_T=\left(\vec{E}_i\cdot\vec{u}_P\right)\cdot\vec{u}_P$$

$$E_T = E_i \cos\alpha$$

Synthèse :
Analyse d'une polarisation inconnue



Une lame quart d'onde transforme une lumière polarisée rectilignement en une lumière polarisée elliptiquement dont les axes sont confondus avec les lignes neutres de la lame.

Une lame demi onde transforme une vibration rectiligne en une vibration rectiligne symétrique par rapport à ses lignes neutres.

II. Réflexion d'une OPPM sur un conducteur parfait

II.1. Hypothèse du conducteur parfait

Un conducteur est dit parfait si sa conductivité est infinie. La puissance dissipée par effet Joule est alors nulle

Montrer que le champ électromagnétique est nul dans un conducteur parfait.

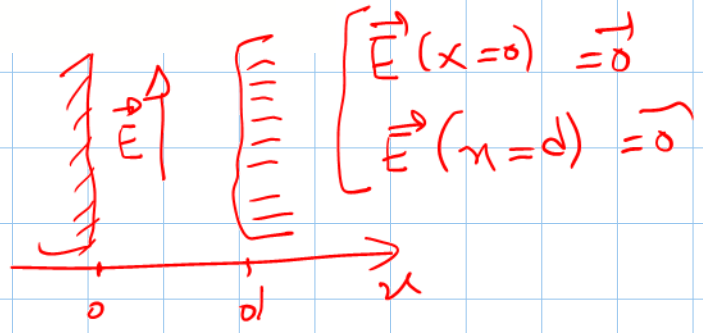
La puissance dissipée par effet Joule est nulle $\frac{dP_J}{d\tau} = \vec{j}\vec{E} = \gamma E^2 = 0$ $\Rightarrow E = 0$ ($\gamma \to \infty$) $\quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{B} = \overrightarrow{cte}$ Homogène à un champ magnétostatique qui est **nul** en absence du courant permanent. $\Rightarrow B = 0$

$\Rightarrow$ ***dans un conducteur parfait, le champ électromagnétique est nul***



$E_{tg}(M) = 0$



ONDE ELECTROMAGNETIQUE DANS UN PLASMA PEU DENSE

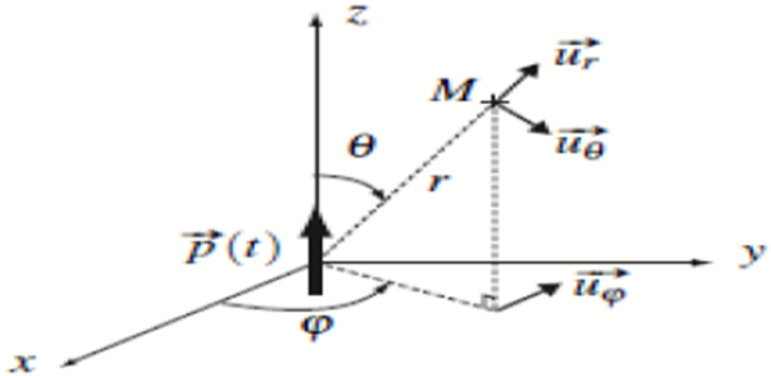
$\Rightarrow$ Application

rayonnement dipolaire

a << λ : C'est l'approximation des charges non relativistes.

a << r : c'est l'approximation dipolaire.

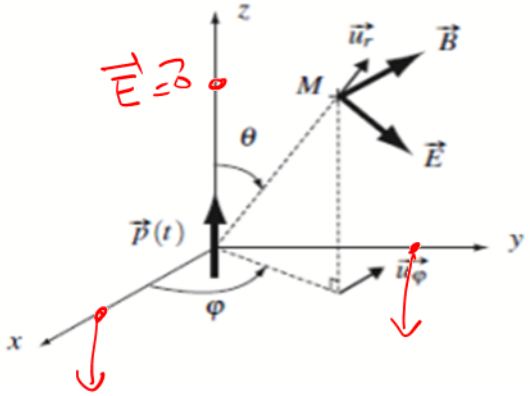
$$\vec{E}(M,t) = E_r(r,\theta,t)\vec{u_r} + E_\theta(r,\theta,t)\vec{u_\theta} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M,t) = B_\varphi(r,\theta,t)\vec{u_\varphi}.$$



Un point est dans la **zone de rayonnement** si sa distance r au dipôle électrique oscillant est telle que : $r \gg \lambda$.

Dans la zone de rayonnement le champ électromagnétique a localement la structure d'une onde plane progressive se propageant selon le vecteur $\vec{u_r}$.

$$\|\vec{B}\| = \frac{1}{c}\|\vec{E}\|, \quad \vec{B} = \frac{\vec{u_r} \wedge \vec{E}}{c} \quad \text{et} \quad \vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{u_r}.$$



Champ électromagnétique dans la zone de rayonnement

$$\begin{cases} \vec{E}(M,t) = -\dfrac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi r}\cos(\omega t - kr + \psi)\,\vec{u_\theta} \\ \vec{B}(M,t) = -\dfrac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi cr}\cos(\omega t - kr + \psi)\,\vec{u_\varphi} \end{cases}$$

Les champs électrique et magnétique sont proportionnels à $\sin\theta$ et le vecteur de Poynting moyen à $\sin^2\theta$. Cela signifie que l'émission dipolaire est **anisotrope**. Elle est maximale pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire dans les directions perpendiculaires au moment dipolaire et elle est nulle pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, c'est-à-dire dans la direction du dipôle.

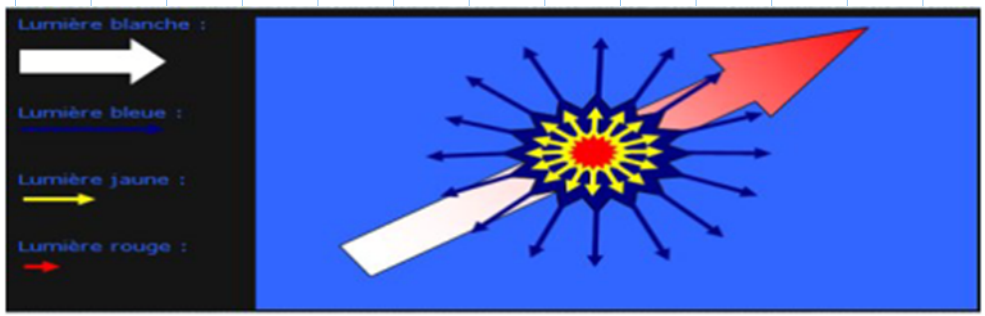
L'affaiblissement des champs électrique et magnétique de l'onde rayonnée en $\frac{1}{r}$ traduit la conservation de l'énergie.

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \iint_{\mathcal{S}(r)} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{dS} = \iint_{\mathcal{S}(r)} \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \vec{u_r} \right) \cdot (dS\vec{u_r})$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \times r d\theta \times r \sin\theta d\varphi = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3\theta d\theta \times 2\pi$$

$$= \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c},$$

Cette puissance est indépendante de r car le vide est non dissipatif !



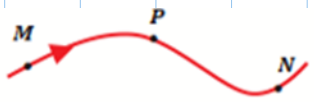
$d\mathcal{P} = \pi \cdot dS$ indép de r

$dS \propto r^2$

$\pi \propto \frac{1}{r^2}$

Optique Ondulatoire

II. 1. Chemin optique



Soit un rayon lumineux passant par M puis par N.

Alors, le chemin optique parcouru par la lumière entre M et N est par définition :

$$(MN) = \int_M^N n(P)\,dl_P$$

Dans un milieu *l.h.i.t*, si n est uniforme, alors la lumière se propage en ligne droite, et le chemin optique s'écrit:

$$(MN) = nMN$$

II. 2. Déphasage entre deux points

La vibration lumineuse en M s'écrit :

$$s(M,t) = a\cos(\omega t - \varphi(M))$$



Le retard dû à la propagation induit un déphasage du signal en N par rapport au signal en M vaut:

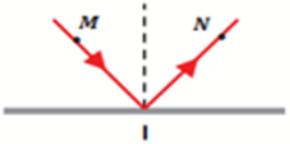
$$\Delta\varphi_{M\to N} = \varphi(N) - \varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(MN)$$

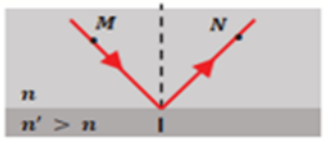
Remarque

En plus du déphasage lié à la propagation, la lumière subit un déphasage supplémentaire de π dans les situations suivantes :

- lorsque le rayon lumineux subit une réflexion sur une surface métallique ou sur un milieu plus réfringent

$$\Delta\varphi_{M\to N} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(MI) + \pi + \frac{2\pi}{\lambda_0}(IN)$$





$\Rightarrow$ $r = \frac{n - n'}{n + n'} < 0$

$r = |r| e^{i\pi}$

II. 3. Théorème de Malus

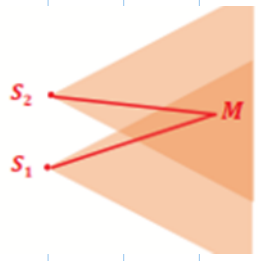
➢ Une surface d'onde relative au point source S est une surface formée des points M tels que $\varphi(M) = constante$, ou encore, ce qui est équivalent, $(SM) = constante$.

Les surfaces d'onde relatives au point source S sont orthogonales aux rayons lumineux issus de S.

III. 1. Intensité lumineuse

L'intensité lumineuse émise par une source est le module de la moyenne du vecteur de Poynting. Elle est proportionnelle à la moyenne temporelle du carré du signal lumineux :

$$I(M) = K\langle s(M,t)^2\rangle$$



Alors $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\langle cos(\Delta\Phi)\rangle$

Les interférences sont visibles si et seulement si le terme d'interférences est non nul $\langle cos(\Delta\Phi)\rangle \neq 0$.

Pour que le terme d'interférences soit non nul $\langle cos(\Delta\Phi)\rangle \neq 0$, il faut que le déphasage au point M entre les deux rayons soit indépendant du temps

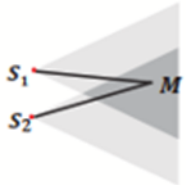
Or $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \omega_1 t - \frac{\omega_1}{c}(S_1M) - \varphi_{s1} - \omega_2 t + \frac{\omega_2}{c}(S_2M) - \varphi_{s2}$

$= (\omega_1 - \omega_2)t - \frac{\omega_1}{c}(S_1M) - \varphi_{s1} + \frac{\omega_2}{c}(S_2M) + \varphi_{s2}$

Alors,il faut que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ Soit alors $\Delta\Phi = \frac{\omega}{c}((S_2M) - (S_1M)) + \varphi_{s2} - \varphi_{s1}$

II. Interférences entre deux ondes cohérentes

II. 1. Ordre d'interférence



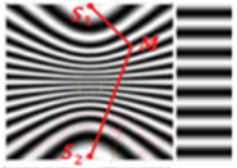
Soient deux sources ponctuelles S_1 et S_2 parfaitement cohérentes

En un point M, on définit l'ordre d'interférences par: $\boxed{P(M) = \frac{\Delta\Phi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda_0}}$

l'intensité lumineuse au point M s'écrit:

$$\boxed{I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(2\pi P(M))}$$

II. 2. Surfaces d'égale intensités



La surface d'égale intensité est l'ensemble des points M tel que

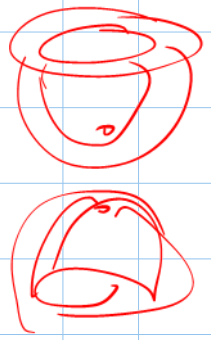
$I(M) = cte \Rightarrow P(M) = cte_1 \Rightarrow \Delta\Phi(M) = cte_2 \Rightarrow \delta(M) = cte_3$

Dans le vide: $\boxed{S_2M - S_1M = cte_4}$

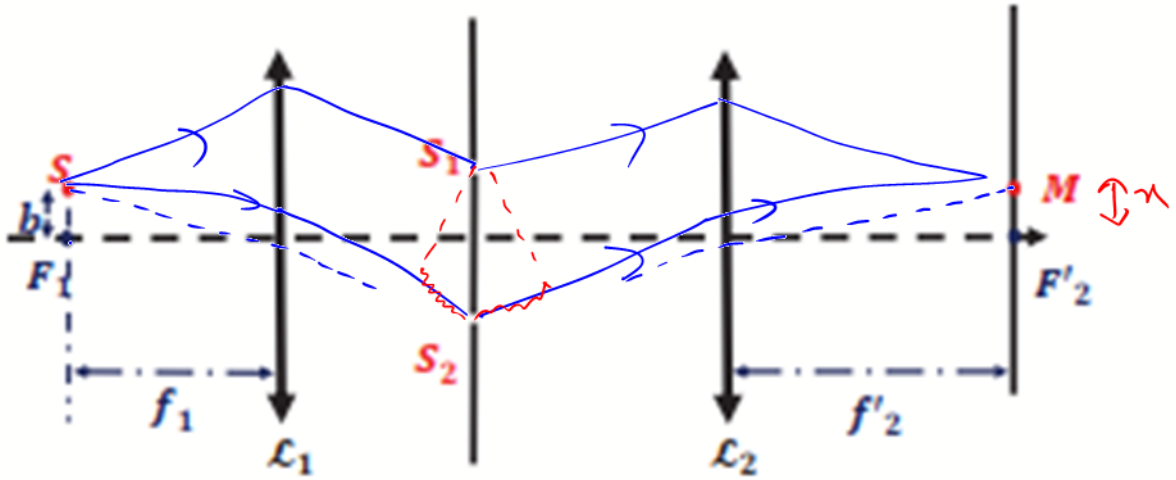
Les surfaces d'égale intensité sont des hyperboloïdes de révolution autour de (S_2S_1) de foyers S_1 et S_2.



- Sur un écran placé ∥ à (S_2S_1) on observe des franges rectilignes alternées sombres et brillantes
- Sur un écran placé ⊥ à (S_2S_1) on observe des anneaux circulaires alternés sombres et brillants



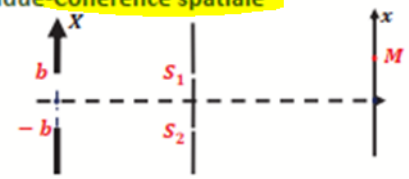
. Interférences à l'infini : Montage de Fraunhofer



$$\delta = \frac{ax}{f'_2} + \frac{ab}{f'_1}$$

Visibilité des franges produites par une source étendue-Cohérence spatiale

Le dispositif des fentes d'Young est éclairé par une source étendue, de longueur infinie le long (Oy) et de largeur $2b$ le long (OX)



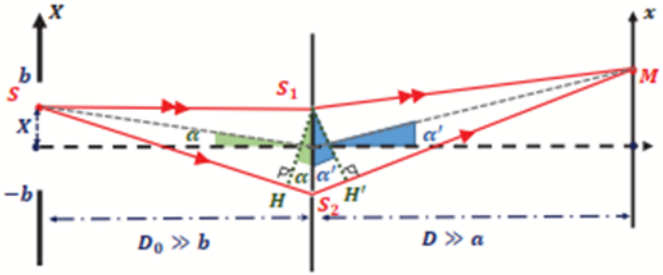
La source S d'extension dX est ponctuelle, elle contribue dans le champ d'interf rence par :

$$dI(M) = 2dI_0\left(1 + cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)\right)$$

$$2b \longrightarrow I_0$$

$$dX \longrightarrow dI_0 = \frac{I_0}{2b}dX$$

$$dI(M) = \frac{I_0}{b}\left(1 + cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)\right)dX$$



$$\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) \Rightarrow \delta(M) = SS_2 + S_2M - SS_1 - S_1M \Rightarrow \delta(M) = SS_2 - SS_1 + S_2M - S_1M$$

$$D_0 \gg b \Rightarrow (SS_1) \parallel (SS_2) \Rightarrow SS_2 - SS_1 = HS_2 = asin\alpha \simeq atg\alpha = \frac{aX}{D_0} \quad \boxed{\Rightarrow SS_2 - SS_1 = \frac{aX}{D_0}}$$

$$D \gg a \Rightarrow (S_1M) \parallel (S_2M) \Rightarrow S_2M - S_1M = H'S_2 = asin\alpha' \simeq atg\alpha' = \frac{ax}{D} \quad \boxed{\Rightarrow SS_2 - SS_1 = \frac{ax}{D}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \delta(M) = \frac{aX}{D_0} + \frac{ax}{D}} \qquad \boxed{\Rightarrow dI(M) = \frac{I_0}{b}\left(1 + cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{aX}{D_0} + \frac{ax}{D}\right)\right)\right)dX}$$

Les diff rentes sources ponctuelles sont incoh rentes entre elles, l'intensit r sultante sera gale la somme des intensités

$$\Rightarrow I(M) = \int_{-b}^{b} \frac{I_0}{b}\left(1 + cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{aX}{D_0} + \frac{ax}{D}\right)\right)\right)dX = \frac{I_0}{b}\int_{-b}^{b} dX + \frac{I_0}{b}\int_{-b}^{b} cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{aX}{D_0} + \frac{ax}{D}\right)\right)dX$$

$$= \frac{I_0}{b}2b + \frac{I_0}{b}\frac{1}{\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{a}{D_0}}\left[sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{aX}{D_0} + \frac{ax}{D}\right)\right)\right]_{-b}^{b} = 2I_0 + \frac{I_0}{\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ab}{D_0}}\left\{sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ab}{D_0} + \frac{ax}{D}\right)\right) - sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{-ab}{D_0} + \frac{ax}{D}\right)\right)\right\}$$

$$= 2I_0 + \frac{I_0}{\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{a(2b)}{D_0}}2sin\left(\frac{\pi a(2b)}{\lambda_0 D_0}\right)cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right) = 2I_0\left(1 + \frac{1}{\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{a(2b)}{D_0}}sin\left(\frac{\pi a(2b)}{\lambda_0 D_0}\right)cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right)\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow I(M) = 2I_0\left\{1 + sinc\left(\frac{\pi a(2b)}{\lambda_0 D_0}\right)cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right)\right\}} \qquad \boxed{C = \left|sinc\left(\frac{\pi a(2b)}{\lambda_0 D_0}\right)\right|}$$

III. Influence de la largeur spectrale - problème de la cohérence temporelle

III.1. Doublet de longueur d'onde

La source ponctuelle S émet maintenant un doublet de longueurs d'onde λ_1 et $\lambda_2 \gtrsim \lambda_1$.

Interpréter la représentation des franges produites.



Chacune des deux ondes produit son propre système de franges, sur l' cran on observe la superposition des deux systèmes. On remarque que le contraste n'est pas uniforme.

- Pour certains points, deux franges brillantes produites par chaque onde se superposent.
  ⇒ On dit qu'il y a coïncidence. La visibilité des franges en ces points est égale à 1.
- Pour d'autres points, une frange brillante produite par une onde se superpose à une frange sombre produite par l'autre onde.
  ⇒ On dit qu'il y a anti-coïncidence. On observe en ces points un brouillage des franges d'interférences. La visibilité des franges en ces points est égale à 0.

Pour la radiation de nombre d'onde σ_1

$$I_1(x) = 2I_0\left(1 + \cos\left(2\pi\sigma_1\frac{ax}{D}\right)\right)$$

Pour la radiation de nombre d'onde σ_2

$$I_2(x) = 2I_0\left(1 + \cos\left(2\pi\sigma_2\frac{ax}{D}\right)\right)$$

L'intensité résultante $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$

$$I(x) = 2I_0\left(2 + \cos\left(2\pi\sigma_1\frac{ax}{D}\right) + \cos\left(2\pi\sigma_2\frac{ax}{D}\right)\right)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$= 2I_0\left(2 + 2\cos\left(2\pi\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\frac{ax}{D}\right)\cos\left(2\pi\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\frac{ax}{D}\right)\right)$$

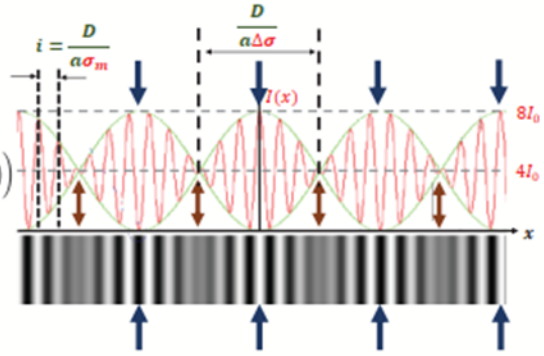
$$I(x) = 4I_0\left(1 + \cos\left(\pi\Delta\sigma\frac{ax}{D}\right)\cos\left(2\pi\sigma_m\frac{ax}{D}\right)\right)$$

Où $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ et $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$

$$C(x) = \left|\cos\left(\pi\Delta\sigma\frac{ax}{D}\right)\right|$$

- Les coïncidences: $C(x) = \left|\cos\left(\pi\Delta\sigma\frac{ax_c}{D}\right)\right| = 1 \Rightarrow \pi\Delta\sigma\frac{ax_{c,m}}{D} = m\pi$ $\Rightarrow x_{c,m} = m\frac{D}{a\Delta\sigma}$
- Les anti-coïncidences: $C(x) = 0 \Rightarrow \pi\Delta\sigma\frac{ax_{a,m}}{D} = (m + \frac{1}{2})\pi$ $\Rightarrow x_{a,m} = (m + \frac{1}{2})\frac{D}{a\Delta\sigma}$

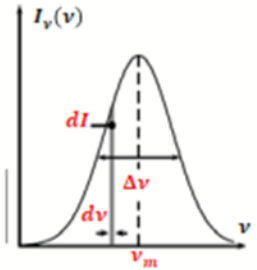
$$I(x) = 4I_0\left(1 + \cos\left(\pi\Delta\sigma\frac{ax}{D}\right)\cos\left(2\pi\sigma_m\frac{ax}{D}\right)\right)$$



$$I = 2I_0\left(1 + V\cos(\dots)\right)$$

$$2I_0(1-1) \leq I \leq 2I_0(1+1)$$

III.2. Source de faible largeur spectrale : cohérence temporelle

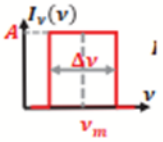


Chaque bande élémentaire de largeur $d\nu$ centrée sur ν telle que $d\nu \ll \nu$ se comporte comme une source quasi-monochromatique. L'intensité élémentaire correspondante s'écrit: $dI(M) = 2dI_0(1 + cos\left(2\pi\delta\frac{\nu}{c}\right))$

Où $dI_0 = I_\nu(\nu)d\nu \quad \Rightarrow dI(M) = 2I_\nu(\nu)(1 + cos\left(2\pi\delta\frac{\nu}{c}\right))d\nu$

Les différentes bandes sont incohérentes entre elles, alors

$$I(M) = \int_{distribution} 2\,I_\nu(\nu)(1 + cos\left(2\pi\delta\frac{\nu}{c}\right))d\nu$$



Soit pour une distribution rectangulaire:

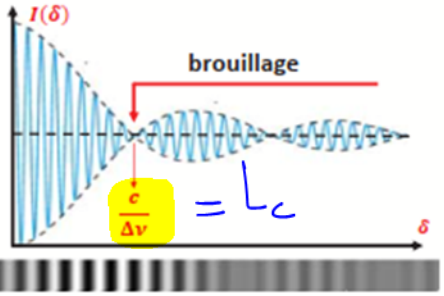
$$\Rightarrow I(\delta) = \frac{2I_0}{\Delta\nu}\int_{\nu_m-\frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_m+\frac{\Delta\nu}{2}} d\nu + \frac{2I_0}{\Delta\nu}\int_{\nu_m-\frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_m+\frac{\Delta\nu}{2}} cos\left(2\pi\delta\frac{\nu}{c}\right)d\nu = 2I_0 + \frac{2I_0}{\Delta\nu}\frac{1}{\frac{2\pi\delta}{c}}\left[sin\left(2\pi\delta\frac{\nu}{c}\right)\right]_{\nu_m-\frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_m+\frac{\Delta\nu}{2}}$$

$$\Rightarrow I(\delta) = 2I_0 + \frac{2I_0}{\Delta\nu}\frac{1}{\frac{2\pi\delta}{c}}\left\{sin\left(2\pi\delta\frac{\nu_m+\frac{\Delta\nu}{2}}{c}\right) - sin\left(2\pi\delta\frac{\nu_m-\frac{\Delta\nu}{2}}{c}\right)\right\}$$

$sin(a) - sin(b) = 2sin(\frac{a-b}{2})\,cos(\frac{a+b}{2})$

$$\Rightarrow I(\delta) = 2I_0 + 2I_0\frac{1}{\frac{2\pi\Delta\nu\delta}{c}}2sin\left(\frac{\pi\Delta\nu\delta}{c}\right)cos\left(\frac{2\pi\nu_m}{c}\delta\right)$$

$$\Rightarrow I(\delta) = 2I_0\left\{1 + sinc\left(\frac{\pi\Delta\nu}{c}\delta\right)cos\left(\frac{2\pi\nu_m}{c}\delta\right)\right\}$$



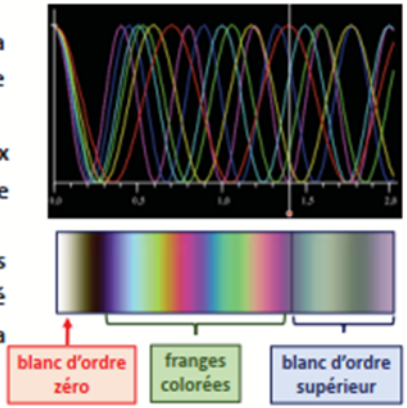
Le contraste s'écrit $C = \left|sinc\left(\frac{\pi\Delta\nu}{c}\delta\right)\right|$

$C = 0$ pour la 1^{er} fois

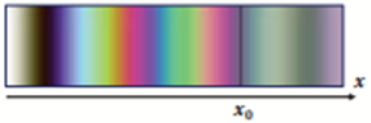
III.3. Interférences en lumière blanche

La lumière blanche contient toutes les radiations du spectre visible, de 0,39 μm (violet) à environ 0,75 μm (rouge). Comme il n'y a pas d'interférences entre des sources de fréquences différentes, on obtient sur l'écran la superposition des intensités correspondant aux différentes longueurs d'onde.

- Au centre, l'intensité est maximale quelle que soit la longueur d'onde: il y a donc une frange brillante blanche. C'est le blanc d'ordre zéro.
- En s'éloignant du centre, les franges correspondant aux différentes longueurs d'onde se décalent et on observe des franges colorées.
- En s'éloignant davantage du centre de l'écran, les franges disparaissent; l'écran est uniformément éclairé en blanc (on parle de blanc d'ordre supérieur) où il-y-a des radiations éteintes.



Sur l'écran, en un point d'abscisse x_0 du blanc d'ordre supérieur, déterminer le nombre et les longueurs d'ondes des radiations éteintes



Analyse du blanc d'ordre supérieur



Spectre cannelé

Une radiation éteinte vérifie $\Rightarrow P(M) = (m+\frac{1}{2});\ m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \delta(M) = (m+\frac{1}{2})\,\lambda_0 \quad \Rightarrow \frac{ax_0}{\lambda_0 D} = (m+\frac{1}{2})$

$\frac{1}{\lambda_r} < \frac{1}{\lambda_0} = (m+\frac{1}{2})\frac{D}{ax_0} < \frac{1}{\lambda_b} \quad \Rightarrow \frac{ax_0}{\lambda_r D} < (m+\frac{1}{2}) < \frac{ax_0}{\lambda_b D}$

$\Rightarrow \frac{ax_0}{\lambda_r D} - \frac{1}{2} < m < \frac{ax_0}{\lambda_b D} - \frac{1}{2}$ AN: $a = 0,3\ mm$, $x_0 = 15\ mm$, $D = 1\ m$, $\lambda_r = 750\ nm$, $\lambda_b = 400\ nm$ $\Rightarrow 5,5 < m < 10,75$

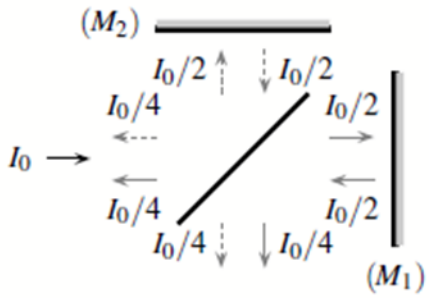
$\Rightarrow m = \{6,7,8,9,10\}$ On observe cinq cannelures sombres, de longueurs d'onde

$\Rightarrow \lambda_{0m} = \frac{ax_0}{(m+\frac{1}{2})\,D}$ À chaque valeur de m correspond une longueur d'onde

interferometre de Michelson

Le dispositif séparateur

La lame séparatrice permet de séparer le faisceau lumineux incident en deux faisceaux

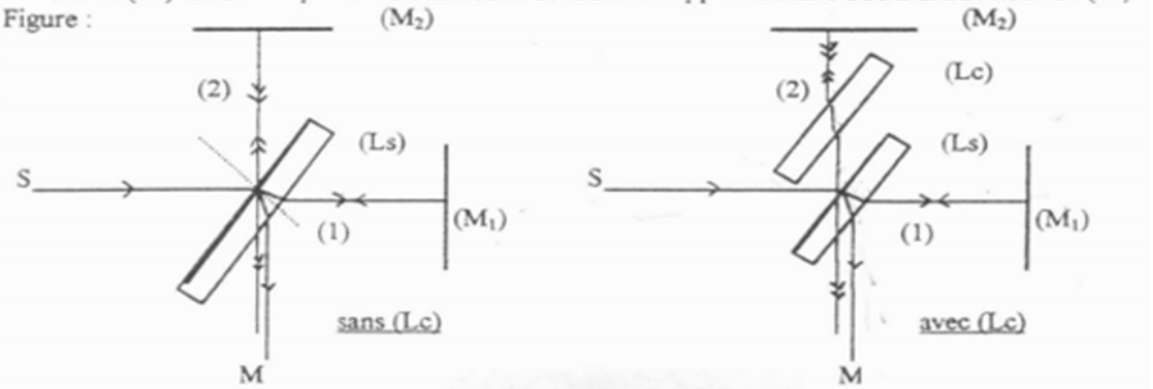


Le choix d'un coefficient de réflexion R=1/2 pour la séparatrice permet d'avoir une bonne intensité

Rôle de la lame compensatrice :

Le rôle de (Lc) est de compenser la différence de marche supplémentaire due à la traversée de (Ls) .

Figure :

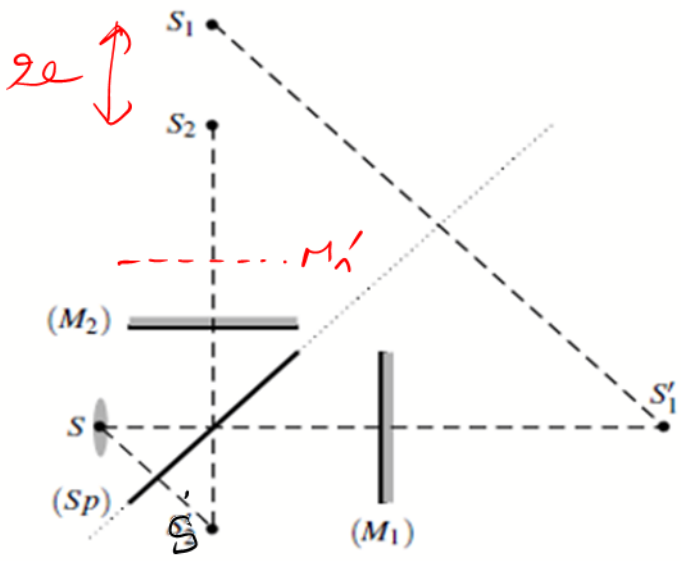


(1) traverse 3 fois (Ls) pour arriver en M

(2) traverse 1 fois

compensation

Positions des deux sources secondaires S_1 et S_2 :



S_1' : image de S par M1

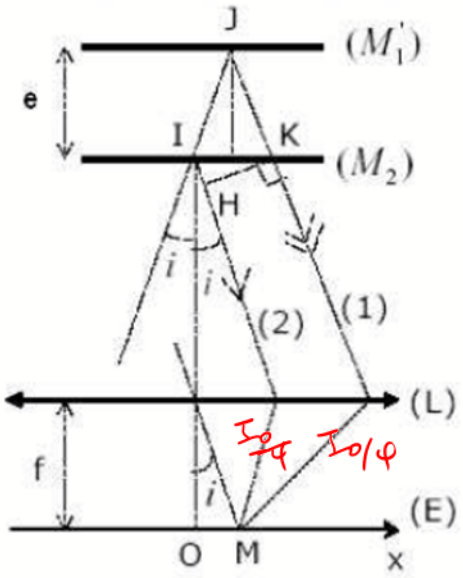
S_1 : image de S_1' par Sp ou

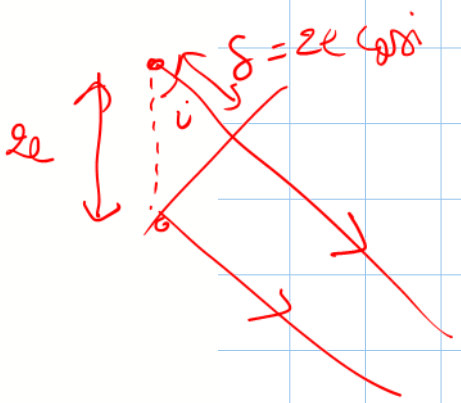
image de S_2' par M1'

S_2 : image de S_2' par M2

S1S2=2e

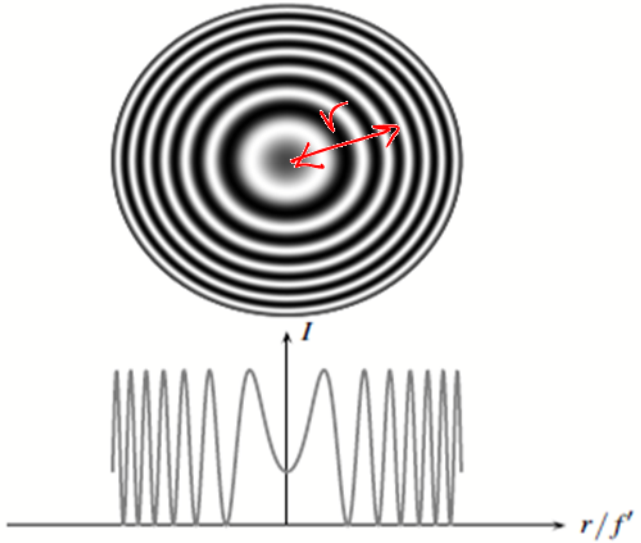
Différence de marche :





$$\delta = (IJK) - (IH) = IJ + JK - IH = \frac{2e}{\cos i} - IK\sin i = \frac{2e}{\cos i} - \frac{2e\sin^2 i}{\cos i} \Rightarrow \boxed{\delta = 2e\cos i}$$

En pratique, on a tout intérêt à utiliser une lentille convergente de plus grande distance focale possible, afin d'avoir de grands anneaux sur l'écran.



Allure de l'intensité

Remarque :

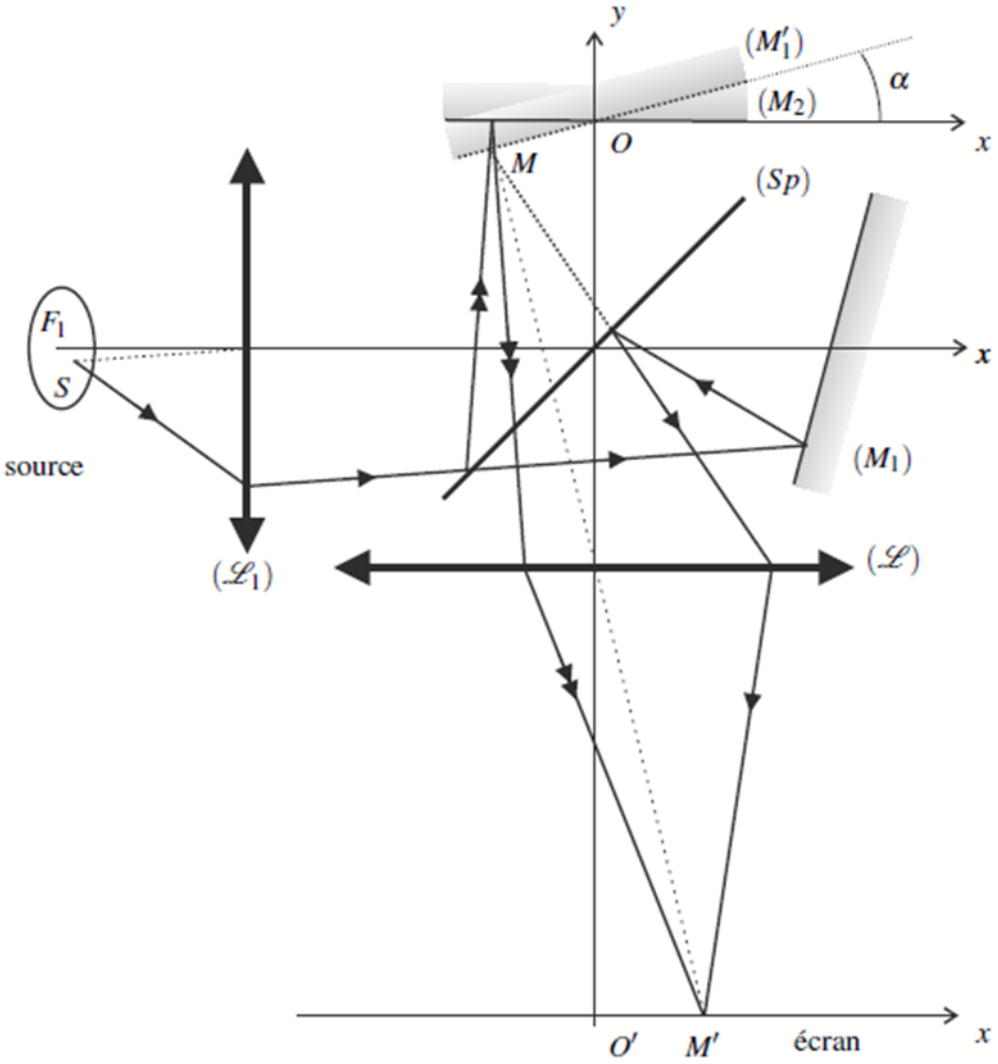
Pour p fixé, si e diminue cos (i) augmente c.-à-d. i diminue

Lorsqu'on diminue l'épaisseur e de la lame d'air, un anneau donné rétrécit et finit par disparaître au centre de la figure d'interférences.

Contact optique : si e=0(M2 =M1')

Au contact optique, l'écran est uniformément éclairé ; c'est la **teinte plate**.

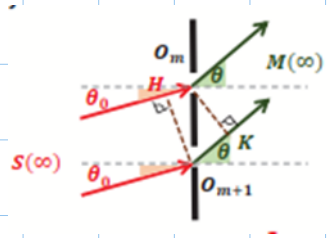
Si on s'éloigne du centre le contraste des franges augmente (cohérence temporelle)



$$\delta = 2e = 2\alpha x$$

Interférence à N ondes – réseaux

Relation fondamentale des réseaux



$$\delta(M) = (SO_{m+1}M) - (SO_mM)$$
$$\delta(M) = SO_{m+1} - SO_m + O_{m+1}M - O_mM$$
$$= -HO_m + O_{m+1}K$$
$$= -a\sin(\theta_0) + a\sin(\theta)$$
$$\Rightarrow \delta(M) = a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0))$$

Le déphasage entre ces deux ondes s'écrit: $\Phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda}a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0))$

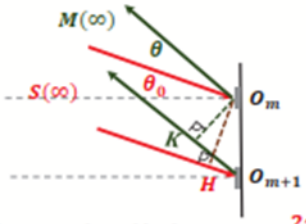
L'ordre d'interférences s'écrit: $P(M) = \frac{\Phi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{a}{\lambda}(\sin(\theta) - \sin(\theta_0))$

Les interférences sont constructives (pics sur l'écran) si: $P(M) = m; \quad m \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\lambda}(\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = m \quad \boxed{\Rightarrow a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = m\lambda}$$

relation fondamentale des réseaux par transmission

réseaux par réflexion



$$\delta(M) = (SO_{m+1}M) - (SO_mM)$$
$$\delta(M) = SO_{m+1} - SO_m + O_{m+1}M - O_mM$$
$$= O_{m+1}H + O_{m+1}K$$
$$= a\sin(\theta_0) + a\sin(\theta)$$
$$\Rightarrow \delta(M) = a(\sin(\theta) + \sin(\theta_0))$$

Le déphasage entre ces deux ondes s'écrit: $\Phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda}a(\sin(\theta) + \sin(\theta_0))$

L'ordre d'interférences s'écrit: $P(M) = \frac{\Phi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{a}{\lambda}(\sin(\theta) + \sin(\theta_0))$

Les interférences sont constructives (pics sur l'écran) si: $P(M) = m; \quad m \in \mathbb{Z}$

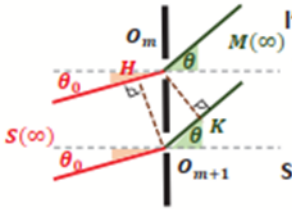
$$\Rightarrow \frac{a}{\lambda}(\sin(\theta) + \sin(\theta_0)) = m \quad \boxed{\Rightarrow a(\sin(\theta) + \sin(\theta_0)) = m\lambda}$$

relation fondamentale des réseaux par réflexion

par transmission $\sin(\theta) = \frac{m\lambda}{a} + \sin(\theta_0)$

par réflexion $\sin(\theta) = \frac{m\lambda}{a} - \sin(\theta_0)$

les directions θ dépendent de la longueur d'onde
⇒ le réseau est dispersif.



l'amplitude de l'onde diffractée par le réseau $A(M) = A_1 + A_2 + \ldots + A_N$

Or $A_{m+1} = A_m e^{i\Phi} \Rightarrow A_2 = A_1 e^{i\Phi} \Rightarrow A_3 = A_2 e^{i\Phi} = A_1 e^{i2\Phi} \Rightarrow A_N = A_1 e^{i(N-1)\Phi}$

$$\Rightarrow A(M) = A_1 + A_1 e^{i\Phi} + \cdots + A_1 e^{i(N-1)\Phi} = A_1 \left(1 + e^{i\Phi} + \cdots + e^{i(N-1)\Phi}\right)$$

Suite géométrique de 1^{er} terme 1, de raison $e^{i\Phi}$ contenant N termes

$$1 + e^{i\Phi} + \cdots + e^{i(N-1)\Phi} = \frac{1 - e^{iN\Phi}}{1 - e^{i\Phi}} \qquad \Rightarrow A(M) = A_1 \frac{1 - e^{iN\Phi}}{1 - e^{i\Phi}}$$

$$\Rightarrow A(M) = A_1 \frac{1 - e^{iN\Phi}}{1 - e^{i\Phi}} = A_1 \frac{e^{i\frac{N\Phi}{2}}}{e^{i\frac{\Phi}{2}}} \frac{e^{-i\frac{N\Phi}{2}} - e^{i\frac{N\Phi}{2}}}{e^{-i\frac{\Phi}{2}} - e^{i\frac{\Phi}{2}}} = A_1 e^{i\frac{(N-1)\Phi}{2}} \frac{\sin(\frac{N\Phi}{2})}{\sin(\frac{\Phi}{2})}$$

On admet que l'amplitude de l'onde diffractée par la fente N° 1 de largeur h

$$A_1(M) = A_0 sinc\left[\frac{\pi h}{\lambda}(\sin(\theta) - \sin(\theta_0))\right]$$

L'amplitude de l'onde diffractée par N fentes s'écrit:

$$A(M) = N A_0 sinc\left[\frac{\pi h}{\lambda}(\sin(\theta) - \sin(\theta_0))\right] e^{i\frac{(N-1)\Phi}{2}} \frac{\sin(\frac{N\Phi}{2})}{N\sin(\frac{\Phi}{2})}$$

L'intensité de l'onde diffractée par N fentes s'écrit: $I(M) = A(M)A^*(M)$

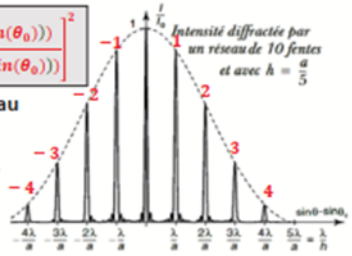
$$I(M) = I_0 \, sinc^2\left[\frac{\pi h}{\lambda}(\sin(\theta) - \sin(\theta_0))\right] \left[\frac{\sin(\frac{N\Phi}{2})}{N\sin(\frac{\Phi}{2})}\right]^2 \qquad I_0 = (NA_0)^2$$

Terme de diffraction

Terme d'interférences
Fonction réseau

$$I(M) = I_0 \, sinc^2\left[\frac{\pi h}{\lambda}(\sin(\theta) - \sin(\theta_0))\right] \left[\frac{\sin(\frac{N\pi a}{\lambda}(\sin(\theta) - \sin(\theta_0)))}{N\sin(\frac{\pi a}{\lambda}(\sin(\theta) - \sin(\theta_0)))}\right]^2$$

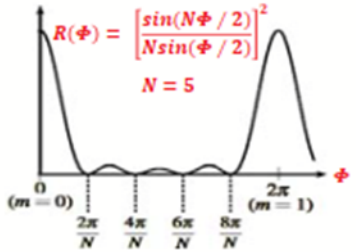
- Les interférences constructives données par le réseau sont modulées par le phénomène de diffraction.
- En conséquence, l'intensité du spectre va diminuer avec l'ordre m. c'est bien ce que l'on observe expérimentalement.

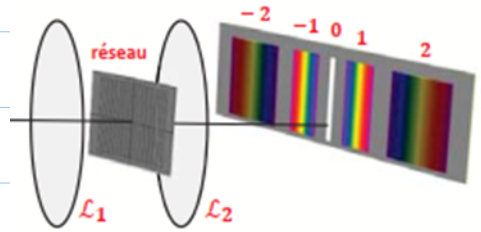


Remarque:

- Entre deux maxima principaux il-y-a $N-1$ minima nuls

  $0 < \Phi = \frac{2k\pi}{N} < 2\pi \quad \Rightarrow 0 < k < N \quad \Rightarrow N-1$ minima nuls
- Entre deux maxima principaux il-y-a $N-2$ maxima secondaires

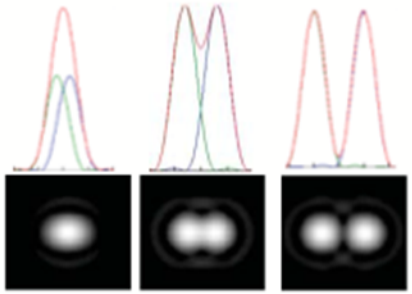




III.3. Séparation d'un spectre d'ordre donné

Critère de Rayleigh :

Soit une source contenant deux radiations voisines λ et $\lambda + \Delta\lambda$; $\lambda \gg \Delta\lambda$. Dans un ordre donné, le réseau peut résoudre ces deux raies si la largeur angulaire qui sépare les maximums principaux des deux radiations est supérieure ou égale à la demi-largeur angulaire d'un maximum principal.



On définit le pouvoir de résolution du réseau par: $\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}}$ où $\Delta\lambda_{min}$ est l'écart de la limite de résolution.

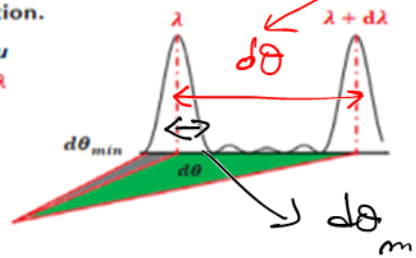
Déterminer l'expression du pouvoir de résolution du réseau

- Écart angulaire $d\theta$ entre le max de λ et le max de $\lambda + d\lambda$

le max de λ à l'ordre m vérifie $sin(\theta) - sin(\theta_0) = \frac{m\lambda}{a}$

À une variation $d\lambda$ correspond la variation $d\theta$ telle que:

$$cos(\theta)d\theta = \frac{m d\lambda}{a} \quad \Rightarrow d\theta = \frac{m d\lambda}{a cos(\theta)}$$



- Écart angulaire $d\theta_{min}$ entre le max et le 1^{er} min de λ

entre le max et le 1^{er} min la phase varie de $d\Phi = \frac{2\pi}{N}$ Or $\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} a\,(sin(\theta) - sin(\theta_0))$

$\Rightarrow d\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} a cos(\theta) d\theta$ Si $d\Phi = \frac{2\pi}{N}$ Alors $d\theta = d\theta_{min}$ D'où $\frac{2\pi}{\lambda} a cos(\theta) d\theta_{min} = \frac{2\pi}{N}$

$$\Rightarrow d\theta_{min} = \frac{\lambda}{N a cos(\theta)}$$

Le critère de Rayleigh impose: $d\theta \geq d\theta_{min}$ À la limite de résolution: $d\theta = d\theta_{min}$ et $d\lambda = \Delta\lambda_{min}$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{m d\lambda}{a cos(\theta)} \qquad \Rightarrow d\theta_{min} = \frac{\lambda}{N a cos(\theta)}$$

?

R.F.R ⇒ diffé à λ variable et $\theta_0 \equiv$ Cte

$\varphi = f(\theta)$

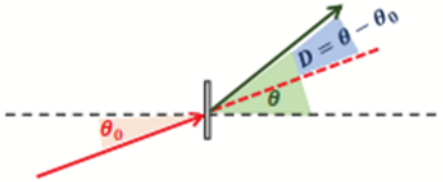
↓

diff à $\lambda \equiv$ Cte

↓ $(d\varphi = \frac{2\pi}{N})$ ⇒ $d\theta_{min}$

III.2. Minimum de déviation

En observant dans la direction d'une interférence constructive d'ordre 1, on constate en faisant varier θ_0 (angle d'incidence) que la déviation du faisceau passe par un minimum.



Déterminer le minimum de déviation D_m pour un ordre m donné et réécrire la relation fondamentale des réseaux.

La déviation est: $D = \theta - \theta_0$ Au minimum de déviation on a: $\frac{dD}{d\theta_0} = \frac{d\theta}{d\theta_0} - 1 = 0$ $\Rightarrow d\theta = d\theta_0$

Un maximum d'ordre m vérifie $a\,(sin(\theta) - sin(\theta_0)) = m\lambda \Rightarrow d[a\,(sin(\theta) - sin(\theta_0))] = 0$

$\Rightarrow cos(\theta)d\theta - cos(\theta_0)d\theta_0 = 0 \Rightarrow cos(\theta) = cos(\theta_0) \Rightarrow \theta = \theta_0$ ou $\theta = -\theta_0$

- $\theta = \theta_0 \Rightarrow D = 0$ inutile

$\Rightarrow \theta_m = -\theta_0 \Rightarrow D_m = 2\theta_m$ Et la formule des réseaux devient: $a\left(sin\left(\frac{D_m}{2}\right) - sin\left(-\frac{D_m}{2}\right)\right) = m\lambda$

$$\Rightarrow 2asin\left(\frac{D_m}{2}\right) = m\lambda$$

Déf ♡

Transferts thermiques

Le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}$ est lié au gradient du champ de température $T(M,t)$ dans le matériau par la **loi de Fourier** :

$$\vec{j}_{th}(M,t) = -\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T(M,t), \qquad (23.4)$$

où λ est une grandeur positive appelée **conductivité thermique** du matériau.

λ se mesure en $\text{W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$.

Le signe « $-$ » dans la loi de Fourier traduit le fait que l'énergie se déplace des régions chaudes vers les régions froides puisque, d'après les propriétés du gradient, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,T$ pointe dans la direction dans laquelle la température augmente. Ce sens du transfert thermique est déterminé par le second principe de la thermodynamique.

La quantité d'énergie qui traverse dS_M dans le sens du vecteur $\vec{n}$ entre les instants t et $t + dt$ est :

$$\delta^2 Q = \vec{j}_{th}(M,t) \cdot \vec{n}\, dS_M dt. \qquad (23.1)$$

L'équation de la diffusion thermique s'écrit dans une géométrie quelconque :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\,\Delta T(M,t), \tag{23.13}$$

où ΔT est le laplacien du champ de température et a la **diffusivité thermique**.

On appelle **diffusivité thermique** du matériau la quantité :

$$a = \frac{\lambda}{\mu c}.$$

L'équation de la diffusion thermique en présence de sources s'écrit :

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T(M,t) + \frac{1}{\lambda}\mathscr{P}_V(M,t). \tag{23.14}$$

Résistance thermique

On appelle **résistance thermique** R_{th} du conducteur thermique entre Σ_1 et Σ_2, le rapport :

$$R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1\to 2}}. \tag{23.21}$$

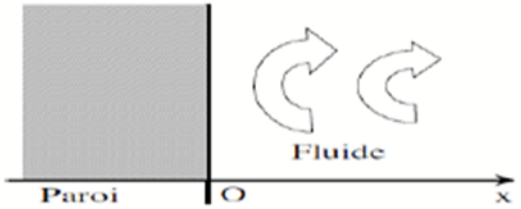
La résistance thermique s'exprime en $\text{W}^{-1}.\text{K}$.

On définit aussi la **conductance thermique** :

$$G_{\text{th}} = \frac{1}{R_{\text{th}}} = \frac{\Phi_{1\to 2}}{T_1 - T_2}.$$

Transfert thermique convectif

. Loi de Newton



Loi de Newton

Lorsqu'une paroi solide à la température T est en contact avec un fluide à la température T_F, la densité de flux thermique orienté de la paroi vers le fluide suit la loi phénoménologique de Newton :

$$j_{cc} = h(T - T_F)$$

où h est le coefficient de transfert thermique de surface.
On parle de transfert conducto-convectif car il y a :
⋆ conduction (ou diffusion) thermique dans la couche limite du fluide ;
⋆ convection dans le volume du fluide.

Le flux thermique à travers une surface S est alors proportionnel à T_T_F. On peut définir une résistance thermique équivalente

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{hS}$$

Loi de Stefan

La puissance totale émise par un corps noir, à la température T et pour toutes les longueurs d'onde, est :

$P = \sigma S T^4$ S = surface émettant le rayonnement
σ = constante de Stefan = 5,6703 10^{-8} $W.m^{-2}.K^{-4}$

Loi de déplacement de Wien (Prix Nobel 1911) : $\lambda_{max} T = 0{,}002898\ m.K$

Mécanique quantique

relation de Planck-Einstein

$$E_{\text{photon}} = h\nu\,. \tag{24.1}$$

$$p_{\text{photon}} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}\,. \tag{24.2}$$

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p}\,. \tag{24.3}$$

La fonction d'onde et l'équation de Schrödinger

La description complète de l'état dynamique d'une particule quantique, de masse m, à un instant t dans un référentiel $\mathscr{R}$, se fait au moyen d'une *fonction d'onde* $\psi(M,t)$ à valeurs complexes. La probabilité de présence de la particule, à l'instant t, dans un volume mésoscopique $\mathrm{d}\tau$ centré au point M est donnée par la relation :

$$\mathrm{d}P(M,t) = \psi(M,t)\psi^*(M,t)\mathrm{d}\tau = |\psi(M,t)|^2\,\mathrm{d}\tau\,.$$

$$\int_{\mathscr{D}} |\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = 1\,. \tag{24.4}$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t)\,. \tag{24.5}$$

L'équation de Schrödinger indépendante du temps

On appelle **état stationnaire** un état du système caractérisé par une fonction d'onde *factorisée* sous la forme $\psi(x,t) = \varphi(x)f(t)$, où φ et f sont a priori deux fonctions à valeurs *complexes*.

La densité de probabilité de présence $|\psi(x,t)|^2$ associée à un état *stationnaire* est **indépendante du temps**.

L'équation ci-dessus prend alors la forme suivante, connue sous le nom d'**équation de Schrödinger indépendante du temps** :

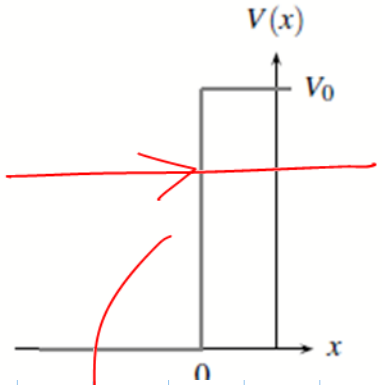
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi(x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)\,. \tag{24.6}$$

la fonction $\varphi(x)$ est continue.

la fonction dérivée $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$ est continue en tout point où l'énergie potentielle $V(x)$ est continue ou ne présente pas de discontinuité d'amplitude infinie.

On ne peut pas attribuer simultanément à une particule quantique une position rigoureusement précise et une quantité de mouvement rigoureusement précise. Il existe une limitation intrinsèque à la définition simultanée de la position et de la quantité de mouvement imposée par l'inégalité de Heisenberg spatiale :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}\,. \tag{24.7}$$

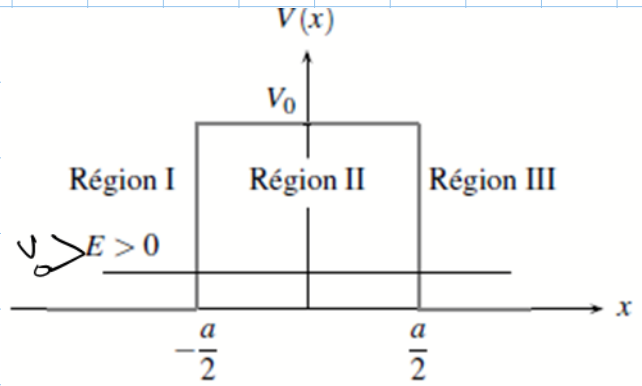


ST. 2017

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \text{ (région I)}, \\ V_0 > 0 & \text{pour } x \geq 0 \text{ (région II)}, \end{cases}$$

La **profondeur de pénétration** de la particule quantique d'énergie $E < V_0$ dans la région interdite par la mécanique classique est :

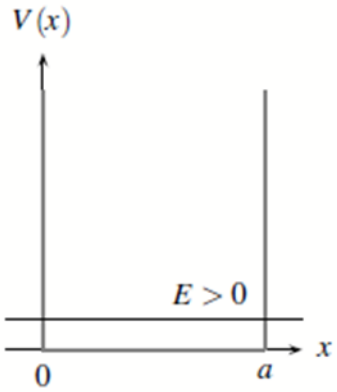
$$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}. \qquad (26.6)$$



Approximation d'une barrière épaisse

$a \gg \delta$, c'est-à-dire : $a \gg \dfrac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$.

$$T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right). \qquad (26.9)$$



$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } x < 0, \\ 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq a, \\ +\infty & \text{pour } x > a. \end{cases}$$

Les régions de l'espace où le potentiel est infiniment élevé sont interdites à la particule quantique.

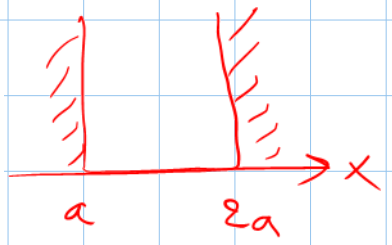
$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

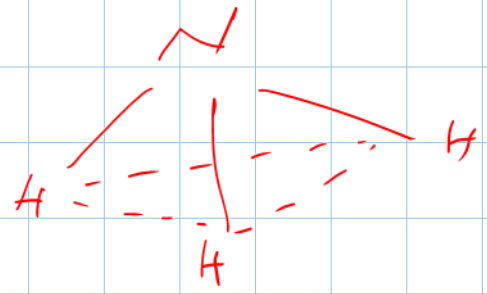
L'expression complète des fonctions d'onde obtenues est la suivante :

$$\psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right) \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right) \quad \text{avec } E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (26.15)$$

La superposition de deux états stationnaires d'énergie E_1 et $E_2 > E_1$ conduit à une probabilité de présence qui oscille à la fréquence ν vérifiant la relation :

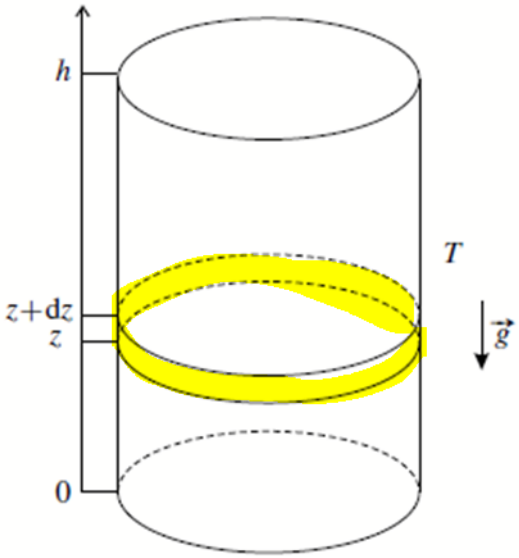
$$h\nu = E_2 - E_1. \qquad (26.16)$$





(thermodynamique statistique)

Pression dans une atmosphère isotherme



Relation fondamentale de l'hydrostatique

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\mu(z)g$$

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

(Dém !)

$$k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A} = \frac{8{,}314\ (\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}})}{6{,}022.10^{23}\ (\mathrm{mol^{-1}})} = 1{,}381.10^{-23}\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}.$$

Poids de Boltzmann pour une particule indépendante à l'équilibre avec un thermostat

Dans un système à l'équilibre thermique avec un thermostat de température T, la probabilité pour une particule microscopique indépendante d'être dans un état quantique d'énergie E_i est proportionnelle au **facteur de Boltzmann** $\exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)$.

$$p(E_i) = A \times \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)$$

$\sum_i p(E_i) = 1,$ $Z = \sum_i \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right).$ ***Z : fonction de partition***

$$p(E_i) = \frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right).$$

Population d'un état quantique

Si N est le nombre total de particules dans le système (nombre très grand pour un système thermodynamique), le nombre moyen de particules du système occupant l'état quantique d'énergie E_i est :

$$\langle N_i \rangle = N \times p(E_i) = \frac{N}{Z}\exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right).$$

Dans la suite on appellera « population » de l'état d'énergie E_i ce nombre moyen $\langle N_i \rangle$.

$$\frac{\langle N_j \rangle}{\langle N_i \rangle} = \frac{p(E_j)}{p(E_i)} = \exp\left(-\frac{E_j - E_i}{k_B T}\right)$$

Énergie moyenne $\langle E_{\text{particule}} \rangle = \sum_i E_i p(E_i) = \frac{1}{Z} \sum_i E_i \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right).$ $= -\frac{\partial}{\partial \beta}(\ln(Z))$ (Dém)

Les fluctuations de l'énergie d'une particule sont caractérisées par:

- **la variance :** $Var(E_{par}) = \langle E_{par}{}^2 \rangle - \langle E_{par} \rangle^2 = \sum_i E_i^2 p_i - \left(\sum_i E_i p_i\right)^2$
- **écart type :** $\sigma(E_{par}) = \sqrt{\langle E_{par}{}^2 \rangle - \langle E_{par} \rangle^2} = \sqrt{\sum_i E_i^2 p_i - \left(\sum_i E_i p_i\right)^2}$

$\langle E_{\text{système}} \rangle = N \langle E_{\text{particule}} \rangle.$

L'énergie interne U du système qui est utilisée en thermodynamique est égale à l'énergie moyenne du système :

$$U = \langle E_{\text{système}} \rangle \simeq E_{\text{système}}.$$

Capacité thermique

Par définition, la capacité thermique du système est :

$$C = \frac{dU}{dT} = \frac{d\langle E_{\text{système}} \rangle}{dT}.$$

théorème d'équirépartition de l'énergie

Dans un système à l'équilibre à la température T, l'énergie moyenne par molécule associée à un degré de liberté quadratique est : $\langle a\xi^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$.

Capacité thermique à volume constant d'un gaz monoatomique

$$E_{\text{molécule}} = E_{c,\text{molécule}} = \frac{1}{2} m^* \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Une molécule monoatomique, modélisée par un point matériel, a trois degrés de liberté quadratiques correspondant aux mouvements dans les trois directions de l'espace.
Il en résulte que la capacité thermique molaire à volume constant d'un gaz parfait monoatomique est, d'après le théorème d'équirépartition :

$$C_{V,m} = \frac{3}{2} R.$$

Capacité thermique à volume constant d'un gaz diatomique

Une molécule diatomique rigide a 5 degrés de liberté quadratiques :

- 3 degrés de liberté de translation correspondant aux translations dans les trois directions de l'espace,
- 2 degrés de liberté de rotation .

Il en résulte que la capacité thermique molaire à volume constant d'un gaz parfait diatomique est, d'après le théorème d'équirépartition :

$$C_{V,m} = \frac{5}{2} R.$$

La prise en compte du mouvement de vibration d'une molécule diatomique introduit 2 degrés de liberté quadratiques supplémentaires.
Par suite la capacité thermique molaire à volume constant d'un gaz parfait diatomique devient, d'après le théorème d'équirépartition :

$$C_{V,m} = \frac{7}{2} R.$$

Capacité thermique à volume constant d'un solide

a) Théorie classique de la capacité thermique des solides

$$E_{\text{atome}} = \frac{1}{2}m^*\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + ax^2 + by^2 + cz^2$$

Un atome dans un solide a 6 degrés de liberté quadratiques, dont 3 proviennent de l'énergie cinétique de translation et 3 proviennent de l'énergie potentielle.
D'après le théorème d'équirépartition, il en résulte que la capacité thermique molaire à volume constant d'un solide monoatomique est :

$$C_{V,m} = 6 \times \frac{1}{2}R = 3R.$$

Ce résultat est la **loi de Dulong et Petit**,

La théorie classique prédit une valeur de $C_{V,m}$ proche de la valeur expérimentale pour de nombreux cristaux, à température ambiante. Mais elle ne rend pas du tout compte de la variation $C_{V,m}$ avec la température. En effet, on constate expérimentalement que la capacité thermique de tous les cristaux diminue si la température baisse. Elle tend vers zéro lorsque la température tend vers zéro. Pour interpréter cette observation il faut tenir compte de la quantification de l'énergie des atomes.

b) Modèle d'Einstein *(Voir série)*

$$C_{V,m} = 3R \times \left(\frac{\frac{\Theta_E}{2T}}{\sinh\left(\frac{\Theta_E}{2T}\right)}\right)^2$$

