

① Cinématique des fluides

Fluide: Milieu matériel continu et déformable qui peut s'écouler en prenant forme de la conduite sous la moindre excitation.

Le fluide est discontinu à l'échelle microscopique.

⇒ On le met alors à l'échelle mésoscopique.

dimension de l'écoulement $\ll$ dimension de la particule de volume $dV \ll$ dimension de l'écoulement.
(10^{-3}) (10^{-6}) (10^{-3})

I) Description Eulerienne et Lagrangienne:

1) Description de Lagrange:

À chaque particule de fluide, on détermine sa position $\overrightarrow{OP_i}$

ou vitesse $\overrightarrow{V_i} = \frac{d\overrightarrow{OP_i}}{dt}$ et son accélération $\overrightarrow{a_i} = \frac{d\overrightarrow{V_i}}{dt}$

⇒ Description abstraite en le nombre de particules fluides étudiées.

2) Description Eulerienne:

À chaque instant t , on détermine la vitesse $\overrightarrow{V}$ de la particule passant par le point M ; notée $\overrightarrow{V}(M, t)$

3) Trajectoire de particules et lignes de courant - écoulement:

	Definition et Description	Temps de passage
Trajectoire de la particule	• Ensemble des <u>positions</u> de la particule en fonction du temps t . → Description Lagrangienne.	lent
Lignes de courant	• Ensemble des <u>points</u> de l'écoulement <u>tangents</u> à la vitesse à instant donné. → Description Eulerienne.	courant
Lignes de Emission	• Ensemble des <u>positions</u> de la particule passant par le point M à des instants ultérieurs. → Description Lagrangienne + Eulerienne	lent

Trajectoire de particule: $\overrightarrow{V}(M, t) = \overrightarrow{V}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = V_x \\ \frac{dy}{dt} = V_y \\ \frac{dz}{dt} = V_z \end{cases}$

Equation de lignes de courant: $\left\{ M \in \text{Fluide} / \overrightarrow{V} \wedge d\vec{l} = 0 \right\}$

Cylindriques	Cylindriques	Sphériques
$\frac{dx}{r} = \frac{dy}{r} = \frac{dz}{r} ; \frac{d\varphi}{r} = \frac{d\theta}{r} = \frac{d\phi}{r}$	$\frac{dx}{r} = \frac{dy}{r} = \frac{dz}{r} ; \frac{d\varphi}{r} = \frac{d\theta}{r} = \frac{d\phi}{r}$	$\frac{dx}{r} = \frac{dy}{r} = \frac{dz}{r} ; \frac{d\varphi}{r} = \frac{d\theta}{r} = \frac{d\phi}{r}$

• Régime stationnaire $\Rightarrow$ lignes de courant et trajectoires confondues.

II) Conditions aux limites:

• Loin de l'obstacle: $\overrightarrow{V}(r \rightarrow +\infty) = \overrightarrow{V_0}$ (perturbations négligeables).

• Proche de l'obstacle: $\overrightarrow{V}_N(P \in \text{obstacle}) = \overrightarrow{V}_N(r=R) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{V}_N(r=R) = \overrightarrow{0}$

• Proche d'un obstacle cylindrique $\overrightarrow{\omega}$: $\overrightarrow{V}_N(r=R) = \overrightarrow{\omega}$.

II) Accélération de particule fluide:

1) Dérivées particulières:

$$\frac{D\overrightarrow{V}(M, t)}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \overrightarrow{V}(M, t)}{\partial t}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{(\overrightarrow{V}(M, t) \cdot \text{grad})}_{\text{dérivée convective}} \overrightarrow{V}(M, t)$$

① écoulement stationnaire $\Leftrightarrow \frac{\partial \overrightarrow{V}(M, t)}{\partial t} = \overrightarrow{0}$

② écoulement uniforme $\Leftrightarrow (\overrightarrow{V}(M, t) \cdot \text{grad}) \overrightarrow{V}(M, t) = \overrightarrow{0}$.

2) Interprétation de la dérivée convective:

$$(\overrightarrow{V}(M, t) \cdot \text{grad}) \overrightarrow{V}(M, t) = \underbrace{\text{grad} \left(\frac{V^2}{2} \right)}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{\text{rot}(\overrightarrow{V}) \wedge \overrightarrow{V}}_{\text{rotation}}.$$

① écoulement rotationnel $\Leftrightarrow \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \overrightarrow{0}$.

② écoulement déformable $\Leftrightarrow \text{rot}(\overrightarrow{V}) \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$.

III) Conservation de masse et de volume:

1) Débit massique et volumique:

① En magnétohydrostatique: $I = \frac{dQ}{dt} = \iint \underbrace{\overrightarrow{J}}_{\text{intensité de courant électrique (C.m}^{-2}\text{)}} \cdot \underbrace{d\vec{S}}_{\text{vecteur densité volumique de charge (C.m}^{-3}\text{)}}.$

② Par analogie: $D_m = \frac{dm(t)}{dt} = \iint \underbrace{\overrightarrow{J}_m}_{\text{densité massique (kg.m}^{-2}\text{)}} \cdot \underbrace{d\vec{S}}_{\text{vecteur densité de masse (kg.m}^{-3}\text{)}}.$

③ De plus on définit: $D_v = \frac{dV(t)}{dt} = \iint \underbrace{\overrightarrow{V}}_{\text{densité volumique (m}^{-3}\text{)}} \cdot \underbrace{d\vec{S}}_{\text{vecteur de l'écoulement (m}^{-3}\text{)}}.$

④ Avec: $\overrightarrow{J}(M, t) = \overrightarrow{J}(M, t) \cdot \overrightarrow{V}(M, t)$

2) Relation de conservation de conservation de masse: (continuité)

$\frac{dm(t)}{dt} = \text{production} + \text{échange} = D_m = \iint \overrightarrow{J} \cdot d\vec{S}.$

→ $D_m = \frac{dm(t)}{dt} + \iint \overrightarrow{J} \cdot d\vec{S} = \iiint \frac{\partial \overrightarrow{J}(M, t)}{\partial t} \cdot d\vec{\epsilon} + \text{div} \overrightarrow{J} \cdot d\vec{\epsilon}$

Si $D_m = 0$: $\iiint \left(\frac{\partial \overrightarrow{J}(M, t)}{\partial t} + \text{div} \overrightarrow{J} \right) \cdot d\vec{\epsilon} = 0 ; \forall d\vec{\epsilon}.$

⇔ $\frac{\partial \overrightarrow{J}(M, t)}{\partial t} + \text{div} \overrightarrow{J}(M, t) = 0$ ②

⇔ $\frac{\partial \overrightarrow{J}}{\partial t} + \text{div}(\overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{V}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \overrightarrow{J}}{\partial t} + \overrightarrow{V} \cdot \text{grad}(\overrightarrow{J}) + \overrightarrow{J} \cdot \text{div} \overrightarrow{V} = 0$

⇔ $\frac{D\overrightarrow{J}(M, t)}{Dt} + \overrightarrow{J} \cdot \text{div} \overrightarrow{V}(M, t) = 0$ ③

3) Conservation du débit massique et volumique:

• Écoulement stationnaire: $\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$.

① $\text{div } \vec{J} = 0 \Leftrightarrow \oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow$ Conservation de D_v .

• Écoulement incompressible: $\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$.

② $\rho \text{ div}(\vec{V}) = 0 \Leftrightarrow \oint \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow$ Conservation de D_v .

IV) Analogie Fluide-Electromagnétique:

1) Fluide $\leftrightarrow$ Fil électrostatique λ :

Fluide	Fil électrostatique
• Incompressible: $\text{div } \vec{V} = 0$	$\text{div } \vec{E} = 0$
• Irrrotationnel: $\text{rot } \vec{V} = 0$	$\text{rot } \vec{E} = 0$
$\vec{V}(r) = \frac{C}{r} \vec{u}_r$	$\vec{E}(r) = E(r) \vec{u}_r$
Expression de C:	Th de Gauss:
$D_v = \oint \vec{V} \cdot d\vec{S} = \oint \frac{C}{r} dS$ $= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{C}{r} \cdot r$ $\rightarrow C = \frac{D_v}{2\pi h}$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ $\Leftrightarrow 2\pi r h \cdot E(r) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$ $\rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$
$\vec{V}(r) = \frac{D_v}{2\pi h} \frac{\vec{u}_r}{r}$	$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{u}_r$

2) Fluide $\leftrightarrow$ Cylindre Magnétostatique:

Fluide	Cylindre Magnétostatique
• Incompressible: $\text{div } \vec{V} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
• Rotationnel: $\text{rot } \vec{V} = 2\vec{\omega}$	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
$\vec{V}(r) = V(r) \vec{u}_\varphi$	$\vec{B}(r) = B(r) \vec{u}_\varphi$
Expression de $V(r)$:	Th d'Ampère:
$\oint \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \oint \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{S} = 2 \oint \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$ $\Leftrightarrow 2\pi r \cdot V(r) = 2 I_{fe}$ $\rightarrow V(r) = \frac{2 I_{fe}}{2\pi r} \vec{u}_\varphi$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_e$ $\Leftrightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I_e$ $\rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_e}{2\pi r} \vec{u}_\varphi$
• $r > R$: $I_{fe} = \rho_0 \pi R^2$	• $r > R$: $I_e = J_0 \pi R^2$
• $r < R$: $I_{fe} = \rho_0 \pi r^2$	• $r < R$: $I_e = J_0 \pi r^2$
$\vec{V}(r) = \begin{cases} \rho_0 \frac{R^2}{r} \vec{u}_\varphi & r > R \\ \rho_0 r \vec{u}_\varphi & r < R \end{cases}$	$\vec{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 J_0}{2} \frac{R^2}{r} \vec{u}_\varphi & r > R \\ \frac{\mu_0 J_0}{2} r \vec{u}_\varphi & r < R \end{cases}$

3) Dipole Hydrostatique $\leftrightarrow$ Dipole électrostatique:

Dipole Hydrostatique	Dipole électrostatique
• Incompressible: $\text{div } \vec{V} = 0$	• $\text{div } \vec{E} = 0$
• Irrrotationnel: $\text{rot } \vec{V} = 0$	• $\text{rot } \vec{E} = 0$
$\exists$ fonction $\varphi(r)$ tq. $\vec{V}(r) = \text{grad}(\varphi(r))$	$\exists$ potentiel $V(r)$ tq. $\vec{E}(r) = -\text{grad}(V(r))$
$\Rightarrow \varphi(r)$ est le potentiel de l'écoulement	$\Rightarrow V(r)$ est le potentiel de l'écoulement
$\text{div}(\text{grad}(\varphi)) = 0$ $\Leftrightarrow \Delta(\varphi(r)) = 0$	$\text{div}(\text{grad}(V)) = 0$ $\Leftrightarrow \Delta(V(r)) = 0$
$\varphi(r) = \frac{C \cos \theta}{r^2}$	$V(r) = \frac{q a \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$

② Dynamique des fluides.

Dynamique: relation entre momentum et course.

I Actions dans un fluide:

$$d\vec{F} = \vec{f}_v d\ell = \vec{f}_m dm. \quad \text{avec } \begin{cases} f_v: \text{force volumique de } F \\ f_m: \text{force massique de } F. \end{cases}$$

① Force à distance:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{\text{pesa}} &= dm \vec{g} = (\vec{f}_m)_{\text{pesa}} dm \\ \text{or } \rho V = m &\rightarrow d\vec{F}_{\text{pesa}} = \rho dV \vec{g} \end{aligned} \quad \rightarrow \begin{cases} (\vec{f}_m)_{\text{pesa}} = \vec{g} \\ (\vec{f}_v)_{\text{pesa}} = \rho \cdot \vec{g} \end{cases}$$

② Force de contact:

$$d\vec{F}_c = d\vec{F}_{c,n} + d\vec{F}_{c,t}$$

a) Force de contact normal:

$$d\vec{F} = -p d\vec{S} \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{pression}} = \oint -p d\vec{S} = \iiint -\text{grad}(p) d\tau$$

$$\rightarrow (\vec{f}_v)_{\text{pression}} = -\text{grad}(p)$$

b) Force de contact tangentielle:

$$d\vec{F}_{\text{viscosité}} = \eta \cdot \frac{\partial v}{\partial y} dS \vec{u}_x$$

* D'après l'équation de la résultante des forces entre y et y+dy:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{\text{visc}} &= d\vec{F}_{\text{sup}} + d\vec{F}_{\text{inf}} \\ &= \left(\eta \cdot \frac{\partial v(y+dy)}{\partial y} dS - \eta \cdot \frac{\partial v(y)}{\partial y} dS \right) \vec{u}_x \\ &= \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} d\ell \vec{u}_x \end{aligned}$$

$$\text{à trois dimensions: } d\vec{F}_{\text{viscosité}} = \eta \Delta \vec{v} d\tau$$

$$\rightarrow (\vec{f}_v)_{\text{viscosité}} = \eta \Delta \vec{v}$$

* Origine microscopique de viscosité:

• la diffusion de particules supplée d'une couche supérieure vers une couche inférieure ralentit la couche supérieure et accélère l'inférieure.

⇒ l'origine: diffusion de quantité de mouvement.

* Coefficient de diffusion de matière (viscosité η):

• la variation de quantité de "particules en choc", on a:

$$dP = \frac{1}{6} m S l m \vec{v}(y+l, t) - \frac{1}{6} m S l m \vec{v}(y-l, t)$$

$$dP \stackrel{P.L.}{=} \frac{1}{6} m S l m \left[\left(\vec{v}(y, t) + l \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right) - \left(\vec{v}(y, t) - l \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right) \right] \vec{u}_x$$

$$dP = \frac{1}{3} m S l m l \frac{\partial v}{\partial y} \vec{u}_x; \quad \text{avec } l = U dt$$

$$dP = \frac{1}{3} m S l m \frac{\partial v}{\partial y} U dt \vec{u}_x$$

Par identification: $\eta = \frac{1}{3} m l m U$ (P.L.: prise en compte)

II Dynamique des fluides parfaits:

① Modèle:

* fluide en écoulement parfait $\Leftrightarrow$ force de viscosité négligeable:

- La viscosité est faible.
- On se place dehors de la couche limite.

② Equation d'Euler:

* RFD pour une particule de fluide passant par M à l'instant t:

$$dm \cdot \vec{a}(M, t) = (\vec{f}_v)_{\text{pesa}} d\ell + (\vec{f}_v)_{\text{pression}} d\ell$$

$$\frac{dm}{d\ell} \vec{a}(M, t) = (\vec{f}_v)_{\text{pesa}} + (\vec{f}_v)_{\text{pression}}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \text{grad}(p)$$

③ Loi fondamentale de l'hydrostatique:

* fluide au repos $\Leftrightarrow \vec{v}(M, t) = 0$

$$\Leftrightarrow \rho \vec{g} - \text{grad}(p) = 0$$

$$\rightarrow p_B - p_A = \rho g (z_A - z_B)$$

④ Théorème de Bernoulli:

1 ^{er} théorème	2 ^{ème} théorème	3 ^{ème} théorème
• parfait - incompressible stationnaire - irrotationnel:	• parfait - incompressible stationnaire	• parfait incompressible irrotationnel
$\rho \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho \vec{g} - \text{grad}(p)$ $\text{grad} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p \right) = 0$	$\rho \text{grad} \frac{v^2}{2} = \rho \vec{g} + \text{grad}(p)$ $= -\rho \text{rot} \vec{v} \wedge \vec{v}$ On a donc une ligne de courant: $\oint \left(\rho \text{grad} \frac{v^2}{2} - \rho \vec{g} + \text{grad}(p) \right) d\vec{\ell}$ $= \int_{\gamma} \rho \vec{v} \cdot \vec{\tau} d\ell = 0$	$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right)$ $= \rho \vec{g} - \text{grad}(p)$ irrotationnel $\rightarrow \exists \vec{C}(\gamma)$ $\vec{v} = \text{grad}(\psi)$ $\text{grad} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p \right) = 0$
$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p = cte$		$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p = cte$ $\rho \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p = 0$

⑤ Interprétation énergétique de l'équation de Bernoulli:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p = cte$$

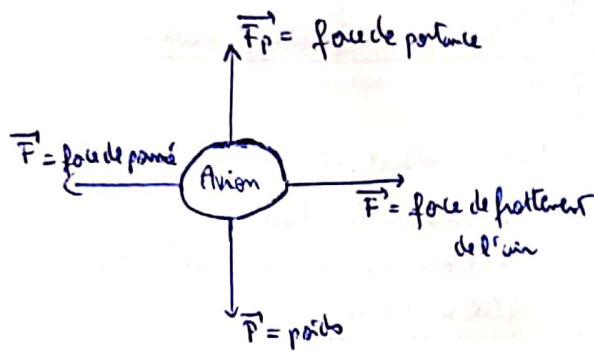
$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2} \frac{dm v^2}{d\ell}}_{\text{énergie cinétique volumique}} + \underbrace{\frac{dm g z}{d\ell}}_{\text{énergie potentielle de gravitation volumique}} - \underbrace{\frac{p d\ell}{d\ell}}_{\text{énergie potentielle de pression volumique}} = cte$$

⑥ Effet Magnus - validation:

* Si $\vec{\omega} > 0 \rightarrow \vec{F}_p > 0 \rightarrow \vec{F}_p$ dirigée vers le haut

* Si $\vec{\omega} < 0 \rightarrow \vec{F}_p < 0 \rightarrow \vec{F}_p$ dirigée vers le bas

$\vec{\omega}$ = vitesse de rotation de l'objet; $\vec{F}_p$ = force de portance.



- L'air ou les lignes de champ s'écoulent $\Rightarrow S \downarrow \Rightarrow V \uparrow$.
- L'air ou les lignes de champ s'éloignent $\Rightarrow S \uparrow \Rightarrow V \downarrow$.

III) Dynamique des fluides réels:

1) Modèle:

- Force de viscosité $\neq 0$.
- Vitesse varie $\perp$ à l'écoulement.

2) Equation Navier-Stokes:

* RFD appliqué à un particule fluide passant par M à l'instant t :

$$dm \vec{a}(M, t) = (\vec{F}_v)_{\text{pes}} d\ell + (\vec{F}_v)_{\text{vis}} d\ell + (\vec{F}_v)_{\text{viscosité}} d\ell$$

$$\frac{dm}{dt} \vec{a}(M, t) = (\vec{F}_v)_{\text{pes}} + (\vec{F}_v)_{\text{vis}} + (\vec{F}_v)_{\text{viscosité}}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \eta \Delta \vec{v} \quad (1)$$

* Approximations:

- Ecoulement plan $(x, y) \Rightarrow \vec{v}(x, y, z, t) = \vec{v}(x, y, t)$
- Ecoulement incompressible $\Rightarrow \text{div } \vec{v}(x, y, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0$.

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \eta \Delta \vec{v} \quad (2)$$

* Généralisation de la viscosité cylindrique:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} \quad (3)$$

* On projette sur $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial y^2} \quad (4)$$

3) Résolution de l'équation de Navier-Stokes:

a) Diffusion de quantités de mouvement: Ecoulement Couette:

- Pas de gradient de pression: $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow$ le v de fluide est entraîné par le déplacement des plaques en $x=0$ et $x=L$.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} = 0 \quad \text{avec } \frac{\eta}{\rho} = \text{diffusivité de qte de mouvement}$$

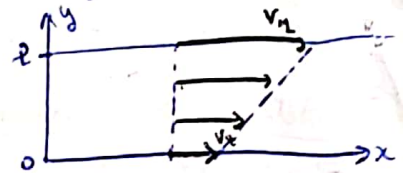
① En régime stationnaire:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow v(y) = ay + b$$

$$v(y=0) = b = v_2$$

$$v(y=L) = aL + v_2 = v_1$$

$$v(y) = \frac{v_1 - v_2}{L} y + v_2$$



b) Gradient de pression: Ecoulement Poiseuille:

① Gradient de pression: $\frac{dp}{dx} \neq 0 \Rightarrow$ plaques fixes.

$$\text{② En régime stationnaire: } -\frac{dp}{dx} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

③ Méthode de séparation des variables:

$$\frac{dp}{dx} = K = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Leftrightarrow p(x) = Kx + c_1$$

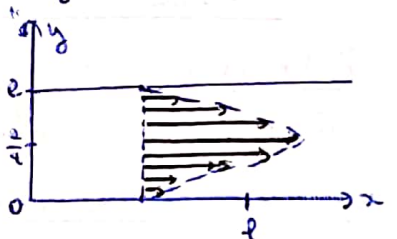
$$\text{or } p(0) = p_0 \text{ et } p(L) = p_0 - \Delta p \rightarrow K = \frac{-\Delta p}{L}$$

$$\eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{-\Delta p}{L} \rightarrow v(y) = \frac{-\Delta p}{\eta L} y^2 + c_2 y + c_3$$

$$\text{or } v(0) = v(L) = 0$$

$$v(y) = \frac{\Delta p}{2\eta L} (y^2 - yL)$$

$$v(y) = v_{\text{max}} \text{ à } y = \frac{L}{2}$$



IV) Ecoulement laminaire - turbulent:

1) Nombre de Reynolds:

$$Re = \rho \cdot \frac{\bar{v} d}{\eta} \begin{cases} Re \ll 2000: \text{écoulement laminaire: lignes de courants alignés non déviés} \\ Re \gg 4000: \text{écoulement turbulent: lignes de courants instables et déviés} \end{cases}$$

2) Interprétation physique du nombre de Reynolds:

$\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ terme diffusif et $\eta \Delta \vec{v}$ terme convectif

si $\|\eta \Delta \vec{v}\| \gg \|\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}\| \rightarrow$ laminaire.

si $\|\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}\| \gg \|\eta \Delta \vec{v}\| \rightarrow$ turbulent.

3) Ecoulement autour d'une plaque:

à l'abscisse suit deux fois:

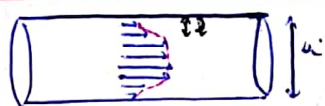
$$F_{\text{traie}} = \frac{1}{2} \rho v^2 S \cdot C_T \quad \text{Si sphère} \quad C_T = \begin{cases} \frac{24}{Re} \text{ si laminaire} \\ \frac{1}{2} \text{ si turbulent} \end{cases}$$

$$F_{\text{pne}} = \frac{1}{2} \rho v^2 S \cdot C_p \quad \text{Si plaque = sphère} \quad C_p = 0$$

• D'ici si l'écoulement laminaire:

$$\vec{F}_T = 6\pi R \vec{v} \eta = -R \vec{v} \quad \text{Formule de Stokes}$$

V) Observation d'écoulement réel:



Pour observer écoulement réel: $a \leq 2L$.

③ Bilans macroscopiques.

I Bilan de masse: (m)

$$\begin{aligned} m^*(t) &= m(t) + \delta m_e \\ m^*(t+dt) &= m(t+dt) + \delta m_s \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Sigma^* &= m^* \\ \Sigma_0 &= m \end{aligned}$$

① le système est fermé pendant dt: $\Rightarrow m^*(t) = m^*(t+dt)$

$$\Rightarrow \frac{dm(t)}{dt} = \frac{\delta m_e}{\delta t} - \frac{\delta m_s}{\delta t} \rightarrow \boxed{\frac{dm(t)}{dt} = D_{m_e} - D_{m_s}}$$

② L'écoulement stationnaire: $\Rightarrow m(t) = m(t+dt)$:

$$\Rightarrow \frac{dm(t)}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{\delta m_e = \delta m_s = \delta m}$$

③ Relation de conservation de masse:

$$① dm = \mathcal{Y}(x,t) d\mathcal{E} = \mathcal{Y}(x,t) \cdot S dx$$

$$② \begin{cases} D_{m_e} = \mathcal{Y}(x,t) V(x,t) \cdot S \\ D_{m_s} = \mathcal{Y}(x+dx,t) V(x+dx,t) \cdot S \end{cases}$$

$$\bullet \frac{dm(t)}{dt} = D_{m_e} - D_{m_s} \rightarrow \boxed{\frac{d\mathcal{Y}(t)}{dt} + \text{div}(\mathcal{Y}\vec{V}) = 0}$$

II Bilan de quantité de mouvement: ($\vec{p} = m\vec{V}$)

① Flux:

$$\begin{aligned} p^*(t) &= p_0(t) = m(t) \cdot V(t) \\ p^*(t+dt) &= p_0(t+dt) + \delta m_s (\vec{u} + \vec{V}(t)) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Sigma^* &= p^* \\ \Sigma_0 &= p_0 \end{aligned}$$

$$① \text{TRC: } \frac{dp^*(t)}{dt} = m \vec{g}$$

$$② \begin{cases} p^*(t) = m(t) V(t) \\ p^*(t+dt) = m(t+dt) V(t+dt) + \delta m_s (\vec{u} + \vec{V}(t)) \end{cases}$$

$$\bullet \frac{dp^*(t)}{dt} dt = \frac{d(m(t)V(t))}{dt} dt + \delta m_s \vec{u} + \delta m_s \vec{V}(t)$$

$$= -\delta m_s \vec{V}(t) + m(t) \frac{d\vec{V}(t)}{dt} + \delta m_s \vec{u} + \delta m_s \vec{V}$$

$$\rightarrow \boxed{m \frac{d\vec{V}}{dt} = m \vec{g} - D_{m_s} \vec{u}}$$

• Vitesse de l'écoulement:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \mathcal{U} = -D_{m_s} \rightarrow m(t) = -D_{m_s} t + m_0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{g} = \frac{D_{m_s} \vec{u}}{m_0 - D_{m_s} t} \rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{D_{m_s} u}{D_{m_s} t - m_0} - g$$

$$\Rightarrow dV = \frac{d(m_0 - D_{m_s} t)}{m_0 - D_{m_s} t} - g dt$$

$$\rightarrow \boxed{V(t) = -gt - u \ln\left(\frac{m_0 - D_{m_s} t}{m_0}\right)}$$

② Conde de consolidation: (Incompressible - parfait - stationnaire)

$$\begin{aligned} p^*(t) &= p_0(t) + \delta m_e V_e \\ p^*(t+dt) &= p_0(t+dt) + \delta m_s V_s \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Sigma^* &= p^* \\ \Sigma_0 &= p_0 \end{aligned}$$

$$① \frac{d\vec{p}^*}{dt} = \vec{F}_{c/m} + \vec{F}_{p_e} + \vec{F}_{p_s} \quad (\vec{F}_p \text{ vers l'intérieur})$$

$$= -\vec{F} - p_e S_e \vec{u}_y - p_s S_s \vec{u}_x$$

$$② \begin{cases} p^*(t) = p_0(t) + \delta m_e V_e \\ p^*(t+dt) = p_0(t+dt) + \delta m_s V_s \end{cases}$$

$$\bullet \frac{dp^*}{dt} dt = p_0(t+dt) + \delta m_s V_s - p_0(t) - \delta m_e V_e$$

* Ecoulement stationnaire $\rightarrow p_0(t+dt) = p_0(t) \rightarrow \delta m_e = \delta m_s$

$$\Rightarrow \frac{dp^*}{dt} = D_m (V_s - V_e)$$

$$\Rightarrow \vec{F} + p_e S_e \vec{u}_y + p_s S_s \vec{u}_x = D_m (V_e - V_s)$$

* Ecoulement incompressible: $V_e = V_s$

* Ecoulement parfait: $p_e = p_s$

$$\rightarrow \boxed{\vec{F} = -S(\mathcal{Y} V^* + p)(\vec{u}_e + \vec{u}_y)}$$

③ Ecoulement de Poiseuille: (Incompressible - stationnaire)

$$\begin{aligned} p^*(t) &= p_0(t) + \delta m_e V_e \\ p^*(t+dt) &= p_0(t+dt) + \delta m_s V_s \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Sigma^* &= p^* \\ \Sigma_0 &= p_0 \end{aligned}$$

$$① \frac{d\vec{p}^*}{dt} = \vec{F}_{p_e} + \vec{F}_{p_s} + \vec{F}_{vis} = ((p_e - p_s) S + \eta \frac{\partial V}{\partial z} 2\pi n L) \vec{u}_z$$

$$② \begin{cases} p^*(t) = p_0(t) + \delta m_e V_e \\ p^*(t+dt) = p_0(t+dt) + \delta m_s V_s \end{cases}$$

$$\bullet \frac{dp^*}{dt} dt = p_0(t+dt) + \delta m_s V_s - p_0(t) - \delta m_e V_e$$

* Ecoulement stationnaire: $\rightarrow p_0(t+dt) = p_0(t) \rightarrow \delta m_e = \delta m_s$

* Ecoulement incompressible: $V_e = V_s$

$$\Rightarrow \frac{dp^*}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{p_s - p_e}{2\eta L} n$$

$$\Rightarrow V(z) = \frac{p_s - p_e}{4\eta L} z^2 + c$$

$$\bullet \text{or } V(z=u) = 0 \rightarrow V(z) = \frac{1}{4\eta L} \frac{dp}{dz} (n^2 - u^2)$$

D'après Poiseuille: $\frac{dp}{dz} = K$

$$\rightarrow P(z) = Kz + c \quad \text{avec } P(0) = p_2$$

$$P(L) = p_1 = KL + p_2$$

$$\rightarrow \boxed{V(z) = \frac{p_2 - p_1}{4\eta L} (n^2 - u^2)}$$

III Bilan thermodynamique: ($Y=E, Y=S$)

1) Bilan de l'entropie extensive Y :

$$\begin{aligned} Y^*(t) &= Y_0(t) + \delta m_e y_e \\ Y^*(t+dt) &= Y_0(t+dt) + \delta m_s y_s \\ \Sigma^* &= Y^* \\ \Sigma_0 &= Y_0 \end{aligned}$$

$$dY^* = Y_0(t+dt) + \delta m_s y_s - Y_0(t) + \delta m_e y_e$$

Regime stationnaire: $\frac{dY^*(t)}{dt} = (y_s - y_e) D_m$

2) 1^{er} principe de la thermodynamique: ($Y=E$)

$$\begin{aligned} dE &= \delta W + \delta Q = (\delta W_u + \delta W_p) + \delta Q \\ \text{avec } \delta W_p &= \int_{v_e}^0 -p_e d\epsilon + \int_0^{v_s} -p_s d\epsilon = p_e v_e - p_s v_s \\ &= (p_e v_e - p_s v_s) \delta m = \left(\frac{p_e}{\rho_e} - \frac{p_s}{\rho_s} \right) \delta m \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dE = \delta Q + \delta W_u + (p_e v_e - p_s v_s) \delta m$$

Ainsi: $dE = (e_s - e_e) D_m dt$

$$dE = \left(\frac{1}{2}(\rho_s^2 - \rho_e^2) + \gamma(z_s - z_e) + u_s - u_e \right) \delta m$$

$$e = \frac{1}{2}c^2 + gz + u$$

Donc: $\frac{\delta Q}{\delta m} + \frac{\delta W_u}{\delta m} + p_e v_e - p_s v_s = \frac{1}{2}(\rho_s^2 - \rho_e^2) + \gamma(z_s - z_e) + (u_s - u_e)$

$$\rightarrow q + w_u = \frac{1}{2}(\rho_s^2 - \rho_e^2) + \gamma(z_s - z_e) + (u_s + p_s v_s) - (u_e + p_e v_e)$$

$$\rightarrow q + w_u = \Delta e_c + \Delta e_p + \Delta h$$

ou alors: $P_d + P_u = (\Delta e_c + \Delta e_p + \Delta h) \cdot D_m$

3) 2^{ème} principe de la thermodynamique ($Y=S$):

$$dS = \delta S_{cui} + \delta S_{cra} = \delta S_{cui} + \frac{\delta Q}{T_0}$$

$$(\rho_s - \rho_e) \delta m = \delta S_{cui} + \frac{\delta Q}{T_0}$$

$$\rho_s - \rho_e - \frac{q}{T_0} = \delta S_{cui} \geq 0 \rightarrow \rho_s - \rho_e \geq \frac{q}{T_0}$$

4) Dispositifs usuels:

• Compresseur: transformation adiabatique ($q=0$) lente ($e_c=0$)

sans changement de p ($p_r=0$)

• Turbine: sans échange de chaleur ($q=0$) ni e_p ($p_r=0$)

• Détendeur: ni chaleur ($q=0$) ni travail ($w_u=0$) lent ($e_c=0$)

et sans e_p ($p_r=0$) $\rightarrow \Delta h=0$ (isenthalpique)

• Tuyau: ni travail ni chaleur ($q=w_u=0$) ni e_p ($p_r=0$)

* Relation de Meyer:

$$\begin{cases} c_p - c_v = R \\ \frac{c_p}{c_v} = \gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \\ c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \end{cases}$$

$$dh = c_p dt \rightarrow \Delta h = c_p \cdot \Delta T$$

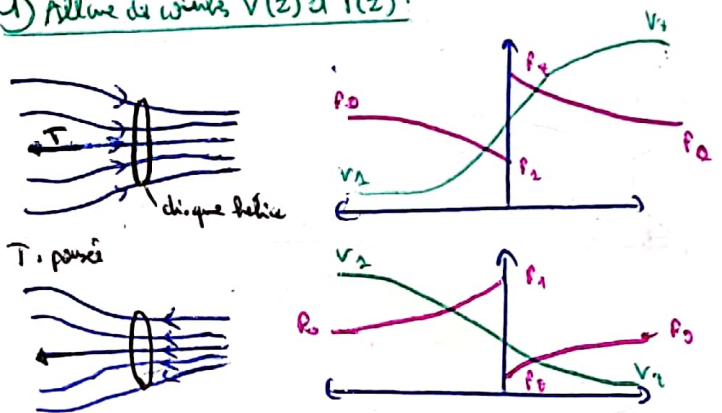
$$\rightarrow \Delta h = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \Delta T$$

* Fluide parfait:

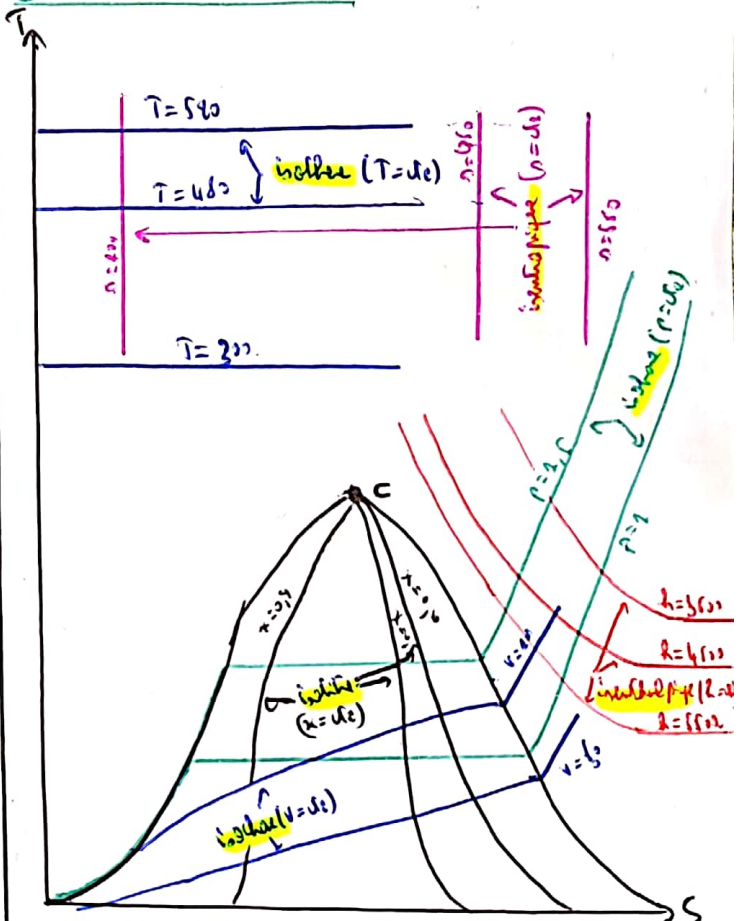
- pas de conductivité de chaleur: $q=0$
- pas de viscosité (frottement): $w_{ue}=0$
- l'énergie interne est constante: $u=de$

IV) Courbes et diagrammes:

1) Allure des courbes $V(z)$ et $P(z)$:



2) Diagramme enthalpique T, S :



• Tout ce qui est au dessus de la courbe = vapeur sèche.

(1) Electrodynamique et Magnetostatique - Dipole - Induction.

1) Electrodynamique et magnetostatique:

1) Formules de base:

Theorie de Gauss: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\rho(m)}{\epsilon_0}$

Circulation de $\vec{E}$: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Leftrightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$

Theorie d'Ampere: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_e \Leftrightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

Flux de $\vec{B}$: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow \text{div } \vec{B} = 0$

2) Conducteurs - Conductance et Resistance:

$q = CU = [V(\text{conducteur}) - V(\text{conducteur 2})]C$

$C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$

$R = \frac{1}{G} \rightarrow G = \frac{1}{R}$

$R = \rho \cdot \frac{L}{S}$

R = resistance
G = conductance
ρ = resistivite
σ = conductivite

3) Relations de passage:

$\vec{E}_{m2} - \vec{E}_{n2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{21}$

$\vec{B}_{t2} - \vec{B}_{t1} = \mu_0 \vec{J}_{21}$

$\vec{E}_{t2} = \vec{E}_{t1}$ et $\vec{B}_{n2} = \vec{B}_{n1}$

II) Dipole:

1) Analogie electrodynamique - magnetostatique:

	Electrodynamique	Magnetostatique
moment dipolaire	$\vec{p} = q \vec{r}_p$	$\vec{m} = I \cdot S \cdot \vec{u}$
expression du champ	$\vec{E}(m) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 n^3} (p \cos \theta \vec{u}_n + p \sin \theta \vec{u}_t)$	$\vec{B}(m) = \frac{2 \mu_0 m \cos \theta \vec{u}_n + \mu_0 m \sin \theta \vec{u}_t}{4\pi n^3}$
expression vectorielles	$\vec{E}(m) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{n}) \vec{n} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 n^3}$	$\vec{B}(m) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{n}) \vec{n} - \vec{m}}{4\pi\mu_0 n^3}$
Energie potentielle	$E_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext} = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$	$E_{pot} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{ext}$
Puissance	$P = \vec{T} \cdot \vec{\omega}$	$P = \vec{T} \cdot \vec{\omega}$
moment du couple	$\vec{T} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$	$\vec{T} = \vec{m} \wedge \vec{B}_{ext}$
ligne de courant	$\frac{dn}{dn} = \frac{n d\theta}{\epsilon_0} = \frac{dz}{\epsilon_2} \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ n = n_0 \sin \theta \end{cases}$	$\frac{dn}{dn} = \frac{n d\theta}{\mu_0} = \frac{dz}{\mu_2} \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ n = n_0 \sin \theta \end{cases}$

2) Action de champ magnetique:

1) Sur un circuit: "Laplace"

Regime permanent: $\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0$

$\rightarrow (-e) \vec{V} \wedge \vec{B} + (-e) \vec{E}_H = 0$

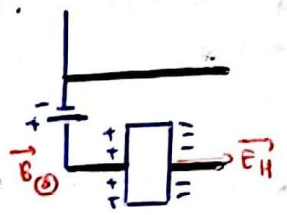
$\rightarrow \vec{E}_H = -\vec{V} \wedge \vec{B}$

Force appliquée sur la Cx de $d\vec{l}$:

$d\vec{F} = d\vec{F}_e + d\vec{F}_m$

$= (-e) d\vec{E}_H + (-e) \vec{V} \wedge \vec{B} + (-e) \vec{E}_H d\vec{l} = \vec{J} \wedge \vec{B} d\vec{l}$

$\Rightarrow d\vec{F}_L = \vec{J} d\vec{l} \wedge \vec{B}$ (vectorielle)
 $= \vec{J} dS \wedge \vec{B}$ (surface)
 $= I d\vec{l} \wedge \vec{B}$ (linéaire)

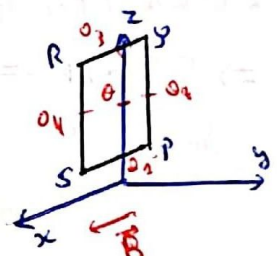


2) Sur une spire: "moment de couple"

$\vec{F}_L = \oint I d\vec{l} \wedge \vec{B}$

$\vec{F}_L = I [\vec{p}\vec{y} + \vec{q}\vec{r} + \vec{r}\vec{s} + \vec{s}\vec{p}] \wedge \vec{B}$

$\vec{T}_1 = \vec{O}_1 \wedge \vec{F}_{(p)}(\theta_1)$
 $\vec{T}_2 = \vec{O}_2 \wedge \vec{F}_{(q)}(\theta_2)$
 $\vec{T}_3 = \vec{O}_3 \wedge \vec{F}_{(r)}(\theta_3)$
 $\vec{T}_4 = \vec{O}_4 \wedge \vec{F}_{(s)}(\theta_4)$
 $\vec{T}_L = \sum \vec{T}_i$



3) Champ magnetique courant dans 2 solénoïdes:

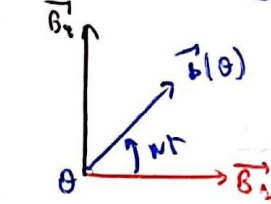
$\vec{B}(\theta) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

$\vec{B}_1 = \mu_0 n_1 I_1 \vec{u}_x$

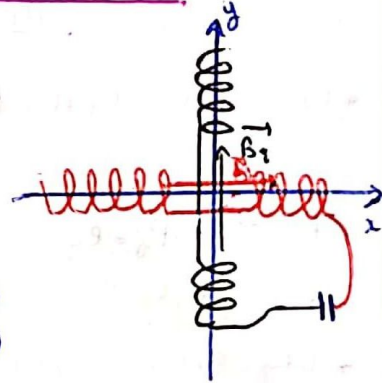
$\vec{B}_2 = \mu_0 n_2 I_2 \vec{u}_y$

On fixe $n_1 = n_2 = n$
 $I_1 = I_0 \cos(\omega t)$
 $I_2 = I_0 \sin(\omega t)$

$\vec{B}(\theta) = \mu_0 n I_0 (\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y)$



$\vec{B}(\theta)$ tourne avec vitesse $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$



$\Rightarrow$ La spire placée en O tourne à la même vitesse pour réaliser conditions d'équilibre stable
 $\Rightarrow$ principe de superposition

III Induction électromagnétique:

1) Types d'induction:

- * Circuit mobile se déplace dans champ uniforme $\rightarrow$ "Lorentz"
- * Circuit immobile dans un champ de vecteur du temps $\rightarrow$ "Neumann"

2) Loi de Faraday:

- * Variation de flux $\Phi \Rightarrow$ variation de courants induits dans le circuit $\Rightarrow$ Appétition de f.e.m. induite s'exprime par:

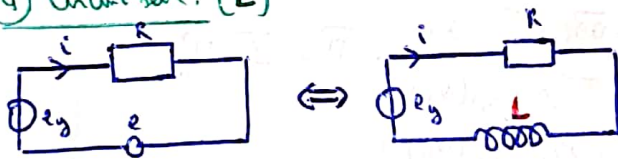
$$e_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ et } i = \frac{e_{ind}}{R}$$

3) Loi de Lenz:

- * La tige AB se déplace dans le sens de $\underline{V} > 0$ $\Rightarrow S \nearrow \Rightarrow \Phi \nearrow \Rightarrow i$ dans le sens où $\underline{B}_{toge}$ opposé à $\underline{B}$.
- * La tige AB se déplace dans le sens de $\underline{V} < 0$ $\Rightarrow S \searrow \Rightarrow \Phi \searrow \Rightarrow i$ dans le sens où $\underline{B}_{toge}$ et $\underline{B}$ de même sens.

Conclusion: L'induction, pour ses effets, s'oppose à la cause qui lui donne naissance.

4) Circuit seul: (L)



$$\Phi_p = Li \quad (L > 0)$$

$$\Phi_p = \Phi_{i \rightarrow i} = \Phi_{tot \rightarrow tot} = N \Phi_{tot \rightarrow tot}$$

$$\text{Loi des mailles: } e_g + e = Ri$$

$$\Rightarrow e_g = L \frac{di}{dt} + Ri$$

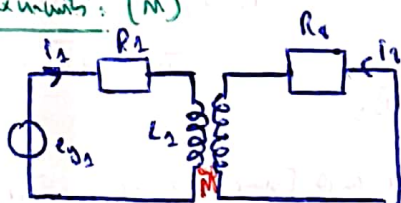
$$\text{Puissance fournie par le générateur: } P_g = e_g \cdot i$$

$$\Rightarrow P_g = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

$$\text{Energie fournie par le générateur: } W_g = \int_0^T P_g \cdot dt$$

$$\Rightarrow W_g = Ri^2 \epsilon + \frac{1}{2} Li^2$$

5) Deux circuits: (M)



$$\Phi_m = \Phi_{1 \rightarrow 2} \text{ ou } \Phi_{2 \rightarrow 1}$$

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M \cdot i_1 \text{ et } \Phi_{2 \rightarrow 1} = M \cdot i_2$$

$$\Phi_{tot \rightarrow tot} = N_2 \cdot \Phi_{tot \rightarrow tot}$$

$$\text{Loi des mailles: } \begin{cases} e_{g1} + e_1 = R_1 i_1 \\ e_{g2} + e_2 = R_2 i_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_{g1} = R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ e_{g2} = R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

$$\text{Puissance fournie par les générateurs: } P_g = e_{g1} \cdot i_1 + e_{g2} \cdot i_2$$

$$\Rightarrow P_g = (R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2) + \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right]$$

$$\text{Energie fournie par les générateurs: } W_g = \int_0^T P_g \cdot dt$$

$$\Rightarrow W_g = (L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2) \epsilon + \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)$$

5. Electromagnétisme.

1) Postulats de l'électromagnétisme:

1) Sources de (E, B):

$$\rho = \iiint \rho d\tau \quad \xrightarrow{\text{densité volume de charges}} \quad \rho = nq$$

$$\mathbf{I} = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad \xrightarrow{\text{vecteur densité de courant électrique}} \quad \mathbf{J} = nq\mathbf{V} = nq\mathbf{V}$$

2) Conservation de charges:

$$1) \quad q(t) = \int \rho(\mathbf{r}, t) \cdot d\tau$$

$$2) \quad \frac{dq(t)}{dt} = \phi(\mathbf{r}, t) - \phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \int \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} - \int \mathbf{J}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} = 0$$

Régime stationnaire: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{div } \mathbf{J} = 0 \rightarrow \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$
 $\rightarrow$ vecteur densité à flux conservatif.

3) Force de Lorentz:

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q\mathbf{V} \wedge \mathbf{B} \rightarrow \left(\frac{\mathbf{F}_L}{q} \right)_L = \mathbf{E} + \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}$$

4) Puissance Cédée (dissipée):

$$dW = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\tau d\tau \quad \left\{ \begin{array}{l} P_d = \iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\tau \\ dW = P dt \end{array} \right. \xrightarrow{\text{densité}} \left\{ \begin{array}{l} P_d = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \\ dW = P dt \end{array} \right.$$

5) Modèle de Drude:

• Dans un conducteur, l'électron est libre, il subit l'action de $\mathbf{F}_E$ et $\mathbf{F}_u$.

$$\text{Eq diff: } m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}_u + \mathbf{F}_E \rightarrow \frac{d\mathbf{J}}{dt} + \frac{\mathbf{J}}{\tau} = \frac{nq^2}{m} \mathbf{E}$$

$$\rightarrow \text{Résolution: } \mathbf{J}(t) = \mathbf{J}_0 e^{-t/\tau} + \frac{nq^2 \tau}{m} \mathbf{E}$$

$$\rightarrow \text{Régime permanent: } \mathbf{J}(t) = \frac{nq^2 \tau}{m} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad ; \quad \sigma = \frac{nq^2 \tau}{m}$$

$$\rightarrow \text{Puissance cédée: } \mathbf{P} = R I^2 \quad ; \quad R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}$$

6) Effet Hall:

• Avec le $\mathbf{B}$, les charges (+) s'accumulent sur la face inférieure, les charges (-) s'accumulent sur la face supérieure $\Rightarrow E^y \Rightarrow$ densité de charges $\downarrow$

$$\rightarrow \text{Régime permanent: } \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_m = \mathbf{0} \rightarrow -e\mathbf{E}_H - e\mathbf{V} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}_H = -\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}$$

• Force Laplace:

$$\mathbf{F}_L = I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$$

$$\rightarrow \text{Coefficient Hall: } u_H = \frac{R_H \cdot I \cdot B}{I} \quad \begin{cases} R_H > 0: \text{matériau } P \\ R_H < 0: \text{matériau } N \end{cases}$$

II. Equations Maxwell:

$$(M-G): \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$(M-F): \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$(M-\phi): \text{div } \mathbf{B} = 0 \rightarrow \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$(M-A): \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \rightarrow \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I_c + I_d)$$

* Remarques:

$$1) \quad (M-F) \text{ et } (M-\phi) \text{ sont les équations structurelles de } (\mathbf{E}, \mathbf{B})$$

$$2) \quad \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} = 0 \rightarrow \epsilon_0 \text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) + \text{div } \mathbf{J} = 0$$

$$\rightarrow \text{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) = 0 \rightarrow (\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) \text{ à flux conservatif.}$$

* Equation de conservation de charges:

$$\text{div (M-A): } \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) = \mu_0 \left(\text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} = 0$$

III. Aspect énergétique:

1) Définitions:

$$\bullet \text{Energie: } U = \iiint \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) d\tau \xrightarrow{\text{densité}} u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\bullet \text{Vecteur densité de courant d'énergie "Poynting": } \mathbf{R} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}$$

$$\bullet \text{Puissance échangée: } P_{ech} = \oint \mathbf{R} \cdot d\mathbf{S} \xrightarrow{\text{densité}} P_{ech} = \text{div } \mathbf{R}$$

2) Bilan d'énergie sur un volume:

$$\frac{dU(t)}{dt} = -P_d - P_{ech} \Rightarrow \iiint \left(\frac{dU(t)}{dt} + P_d + P_{ech} \right) d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} + P_{ech} + P_d = 0 \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} + \text{div } \mathbf{R} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0$$

IV. ARQS et expressions de Maxwell en ARQS:

$$\left| \frac{\mathbf{J}}{I} \right| \gg \frac{\mu_0}{c} \Rightarrow \text{on néglige le retard} \Rightarrow \text{des potentiels} \Rightarrow \text{ARQS.}$$

T : période de rotation de l'anneau; μ_0 : perméabilité du vide.

1) Neutralité électrique ($\delta = \delta_0$)

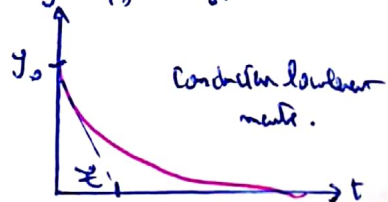
$$\bullet \text{Conservation de charge: } \text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\delta_0 \mathbf{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ + \text{Loi d'Ohm: } \mathbf{J} = \delta_0 \mathbf{E} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \delta_0 \text{div } \mathbf{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\delta_0}{\epsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \rho = \rho_0 e^{-t/\tau}$$

$$\epsilon \approx 0 \rightarrow \rho \approx 0$$

$$(M-G) \quad \text{div } \mathbf{E} = 0$$



2) Constant de déplacement négligeable :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\|\vec{J}_D\|}{\|\vec{J}\|} &= \frac{\mu_0 \epsilon_0 \frac{E}{T}}{\frac{0}{L}} \approx \frac{L}{cT^4} \frac{E}{0} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \frac{E}{B} \approx \frac{L}{T} \end{aligned} \right\} \frac{\|\vec{J}_D\|}{\|\vec{J}\|} = \left(\frac{L}{cT}\right)^4$$

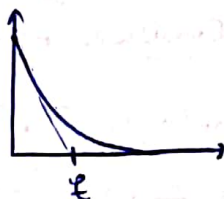
Approx: $T \gg \frac{L}{c} \rightarrow J_D \ll J$

(AA) $\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$

3) Conséquence: Effet de peau:

• $J(M,t) = J_0 e^{-r/\delta}$

$\Rightarrow$ neutralité électrique



• $\|J_D\| \ll \|J_c\|$

$\Rightarrow$ constant de déplacement négligeable devant constant de conduction

• $\nabla \times (M-F) = \nabla \times \nabla \times (\vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (\vec{B})$

$\Leftrightarrow \underline{\Delta \vec{E}} = \mu_0 \delta \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\Leftrightarrow \underline{\Delta E_0} = \frac{2i}{\delta^4} E_0 \quad (1)$

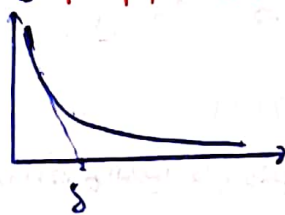
$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}}$: épaisseur de peau

(1) $\Rightarrow \underline{\vec{E}_0} = E_0 \underbrace{e^{-\frac{r}{\delta}}}_{\text{atténuation}} \underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{r}{\delta}\right)}_{E \text{ phase propagee } \propto \vec{B}} \underline{\vec{u}_z}$

• Le champ dans la conduction

normal que sur la peau.

$\Rightarrow$ Effet de peau.



• $P_{ed} = P_d \Rightarrow$ puissance électromagnétique incidente et
totale dissipée à l'intérieur.

⑥ Ondes et phénomènes de propagation.

I) Equation d'Alambert:

• $\Psi(M, t)$ onde $\leftrightarrow \Delta \Psi(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(M, t)}{\partial t^2} = 0$.

• Front d'onde = Surface d'onde = $\{M \in \text{espace} / \Psi = \text{cte} \wedge t = \text{fixe}\}$

1) Onde plane (unidimensionnelle):

* Les surfaces d'ondes sont des plans $\perp$ à la direction de propagation.

* Donc si on a des plans $\perp$ à $\vec{u}_x \Rightarrow \Psi(M, t) = \Psi(x, t)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = 0}$

2) Solution de l'équation d'Alambert:

* $\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} - \frac{1}{c^4} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial t^4} = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(x, t) = 0$

$\rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi(x, t) = 0$

on pose $u = t - \frac{x}{c}$
 $w = t + \frac{x}{c}$ $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{c^2}{4} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial w} \right) = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial w} = g(w) \Rightarrow \Psi(x, t) = \int g(w) du + f(u) \end{array} \right.$

$\rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial w} = g(w) \Rightarrow \Psi(x, t) = \int g(w) du + f(u)$

$\rightarrow \boxed{\Psi(x, t) = \underbrace{f\left(t - \frac{x}{c}\right)}_{\text{OPP, x}} + \underbrace{g\left(t + \frac{x}{c}\right)}_{\text{OPP, x}}}$

II) Ondes:

1) Onde Plane Progressive Harmonique: OPPH

* Harmonique: une seule pulsation ω .

* Expression: $\boxed{\Psi(x, t) = \Psi_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) = \Psi_0 \cos(\omega t - kx)}$

$\vec{k}$: vecteur d'onde; $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}_x = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_x$

* Relation de dispersion: $\left\{ \begin{array}{l} K = \frac{\omega}{c} ; \text{ pour une OPPH, } x \neq 0 \\ K = -\frac{\omega}{c} ; \text{ pour une OPPH, } x < 0 \end{array} \right.$

* Vitesse phase: vitesse d'ensemble d'onde, de l'onde. $V_e = \frac{\omega}{k}$

* Vitesse groupe: vitesse de transfert d'énergie: $V_g = \frac{d\omega}{dk}$

de Nature du milieu et de la propagation:

- $K = f(\omega)$ non linéaire $\leftrightarrow V_e = \text{cte}$ et $V_g = 0 \leftrightarrow$ dispersive

- $K = f(\omega)$ linéaire $\leftrightarrow V_e = V_g \leftrightarrow$ non dispersive.

* Notation complexe:

• $\Psi_0 \cos(\omega t - Kx) \Leftrightarrow \Psi_0 e^{i(\omega t - Kx)}$

* $\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} = -K^4 \Psi$ et $\frac{\partial^4 \Psi}{\partial t^4} = -\omega^4 \Psi$

• Notation complexe utilisée qu'une seule fois $\left(t, \frac{d}{dt} \right), \dots$

2) Onde Stationnaire:

* Stationnaire: Déformation sans propagation d'onde.

* Expression:

$\Psi(x, t) = \Psi_+(x, t) + \Psi_-(x, t) = \Psi_0 e^{i\omega t} [e^{-iKx} + e^{iKx}]$

$\rightarrow \boxed{\Psi(x, t) = 2\P_0 \cos(\omega t) \cos(Kx)} = f(t)g(x)$

* Solution:

$\Psi(x, t) = f(t)g(x) \rightarrow f(t) \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} g(x) \frac{d^4 f(t)}{dt^4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{f(t)} \frac{d^4 f(t)}{dt^4} = \beta = \frac{c^4}{g(x)} \frac{d^4 g(x)}{dx^4}$

1^{er} cas: $\beta > 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha^4$

• $g(x) = A e^{\frac{\alpha x}{c}} + B e^{-\frac{\alpha x}{c}}$

$g(x=0) = 0 \rightarrow g(x) = 2A \sinh\left(\frac{\alpha x}{c}\right)$

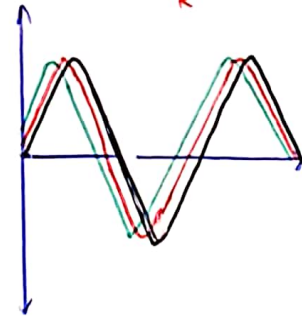
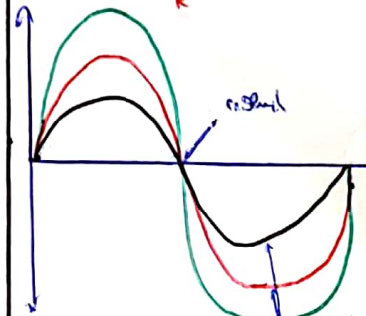
$g(x=L) = 0 \rightarrow A = 0 \rightarrow g(x) = 0 \rightarrow$ pas d'onde.

2^{ème} cas: $\beta < 0 \Leftrightarrow \beta = -\omega^2$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 g(x)}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} g(x) \rightarrow g(x) = g_0 \cos\left(\frac{\omega x}{c} + \varphi\right) \\ \frac{d^4 f(t)}{dt^4} = -\omega^4 f(t) \rightarrow f(t) = f_0 \cos(\omega t + \varphi) \end{array} \right.$

$\Rightarrow \boxed{\Psi(x, t) = \Psi_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos\left(kx + \varphi\right)}$ $\Psi_0 = f_0 g_0$

3) Différence entre OPPH et Onde Stationnaire:

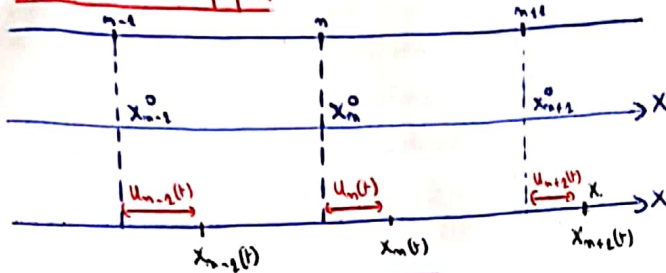
OPPH	Onde Stationnaire
$\Psi(x, t) = \Psi_0 \sin(\omega t - Kx)$	$\Psi(x, t) = \Psi_0 \sin(\omega t) \sin(Kx)$
$\rightarrow$ espère extemp <u>complexe</u>	$\rightarrow$ espère extemp <u>décomplexé</u>
• $\Psi(x, t) = 0$	• $\Psi(x, t) = 0, \forall t$
$\rightarrow \sin(\omega t - Kx_m) = 0$	$\rightarrow \sin(Kx_m) = 0$
$\rightarrow x_m = \frac{n\pi + \omega t}{K}$	$\rightarrow x_m = \frac{n\pi}{K}$
	

• Si on le cherche il y a au moins deux nœuds.

$\Rightarrow$ l'énergie ne se propage pas $\Rightarrow$ Onde Stationnaire.

⑦ Onde Acoustique dans les solides.

I) Modèle microscopique:



$$u_n(t) = x_n(t) - x_n^0 \quad (1)$$

1) Bilan des forces:

Autour de l'équilibre, la force d'interaction entre 2 atomes est:

$$\vec{F} = -\text{grad}(E_p) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} d(n - n_0) \right) \vec{u}_n = -d(n - n_0) \vec{u}_n$$

⇒ C'est équivalent à un ressort de raideur d , donc:

$$\vec{F}_{n-1/n} = -d(l - l_0) \vec{u}_n = -d(x_n(t) - x_{n-1}(t) - x_n^0 + x_{n-1}^0)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{n-1/n} = -d(u_n(t) - u_{n-1}(t)) \vec{u}_x$$

$$\text{symétrie} \Rightarrow \vec{F}_{n+1/n} = -d(u_n(t) - u_{n+1}(t)) \vec{u}_x$$

2) Equation de propagation:

RFD appliqué à l'atome n de masse m :

$$m \cdot \frac{d^2 x_n(t)}{dt^2} = \vec{F}_{n-1/n} + \vec{F}_{n+1/n}$$

$$\Rightarrow m \cdot \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} = -d [2u_n(t) - u_{n+1}(t) - u_{n-1}(t)] \quad (2)$$

3) Remarques:

- Si $u_n(t) = u_m = \text{cte}$ → la chaîne subit un déplacement global
- Si les atomes oscillent en opposition de phase → onde élastique.

4) Solution de l'onde en mode propre:

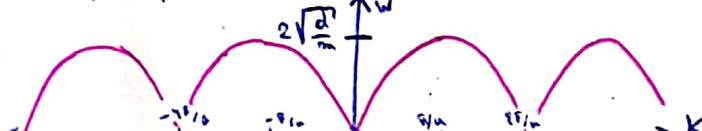
Mode propre: les atomes oscillent avec la même pulsation.

$$\left. \begin{aligned} u_n(t) &= u_0 e^{i(\omega t - k x_n(t))} \\ x_n &= m \cdot a \end{aligned} \right\} u_n(t) = u_0 e^{i(\omega t - k m a)} = u_0 e^{i\omega(t - \frac{m a}{v})} \text{ OPM } x_p$$

$$\Rightarrow \omega(k) = 2 \sqrt{\frac{d}{m}} \left| \sin\left(\frac{k a}{2}\right) \right| \quad (3)$$

• $\omega(k) = \omega(-k)$ → les 2 sens de propagation sont équivalents.

• ω période de période $k_T = \frac{2\pi}{a}$.



• $\omega(k) < 2\sqrt{\frac{d}{m}} = 2\omega_0$ → filtre passe bas avec $\omega_c = 2\omega_0$

• $|u_n(t)|$ d'amplitude u_0 indépendante de n → on ne s'écarter pas

• $u_n(t) = u_{n-2}(t - \tau)$ → mcs de phase avec retard τ

5) Vitesse de phase et de groupe - relation de dispersion:

methode 1: $V_p = \frac{\text{distance}}{\text{durée}} = \frac{a}{\tau} = 2\omega_0 \cdot \frac{\sin(\frac{k a}{2})}{k}$

methode 2: $V_p = \frac{\omega(k)}{k}$

$$\begin{aligned} V_p &= 2\omega_0 \frac{\sin(\frac{k a}{2})}{k} \\ V_g &= \omega_0 a \cdot \cos\left(\frac{k a}{2}\right) \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} V_p &\xrightarrow{k \rightarrow 0} \omega_0 a \\ V_p &\xrightarrow{k \rightarrow \frac{\pi}{a}} \frac{2\omega_0 a}{\pi} \\ V_g &\xrightarrow{k \rightarrow 0} \omega_0 a \\ V_g &\xrightarrow{k \rightarrow \frac{\pi}{a}} 0 \end{aligned} \right.$$

$k \rightarrow 0$; $V_p = V_g = \omega_0 a$ → milieu non dispersif.

$k \rightarrow \frac{\pi}{a}$; $V_g = 0$ → milieu dispersif.

6) Approximation continue:

$k \rightarrow 0$; $(\lambda \gg a) \Leftrightarrow (c \gg \omega)$.

• $u_n(t) = u(x, t)$

$$+ u_{n-1}(t) = u(x - a, t) \approx u(x, t) - a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$+ u_{n+1}(t) = u(x + a, t) \approx u(x, t) + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{m}{d a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4) \quad c = a \sqrt{\frac{d}{m}} = a \omega_0 = V_p$$

II) Modèle macroscopique:

1) Loi de Hooke:

$$\vec{F}_H = \frac{\Delta l}{l} \cdot E S \quad E \text{ module de Young } (N m^{-2}) = (Pa)$$

2) Bilan des forces:

$$\begin{aligned} dx &= (x + dx) - x \\ dx' &= [x + dx + u(x + dx, t)] - [x + u(x, t)] \\ &= dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \end{aligned}$$

• L'allongement Δl : $\Delta l = dx' - dx$

$$\Rightarrow \Delta l = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

• Loi de Hooke: $\vec{F}_H = \frac{\Delta l}{l} \cdot E S = \frac{dx' - dx}{dx} E S \vec{u}_x$

$$\Rightarrow \vec{F}_H = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot E S \cdot \vec{u}_x$$

$$\rightarrow \vec{F}_0(x + dx, t) = E S \cdot \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} \vec{u}_x$$

$$\vec{F}_0(x, t) = -E S \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \vec{u}_x$$

$$3) \text{ Equation de propagation: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

⑧ Corde Vibrante.

I) Approximations et Hypothèses:

- * masse linéique: $\longrightarrow dm = \mu dl$
- * faible amplitude: $dy \ll dx \longrightarrow \tan \alpha \approx \lambda = \frac{dy}{dx} \ll 1$.
- * mouvement plan: $\longrightarrow M = M(x, y)$
- * homogène + inextensible: $\longrightarrow \frac{dx}{dt} = 0$ (tensionnelle).

II) Equation de propagation:

• RFD appliqué à l'élément de corde:

$$\mu dm \cdot \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = \vec{T}(x, t) + \vec{T}(x+dx, t)$$

$$\mu dl = \mu \sqrt{dx^2 + dy^2} = \mu dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \approx \mu dx$$

$$\longrightarrow \mu dx \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = T(x, t) + T(x+dx, t)$$

• Projection sur $\vec{u}_x$:

$$-T(x, t) \cos \alpha(x, t) + T(x+dx, t) \cos \alpha(x+dx, t) = 0$$

$$\bullet \alpha \text{ faible} \longrightarrow \cos \alpha \approx 1 \longrightarrow \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0 \longrightarrow T(x, t) = T_0$$

• Projection sur $\vec{u}_y$:

$$\mu dx \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -T_0 \sin \alpha(x, t) + T_0 \sin \alpha(x+dx, t)$$

$$\bullet \alpha \text{ faible} \longrightarrow \sin \alpha \approx \alpha \iff \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\bullet \alpha = \frac{dy}{dx} \longrightarrow \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

III) Corde fixée aux deux extrémités:

1) Définitions

- * ventre: les points sur la corde vibrent à la même amplitude maximale.
- * noeud: les points sur la corde vibrent à amplitude = 0 ; $\forall$ temps t .
- * mode propre: L'oscillation sinusoidale satisfait aux conditions aux limites.

2) Expression d'un mode:

$$\bullet y(x, t) = y_1(t - \frac{x}{c}) + y_2(t + \frac{x}{c})$$

$$y_1(t - \frac{x}{c}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega(t - \frac{x}{c})) + b_n \sin(n\omega(t - \frac{x}{c}))$$

$$y_2(t + \frac{x}{c}) = -a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega(t + \frac{x}{c})) + b_n \sin(n\omega(t + \frac{x}{c}))$$

$$\longrightarrow y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cos(n\omega(t - \frac{x}{c})) - \cos(n\omega(t + \frac{x}{c}))) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\sin(n\omega(t - \frac{x}{c})) - \sin(n\omega(t + \frac{x}{c})))$$

En utilisant:
$$\begin{cases} \cos(a) - \cos(b) = 2 \cos(\frac{a-b}{2}) \cos(\frac{a+b}{2}) \\ \sin(a) - \sin(b) = 2 \sin(\frac{a-b}{2}) \cos(\frac{a+b}{2}) \end{cases}$$

$$\bullet \text{Korté: } y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cos(\frac{n\omega x}{c} - \varphi) \cos(n\omega t)$$

$$\longrightarrow y_n(x, t) = y_n \cos(\frac{n\omega x}{c} - \varphi) \cos(n\omega t) \quad (2)$$

$$y_n(x, t) = y_n \sin(\frac{n\omega x}{c}) \sin(n\omega t - \varphi) \quad (2')$$

3) Pulsations propres:

$$\bullet y(x, t) = y_0 \sin(\frac{\omega x}{c}) \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\bullet y(x=L, t) = 0, \forall t \longrightarrow \sin(\frac{\omega L}{c}) = 0 \longrightarrow \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

4) Détermination des noeuds et ventres:

$$\bullet \text{noeuds: } y(x, t) = 0, \forall t \longrightarrow \sin(\frac{\omega_n x_p}{c}) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{n\pi}{L} x_p = p\pi \longrightarrow x_p = \frac{pL}{n}$$

$$\bullet \text{ventres: } y(x, t) = \pm y_0, \forall t \longrightarrow \sin(\frac{\omega_n x_v}{c}) = 1$$

$$\longrightarrow \frac{n\pi}{L} x_v = \frac{2q+1}{2}\pi \longrightarrow x_v = \frac{(2q+1)L}{2n}$$

$$\bullet \text{distance entre noeuds: } d = x_{p+1} - x_p \longrightarrow d = \frac{\lambda_n}{2}$$

IV) Corde Melde: (Oscillations forcées)

1) Conditions aux limites:

$$\bullet \text{Continuité de la corde en } x=0: y(x=0^-, t) = y(x=0^+, t)$$

$$\Rightarrow y(x=0, t) = a \cos(\omega t)$$

$$\bullet \text{Corde fixée en } x=L:$$

$$\Rightarrow y(x=L, t) = 0$$

2) Réponse aux conditions aux limites:

$$\bullet \text{Valeur d'amplitude a faible: } a \ll y_0$$

$\Rightarrow$ Les conditions aux limites donnent la forme stationnaire de vibration.

$$\Rightarrow y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \quad (3)$$

$$\bullet y(x=0^-, t) = y(x=0^+, t) \iff a \cos(\omega t) = y_0 \cos(\psi) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} a = y_0 \cos(\psi) \\ \varphi = 0 \end{cases} \longrightarrow y(x, t) = \frac{a}{\cos(\psi)} \cos(\omega t) \cos(kx + \psi)$$

$$\bullet y(x=L, t) = 0, \forall t: \iff kL + \psi = \pm \frac{\pi}{2} \longrightarrow \psi = \frac{\pi p + 1}{2} - kL$$

$$\Rightarrow y(x, t) = \frac{a}{\sin(kL)} \cos(\omega t) \sin(kL - kx) \quad (4)$$

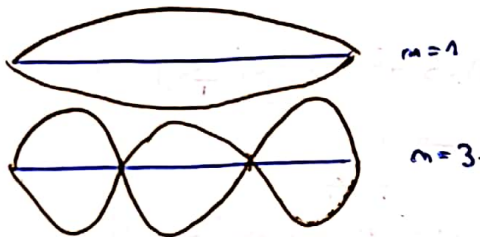
3) Résonance:

• Onde en résonance: $\Rightarrow (4) \Rightarrow \frac{u}{\sin(KL)}$ est maximale.

$$\rightarrow \sin(KL) = 0 \rightarrow \Omega_m = \frac{n\pi c}{L} \rightarrow \boxed{\Omega_m = n\omega}$$

• Phénomène de résonance est limité par amortissement de vibration par le frottement avec l'air $dF_a = -h \frac{\partial y}{\partial t} dx$.

• Fréquences de résonance:



V Aspect énergétique:

1) Energie cinétique linéique:

$$dE_c = \frac{1}{2} dm \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \rightarrow e_c = \frac{dE_c}{dl} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

2) Energie potentielle linéique:

$$dE_p = \mu g \int_0^L (dl - ds) = T_0 \int_0^L \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} - 1 \right) dx$$

$$= T_0 \int_0^L \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - 1 \right) dx = \int_0^L \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$\rightarrow e_p = \frac{dE_p}{dl} = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

3) Conservation d'énergie:

$$\text{div } \vec{R}(M, t) + \frac{\partial e_m}{\partial t}(M, t) = 0 \quad (5)$$

4) Vecteur Poynting:

$$(5) \Rightarrow \vec{R}(M, t) = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

VI Réflexion et transmission au une discontinuité:

* Conservation d'énergie de l'onde $\Rightarrow$ l'onde incidente donne à la discontinuité une onde réfléchi et transmise.

$$\left. \begin{aligned} y_i &= A_i e^{i\omega(t - \frac{x}{c_1})} \\ y_r &= A_r e^{i\omega(t + \frac{x}{c_1})} \\ y_t &= A_t e^{i\omega(t - \frac{x}{c_2})} \end{aligned} \right\} t \rightarrow t_0, \text{ admettant la même pulsation.}$$

1) Continuité de déplacement en $x=0$:

$$y(x=0^-, t) = y(x=0^+, t)$$

$$y_i(x=0, t) + y_r(x=0, t) = y_t(x=0, t)$$

$$\rightarrow \boxed{A_i + A_r = A_t} \quad (*)$$

2) Raccordement en $x=0$, de moment nul:

$$\text{RFD: } 0 = \vec{T}(x=0^-, t) + \vec{T}(x=0^+, t)$$

• Projection sur $\vec{u}_x$:

$$T(x=0^-, t) \cos \alpha(x=0^-, t) + T(x=0^+, t) \cos \alpha(x=0^+, t) = 0$$

$$\cos \alpha \sim 1$$

$$\rightarrow T(x=0^-, t) = T(x=0^+, t) = T_0$$

• Projection sur $\vec{u}_y$:

$$T_0 \sin \alpha(x=0^-, t) + T_0 \sin \alpha(x=0^+, t) = 0$$

$$\sin \alpha \sim \alpha$$

$$\rightarrow T_0 \left(\alpha(x=0^-, t) + \alpha(x=0^+, t) \right) = 0$$

$$\rightarrow \alpha_i(x=0, t) + \alpha_r(x=0, t) = \alpha_t(x=0, t)$$

$$\rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y_r}{\partial x} = \frac{\partial y_t}{\partial x} \rightarrow \boxed{A_i - A_r = \frac{c_1}{c_2} A_t} \quad (**)$$

3) Coefficients de réflexion et de transmission:

$$r = \frac{y_r(t + \frac{x}{c_1})}{y_i(t - \frac{x}{c_1})} = \frac{A_r}{A_i} \quad | \quad t = \frac{y_t(t - \frac{x}{c_2})}{y_i(t - \frac{x}{c_1})} = \frac{A_t}{A_i}$$

4) Expressions de r et t :

$$(*) \rightarrow 1 + r = t$$

$$(**) \rightarrow 1 - r = \frac{c_1}{c_2} t$$

$$\left. \begin{aligned} 1 + r &= t \\ 1 - r &= \frac{c_1}{c_2} t \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} r &= \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} \\ t &= \frac{2c_2}{c_2 + c_1} \end{aligned} \quad (6)$$

$$c = \frac{\sqrt{T_0}}{\mu}$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{2\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} \\ t &= \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} \end{aligned} \quad (6')$$

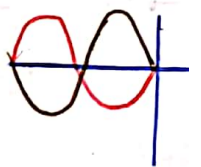
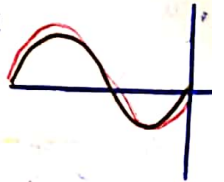
$$* \text{ Si } \mu_1 = \mu_2 \rightarrow \underline{r=0} \text{ et } \underline{t=1}$$

$$* \text{ Si } \mu_2 = 0 \rightarrow \underline{r=1} \text{ et } \underline{t=0}$$

(y_i et y_r sont en phase)

$$* \text{ Si } \mu_2 = +\infty \rightarrow \underline{r=-1} \text{ et } \underline{t=0}$$

(y_i et y_r en opposition de phase)



③ Onde Acoustique dans les fluides

- La vibration se fait dans le sens de propagation d'onde
→ onde longitudinale.
- La propagation de l'onde mécanique des particules fluide.
→ pas de propagation dans le vide.

I) Equation de propagation:

1) Problème acoustique et approximations:

à $t=0$:

$$\begin{cases} y = y_0 \\ v = v_0 \\ p = p_0 \end{cases} \xrightarrow[\text{acoustique}]{\text{perturbation}} \begin{cases} y = y_0 + y_a \\ v = v_a \\ p = p_0 + p_a \end{cases}$$

Approximations:

- On néglige le poids: $y_g = 0$.
- On néglige le frottement: $(f_v)_{\text{vis}} = 0$.
- Axéonacoustique: les ondes acoustiques ont infiniment petites ondes.
→ On néglige les ondes d'ordre 2.
Perturbation unidimensionnelle (u_x).
- Linearisation des équations d'équilibre.

* Conservation de masse:

$$\text{div}(y \vec{v}) + \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \xrightarrow{\text{Apx}} y_0 \frac{\partial v_a}{\partial x} + \frac{\partial y_a}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

* Equation Navier-Stokes:

$$y \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = y_0 \vec{g} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} \xrightarrow{\text{Apx}} y_0 \frac{\partial v_a}{\partial t} = - \frac{\partial p_a}{\partial x} \quad (2)$$

* Equation caractéristique de milieu de propagation:

$$\text{Isentropique: } \mathcal{L}_s = - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{y} \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right)_s = \text{cte}$$

$$\text{Isobariques: } \mathcal{L}_T = - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{y} \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right)_T = \text{cte}$$

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial p} = - \frac{\partial v}{v} \cdot \frac{1}{\partial p} = - \frac{s}{\Delta p} \xrightarrow{\text{Apx}} \mathcal{L} = - \frac{s}{p_a} \quad (3)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{\Delta y}{y} \cdot \frac{1}{\Delta p} \xrightarrow{\text{Apx}} \mathcal{L} = \frac{y_a}{p_a \cdot y_0} \quad (3')$$

3) Equation de propagation:

$$\left. \begin{matrix} (1) \\ (3) \text{ et } (3') \end{matrix} \right\} \frac{\partial v_a}{\partial x} = - \mathcal{L}_s \frac{\partial p_a}{\partial t} \quad (4)$$

$$\left. \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{matrix} \right\} \frac{\partial^2 v_a}{\partial x^2} - y_0 \mathcal{L}_s \frac{\partial^2 v_a}{\partial t^2} = 0$$

$$\left. \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{matrix} \right\} \frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2} - y_0 \mathcal{L}_s \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = 0$$

propagation d'onde plane
avec $c = \frac{1}{\sqrt{y_0 \mathcal{L}_s}}$

ii) Comparaison au la célérité:

$$c_{\text{air}} \ll c_{\text{eau}} \ll c_{\text{acier}} \rightarrow c_{\text{air}} \gg c_{\text{eau}} \gg c_{\text{acier}}$$

L'air est assimilée à gaz parfait + isentropique.

$$p_0 V = n R T_0 \rightarrow p_0 \frac{V}{n} = R T_0 \rightarrow \frac{p_0}{y_0} = \frac{R T_0}{M} \rightarrow y_0 = \frac{p_0 M}{R T_0}$$

$$p_0 V^\gamma = \text{cte} \Leftrightarrow p_0 y_0^{-\gamma} = \text{cte} \Leftrightarrow \ln(p_0) - \gamma \ln(y_0) = \text{cte}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dp_0}{p_0} - \gamma \left(\frac{dy_0}{y_0} \right) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}_s = \frac{1}{\gamma p_0}$$

$$\Rightarrow c_{\text{air}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}_s y_0}} \rightarrow c_{\text{air}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} = 340 \text{ m.s}^{-1}$$

II) Impédance et Intensité:

1) Impédance acoustique et caractéristique:

$$Z_{\text{el}} = \frac{U_e}{I} = \frac{(U_1 + U_2) - U_0}{I} = \frac{\Delta U}{I} = \frac{\Delta U}{y \cdot S}$$

Analogue électroacoustique - acoustique:

$$Z_a = \frac{\Delta p}{v \cdot S} = \frac{p_a}{S v_a}$$

L'impédance caractéristique Z_c :

$$Z_c = \frac{p_a}{v_a}$$

$$v_a(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$(4) \Rightarrow p_a(x, t) = y_0 c \cdot v_a(x, t)$$

$$\rightarrow (Z_c)_e = y_0 c \text{ et } (Z_c)_a = - y_0 c$$

2) Intensité acoustique:

$$dE_c = \frac{1}{2} \delta m v_a^4 \rightarrow e_c = \frac{dE_c}{dt} \xrightarrow{\text{Apx}} e_c = \frac{1}{2} y_0 v_a^4$$

$$dE_p = - \delta W = - p_a \cdot d(V) = p_a \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \xrightarrow{\text{Apx}} e_p = \frac{1}{2} \mathcal{L}_s p_a^2$$

$$\Rightarrow e_m = \frac{1}{2} y_0 v_a^4 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_s p_a^2$$

$$\text{Conservation d'énergie: } \frac{d e_m}{dt} + \text{div } \vec{R} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x} = - \left(y_0 v_a \frac{\partial v_a}{\partial t} + \mathcal{L}_s p_a \frac{\partial p_a}{\partial t} \right)$$

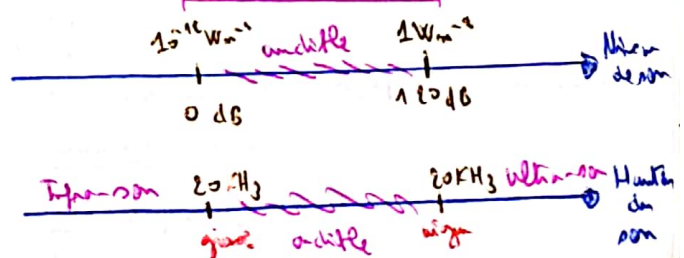
$$\vec{R} = p_a \cdot v_a \cdot \vec{u}_x$$

$$\vec{P} = \vec{R} \cdot \vec{S}$$

$$\text{L'intensité acoustique: } I = \langle \vec{R} \rangle = \frac{P}{S}$$

$$I_{\text{min}} = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2} \text{ et } I_{\text{max}} = 1 \text{ W.m}^{-2}$$

$$\text{Niveau sonore: } I_{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{I}{I_{\text{min}}} \right)$$



III) Réflexion et transmission:

1) Relation de continuité:

* Continuité de la pression:

• RFD appliquée à la tranche d'épaisseur nulle en $x=0$:

$$0 = F_1(x=0^-, t) + F_2(x=0^-, t)$$

$$S P_n(x=0^-, t) = S P_n(x=0^+, t)$$

$$\Rightarrow (P_n)_i + (P_n)_r = (P_n)_t$$

* Continuité du débit volumique:

• les 2 fluides ne se mélangent pas en $x=0 \Rightarrow (D_v) = \text{cte}$

$$D_v(x=0^-, t) = D_v(x=0^+, t)$$

$$\Rightarrow (D_v)_i + (D_v)_r = (D_v)_t \quad (1)$$

$$\Rightarrow (V_n)_i + (V_n)_r = (V_n)_t \quad (2)$$

2) Coefficients de réflexion et de transmission:

$$\eta_p = \frac{(P_n)_r}{(P_n)_i} \quad \epsilon_p = \frac{(P_n)_t}{(P_n)_i} \quad \eta_v = \frac{(D_v)_r}{(D_v)_i} \quad \epsilon_v = \frac{(D_v)_t}{(D_v)_i}$$

$$\begin{aligned} (1) & \rightarrow 1 + \eta_p = \epsilon_p \\ (2) & \rightarrow 1 - \eta_p = \frac{Z_{n2}}{Z_{n1}} \epsilon_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) & \rightarrow 1 + \eta_v = \epsilon_v \\ (2) & \rightarrow 1 - \eta_v = \frac{Z_{n1}}{Z_{n2}} \epsilon_v \end{aligned}$$

$$\eta_p = -\eta_v \text{ et } \epsilon_p = \frac{Z_{n2}}{Z_{n1}} \epsilon_v$$

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \frac{Z_{n2} - Z_{n1}}{Z_{n2} + Z_{n1}} \\ \eta_p &= \frac{2 Z_{n2}}{Z_{n2} + Z_{n1}} \\ \eta_v &= \frac{Z_{n2} - Z_{n1}}{Z_{n2} + Z_{n1}} \\ \epsilon_v &= \frac{2 Z_{n1}}{Z_{n2} + Z_{n1}} \end{aligned}$$

3) Facteurs de réflexion et transmission:

Concordance des coefficients de réflexion et transmission en puissance.

$$R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} \quad \text{et} \quad T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle}$$

$$R + T = 1 \rightarrow \text{conservation de puissance dans le cas d'absence de pertes.}$$

4) Cas particuliers:

Même fluides, jonction #:

$$(Z_1 = Z_2) \quad Y_1 = Y_2 \Rightarrow S_1 = S_2$$

$$\eta_p = \frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1}$$

$$\epsilon_p = \frac{2 S_1}{S_2 + S_1}$$

$$\text{Si } S_2 \rightarrow \infty \quad \eta_p = -1 \quad \epsilon_p = 1$$

Vente de vitesse, non de densité

Même section, fluide #:

$$(S_1 \neq S_2) \quad Y_1 \neq Y_2 \quad S_2 = S_1$$

$$\eta_p = \frac{Y_2 c_2 - Y_1 c_1}{Y_2 c_2 + Y_1 c_1}$$

$$\epsilon_p = \frac{2 Y_1 c_1}{Y_2 c_2 + Y_1 c_1}$$

$$\text{Si } Y_2 c_2 \rightarrow \infty \quad \eta_p = 1 \quad \epsilon_p = 1$$

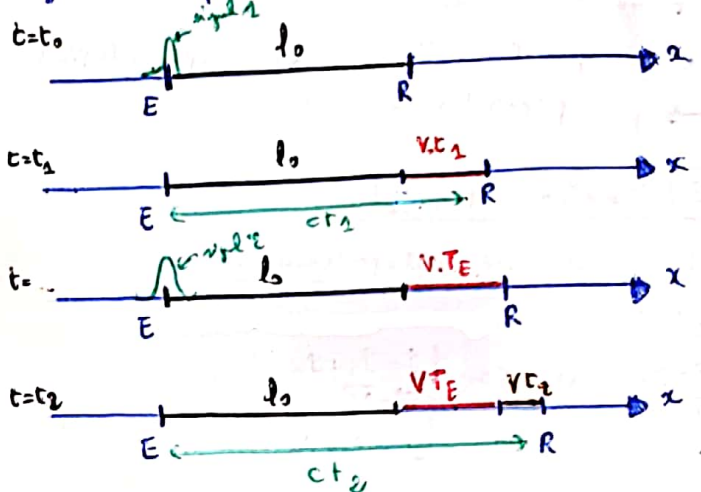
Vente de pression, non de vitesse

Condition de résonance:

$$L = (2p + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{4}$$

IV) Effet Doppler:

• C'est la modification de la fréquence du signal reçu par rapport au signal émis lorsque l'émetteur et le récepteur présentent un mouvement relatif.



③ Temps d'arrivée: "Temps pour laquelle le signal atteint R".

$$\text{Signal 1: } ct_1 = l_0 + vt_1 \rightarrow t_1 = \frac{l_0}{c-v}$$

$$\text{Signal 2: } ct_2 = l_0 + vt_E + vt_2 \rightarrow t_2 = \frac{l_0 + vt_E}{c-v}$$

④ Durée entre les 2 réceptions:

$$T_R = (T_E + t_2) - t_1 \Rightarrow T_R = T_E \frac{c}{c-v}$$

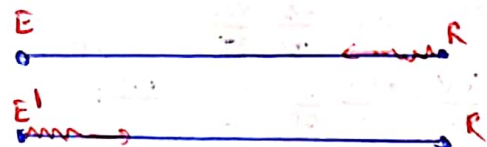
$$\Rightarrow f_R = f_E \left(\frac{c-v}{c} \right)$$

⑤ Mixe en incidence:

Si $\vec{V} > \vec{0} \rightarrow E$ et R s'éloignent $\rightarrow f_R > f_E$

Si $\vec{V} < \vec{0} \rightarrow E$ et R se rapprochent $\rightarrow f_R < f_E$

⑥ Double effet Doppler:



$$f_E = f_R \left(\frac{c}{c-v} \right) \rightarrow f_{E1} = f_R \left(\frac{c}{c+v} \right)$$

$$\Leftrightarrow f_{E1} = f_E \left(\frac{c-v}{c} \right) \left(\frac{c}{c+v} \right) = f_E \left(\frac{c-v}{c+v} \right) = f_E \frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}$$

$$\frac{DL}{DL} \Rightarrow f_{E1}' = f_E \left(1 - \frac{v}{c} \right)^2 \Rightarrow \boxed{f_{E1}' = \left(1 - \frac{2v}{c} \right) f_E}$$

⑦ Onde Sphérique Harmonique:

$$P_n(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad ; \quad \text{Fond d'onde = Sphère.}$$

$$\Rightarrow V_n(r, t) = \frac{A}{i\omega \rho_0 a^2} e^{i(\omega t - kr)} + \frac{-Akr}{\omega \rho_0 a^2} e^{i(\omega t - kr)}$$

• (Chap 1) onde $\rightarrow \lambda \gg r \rightarrow kr \ll 1 \Rightarrow I = 0 \rightarrow$ pas de propagation d'énergie

$$P = \int \langle \vec{r} \rangle dV \rightarrow P = \frac{4\pi A^2}{\rho_0 c} = \text{cte.}$$

18) Onde Electromagnetique

I) Dans le vide:

• $\vec{\nabla} \cdot (\vec{M} - \vec{P}) = \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ (1)

1) Equations Maxwell - Relation de dispersion:

(M-G): $\text{div } \vec{E} = 0$ / (M-F): $\text{div } \vec{B} = 0$.

(M-F): $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ / (M-A): $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

* $\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}$ vérifie (1)

$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2$
 $\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E} \Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$ (2)

2) Aspect énergétique:

* $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ (3)

* Dans le vide: $u_E = u_m \rightarrow u_{\text{em}} = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$

* $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \rightarrow \boxed{R = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}}$ (4)

3) Polarisation d'une OEPH:

a) Equations de polarisation:

$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx - \varphi_y) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - kx - \varphi_z) \end{cases}$ Changement d'origine: $\varphi = \varphi_z - \varphi_y$

$\begin{cases} E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - kx - \varphi) \end{cases}$

$\vec{OA} = \vec{E}(x=0,t) = \begin{cases} Y = E_y = E_{0y} \cos(\omega t) \\ Z = E_z = E_{0z} \cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} \frac{Y}{E_{0y}} = \cos(\omega t) \\ \frac{Z}{E_{0z}} = \cos(\omega t - \varphi) = \cos(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \sin(\varphi) \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} \frac{Y}{E_{0y}} = \cos(\omega t) \\ \frac{Z}{E_{0z}} - \cos(\omega t) \cos(\varphi) = \sin(\omega t) \sin(\varphi) = \frac{Z}{E_{0z}} - \frac{Y}{E_{0z}} \cos(\varphi) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{Y}{E_{0y}} \sin(\varphi) = \cos(\omega t) \sin(\varphi) \quad (1) \\ \frac{Z}{E_{0z}} - \frac{Y}{E_{0z}} \cos(\varphi) = \sin(\omega t) \sin(\varphi) \quad (2) \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\left(\frac{Z}{E_{0z}} \right)^2 - \left(\frac{Y}{E_{0y}} \right)^2 - 2 \frac{ZY}{E_{0z} E_{0y}} \cos(\varphi) \right] = \sin^2(\varphi) \Rightarrow \text{ellipse.} \quad (I)$

b) Sens de polarisation:

Méthode 1: Si une onde se propage sur $\vec{u}_x$:

* l'axe long des oscillations $\rightarrow$ polarisation grande
 * l'axe long des oscillations $\rightarrow$ polarisation petite

Méthode 2: $S = \vec{k} \wedge \left(\vec{OA} \wedge \frac{\partial \vec{OA}}{\partial t} \right)_{t=0}$

* $\sin(\varphi) > 0 \rightarrow S > 0 \rightarrow$ polarisation grande

* $\sin(\varphi) < 0 \rightarrow S < 0 \rightarrow$ polarisation petite.

Méthode 3: $v(t=0) = \left(\frac{\partial \vec{OA}}{\partial t} \right)_{t=0}$

* $\sin(\varphi) > 0 \rightarrow v > 0 \rightarrow$ polarisation grande

* $\sin(\varphi) < 0 \rightarrow v < 0 \rightarrow$ polarisation petite

Conclusion: $\varphi \in]0, \pi[\rightarrow$ grande
 $\varphi \in]\pi, 2\pi[\rightarrow$ petite

2) Types de polarisation:

* $\varphi = 0$: $Z = uY \rightarrow$ rectiligne à l'axe

* $\varphi = \pi$: $Z = -uY \rightarrow$ rectiligne à l'axe

* $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $Z^2 + Y^2 = E_0^2 \rightarrow$ circulaire grande

* $\varphi = \frac{3\pi}{2}$: $Z^2 + Y^2 = E_0^2 \rightarrow$ circulaire petite

3) Polarisation:

* La composante // à l'axe de polarisation perce

* La composante $\perp$ à l'axe de polarisation dissipe par effet Joule.

4) Lignes de retard:

On distingue lignes de retard $\rightarrow$ lignes polarisées φ .

On dit qu'il y a extinction si les axes minors et les axes polaires sont confondus.

5) Axes des - nœuds:

* $v = \frac{c}{n}$; si $n_e < n_o \rightarrow v_e > v_o$.
 * l'axe des minors est rapide
 * l'axe des polaires est lent

* $\phi = \phi_{\text{rapide}} - \phi_{\text{lent}} \rightarrow \boxed{\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta}$ (II)

avec $\delta = (n_e - n_o) L$

* $\delta = \frac{\lambda}{4} \rightarrow |\phi| = \frac{\pi}{4} \rightarrow$ ligne quart d'onde

* $\delta = \frac{\lambda}{2} \rightarrow |\phi| = \pi \rightarrow$ ligne demi-onde.

6) Les Modèles:

$\vec{E}_t = (\vec{E}_i \cdot \vec{u}_p) \vec{u}_p$ et $\vec{E}_t = \vec{E}_i(x+L)$

$\boxed{I_{E_t} = \frac{I_{E_i}}{2} \cos^2(\alpha)}$

7) Polarisation d'une lumière d'un plan à retard:

$K = \frac{\omega}{c} / K_0 = \frac{\omega}{c} n_0 / K_e = \frac{\omega}{c} n_e$; $\boxed{K_e - K_0 = K \cdot \frac{S}{L} = \frac{\pi}{L}}$

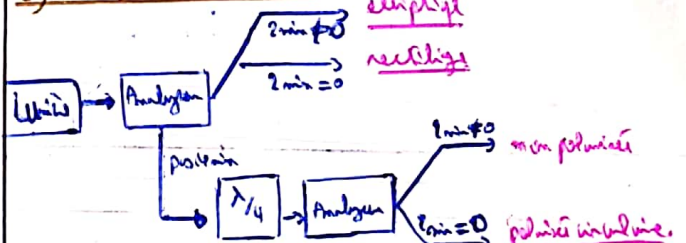
$\vec{E}_t = \begin{cases} E_{ty} = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kx) \\ E_{tz} = E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kx - \varphi) \end{cases}$

$\vec{E}_t = \begin{cases} E_{ty} = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kx - k_0 L) \\ E_{tz} = E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kx - k_0 L - \varphi) \end{cases}$

$\vec{E}_t = \begin{cases} E_{ty} = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kx) \\ E_{tz} = E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kx + (k_e - k_0)L - \varphi) \end{cases}$

$\rightarrow \boxed{\vec{E}_t = \begin{cases} E_{ty} = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kx) \\ E_{tz} = E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kx + (\phi - \varphi)) \end{cases}} \quad (III)$

8) Analyse de lumière inconnue:



II) 1) Dans les plasmas et les conducteurs :

2) Conductivité :

Conducteur. (e^-)	Plasma. ($e^- + ion$)
RFD appliqué à l'électron : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_e + \vec{F}_m + \vec{f}_u$	RFD appliqué à l'électron : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_e + \vec{F}_m$ RFD appliqué à l'ion : $M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_e + \vec{F}_m$

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$
 $\vec{v} = v(x) \cdot \vec{u}_x \rightarrow \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = 0$
 $\vec{F}_e = \frac{eE}{\epsilon_0} = \frac{E}{\delta} \cdot \frac{e}{\delta}$
 $\|\vec{F}_e\| = \frac{eE}{\delta} = \frac{E}{\delta} \rightarrow \delta = \frac{E}{\epsilon_0}$

$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -eE - \frac{m}{\epsilon_0} \vec{v}$
 $\rightarrow \vec{v} = \frac{-eE}{1 + i\omega \epsilon_0} \vec{E}$
 $\Rightarrow \vec{j} = m e \vec{v} \rightarrow \vec{j} = \frac{m e^2 E}{1 + i\omega \epsilon_0} \vec{E}$ ①
 BF: $\omega \ll \frac{1}{\epsilon_0}$
 $\delta = \delta_0$
 $\vec{j} = \frac{m e^2}{m} \vec{E}$
 HF: $\omega \gg \frac{1}{\epsilon_0}$
 $\vec{j} = \frac{m e^2}{i m \omega} \vec{E}$ ②
 $\vec{j} = n(e) \vec{v}_- + n(e) \vec{v}_+$
 $\vec{j} = \frac{m e^4}{i m \omega} \vec{E}$ ③

En HF: Conducteur $\Leftrightarrow$ Plasma avec $\delta = \frac{m e^4}{i m \omega} \in \mathbb{C}$.

- $\vec{j}$ et $\vec{E}$ en quadrature de phase $\Rightarrow \langle P_d \rangle = 0$.
- Propagation sans atténuation $\Rightarrow$ plasma $\equiv$ transparent.

3) Equations Maxwell et relation de dispersion :

$\text{div } \vec{E} = 0 / \text{div } \vec{B} = 0 / \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \frac{n e^4}{i m \omega} \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 $\text{rot } (n - F) : k^2 = \frac{\omega^4}{c^4} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$ ③ ; $\omega_p^2 = \frac{n e^4}{\epsilon_0 m}$

3) Vitesse de phase et de groupe :

$k^2 > 0 (\omega > \omega_p)$
 Kéel pu $\rightarrow k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$
 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$
 $\Rightarrow$ onde progressive.
 $k^2 < 0 (\omega < \omega_p)$
 Kimmuable $\rightarrow k = -i \kappa$
 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\kappa x} e^{i\omega t}$
 $\Rightarrow$ onde évanouissante.
 $\omega = \frac{c}{v_g} \rightarrow v_g = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \Rightarrow$ vitesse de phase n'a pas de sens physique.
 $k^2 c^4 = \omega^4 - \omega_p^4 \rightarrow 2\omega^2 k = 2\omega \frac{d\omega}{d\omega} \rightarrow v_{ph} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_g}$

4) Situation d'incidence d'onde :

Conditions	longue portée	longue portée	sol - surface sol.
ω	$\omega < \omega_p$	$\omega > \omega_p$	$\omega > \omega_p$
onde	évanouissante	progressive	progressive
propagation	X	dispersive	non dispersive.

5) Incidence complète :

$\text{rot } (n - F) : k^2 = \frac{\omega^4}{c^4} - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 = k' - i k'' \rightarrow$ propagation + atténuation

L'incidence complète: $m = m' - i m''$.

$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-m'' x} \cos(\omega(t - \frac{x}{c} n'))$ | m' : indice de réfraction, m'' : indice d'absorption

$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \rightarrow 0$ si $m' = 0$ (absorbant),
 $\rightarrow m \frac{E_0^2}{2 \mu_0 c}$ si $m'' = 0$ (transparent)

6) Réflexion et transmission :

a) Dérivées - Fresnel :

Continuité de $\vec{E}$ en la surface :

$\vec{E}_i(x=0, t) + \vec{E}_r(x=0, t) = \vec{E}_t(x=0, t) ; \forall y, z, t$

$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$
 $\theta_1 = -\theta_r$ et $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$
 les 3 ondes sont coplanaires.

b) coefficients et angles de réflexion et de transmission :

Continuité de $\vec{E}$ en U : $\vec{E}_{oi} + \vec{E}_{or} = \vec{E}_{ot}$
 Continuité de $\vec{B}$ en U : $\vec{E}_{oi} - \vec{E}_{or} = \frac{n_2}{n_1} \vec{E}_{ot}$

$\Rightarrow r = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$ et $t = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}$

$R = \frac{\langle \vec{P}_r \rangle}{\langle \vec{P}_i \rangle} \rightarrow R = |r|^2$
 $T = \frac{\langle \vec{P}_t \rangle}{\langle \vec{P}_i \rangle} \rightarrow T = \frac{n_2}{n_1} |t|^2$
 $R + T = 1$ car l'énergie est conservée

c) Polarisation par réflexion sur di-électrique :

R_N et R_T dans.

Si $R_T = 0 \rightarrow \begin{cases} n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \\ \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 \text{ (normal)} \\ 2\theta_2 = \pi - 2\theta_1 \rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4} - \theta_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \theta_2)}{\sin \theta_2} = \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} \rightarrow \theta_b = \arctan\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$

Si $\theta_i = \theta_b \rightarrow R_T = 0$.

I) Fentes et Trous de Young

• Dispositifs d'interférence:

Sonde	Front d'onde	Amplitude	Localisation
Ponctuelle	linéaire: faible Constant: 1	linéaire: faible Constant: 1	Non Localisée
Étendue	linéaire: forte Constant: 0	linéaire: forte Constant: 1	Localisée

• Surface d'onde:

$$\omega(M, t) = a_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot [SM] - \varphi_0)$$

$$\text{Surface d'onde} = \{M \in \text{Espace} / SM = \text{cte}\}$$

• Théorie de Huygens: $S(M) = \text{de cette surface d'onde de rayon}$

• Trous de Young: $a \left(\frac{x_0}{f'_1} + \frac{x}{f'_2} \right)$

• Lame de Michelson: $2e \cos(\theta)$

I) Superposition d'ondes lumineuses:

1) Formule de Fresnel:

$$I = \alpha \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \quad \text{ou} \quad \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\text{donc: } I(M) = I_1 + I_2 + 2 \langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle$$

$$\Rightarrow I(M) = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_2 - \varphi_1)$$

terme d'interférence.

• Terme d'interférence $\neq 0 \Rightarrow$ Il y a interférence:

① Polarisation quasi $\parallel \Rightarrow$ d'approximation

② Synchronisation: $\omega_1 = \omega_2$

③ Cohérence: $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \text{cte. ou } 0$

$$\text{②} \Rightarrow I(M) = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos(\omega(\varphi_2 - \varphi_1))$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} [SM] - \varphi_0 = f(r) \quad (\text{car } \varphi_0 = f(r))$$

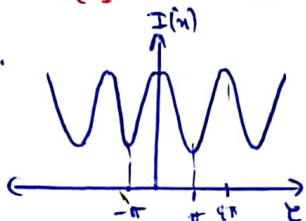
$$\text{③} \Rightarrow I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(M)\right)$$

2) Contraste et Centre de $I(x)$:

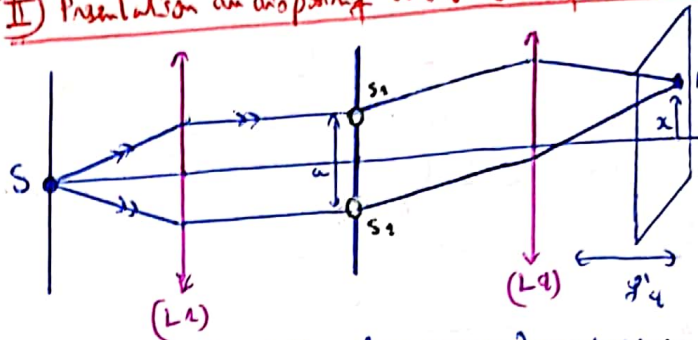
$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \rightarrow C = \frac{4 \sqrt{I_1 I_2}}{(I_1 + I_2)} = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow I_1 = I_2$$

$\Rightarrow$ Contraste maximal si les ondes sont identiques.



II) Présentation du dispositif de division de front d'onde



• Lien 2 ondes cohérentes: On les réalise par une même source primaire.

• Rôle de L1: Conversion d'onde plane en point

• Rôle de L2: Conversion d'onde plane en sphérique qui converge en (F).

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M) \right)$$

$$\delta(M) = \frac{ax}{f'_2}$$

• Franges: $\{M \in (E) / I(M) = \text{cte}\}$

Si l'écran $\parallel$ à $(S_1 S_2) \Rightarrow$ des droites $\perp$ à $\vec{u}_x$ ($\delta = \frac{ax}{f'_1}$)

Si l'écran $\perp$ à $(S_1 S_2) \Rightarrow$ des cercles centrés en F'.

• Ordre d'interférence: $p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda}$

$M \in$ Frange brillante $\rightarrow I = I_{\max} \rightarrow p(M) = m$

$M \in$ Frange sombre $\rightarrow I = I_{\min} \rightarrow p(M) = m + \frac{1}{2}$

• Interfrange: période de figure d'interférence.

Méthode 1: $\delta(M) = \frac{ax}{f'_2} \Leftrightarrow \Delta \delta = \frac{a}{f'_2} \Delta x$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{a}{f'_1} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\lambda f'_2}{a}}$$

Méthode 2: $p(M) = \frac{ax}{\lambda f'_1} \Rightarrow x = \frac{\lambda f'_1}{a} p(M)$

$$\lambda = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda f'_1}{a} (p_{m+1} - p_m) = \frac{\lambda f'_1}{a}$$

III) Variation de figure sur l'écran:

① Translation $\perp (S_1 S_2) \Rightarrow \delta' = \delta \Rightarrow I' = I$

$\Rightarrow$ figure inchangée.

② Translation $\parallel (S_1 S_2) \Rightarrow \delta' = \frac{ax_0}{f'_2} + \delta$

$$\Rightarrow \delta(x_{Fc}) = 0 \rightarrow x_{Fc} = - \frac{f'_2}{f'_1} x_0$$

$\Rightarrow$ figure se déplace en fonction du déplacement x_{Fc} .

③ Fente allongée $\perp (S_1 S_2)$:

$\Rightarrow$ figure plus lumineuse pour le même contraste.

④ S_1 et S_2 placés sur (Oy) au lieu de (Ox) : $\delta' = \frac{ay}{f'_2}$

$\Rightarrow$ figure tournée de 90° par rapport à (Ox) .

⑤ Ecran déplacé de D_0 : $i' = i + \frac{\lambda D_0}{a}$

$\Rightarrow$ Franges de plus en plus serrées.

III) Perte de Contrast:

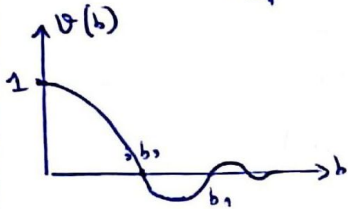
1) Coherence spatiale = longueur b et distance a ,

① Element de largeur $dx \Rightarrow dI_0 = \frac{I_0}{b} dx$.

$$② dI(x) = 2 dI_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right) \right)$$

$$\Rightarrow I(x) = 2I_0 \left(1 + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi a b}{\lambda f'}\right)}_V \cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda f'}\right) \right)$$

$$* V(b) = \cos\left(\frac{\pi a b}{\lambda f'}\right)$$



• Si $b \gg b_1$; $V \downarrow$

• Quand $V(b) = 0$

$\Rightarrow$ Brulage.

$b > b_2$: inversion de contrast.

2) Coherence Temporelle (spectrale):

a) Source bichromatique:

• $\lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow$ Sources incohérentes $\Rightarrow I = I_1 + I_2$.

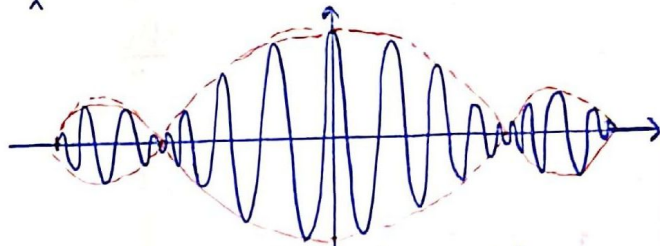
$$\bullet \lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_0 \\ \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_0^2 - \left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2 \approx \lambda_0^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I(x) = 2I_0 \left(1 + \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \pi \delta\right)}_V \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_0} \delta\right) \right)$$

* Calc:

$$\bullet \frac{\pi \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \delta \pi = 2\pi \rightarrow T_1 = \frac{2\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \Rightarrow T_1 > T_2$$

$$\bullet \frac{2\pi}{\lambda} \delta \pi = 2\pi \rightarrow T_2 = \lambda_0$$



$\Rightarrow$ phase de battant.

• zone morte (coincidence): $c \approx 1$: superposition des fronts lumineux.

• zone plus (anticoincidence): $c \approx 0$: superposition de fronts ondes.

b) Perce admettant une largeur: ($\Delta\lambda \neq 0$):

* largeur de l'élargissement:

① Natuelle: $\Delta\lambda \Delta\nu \geq 1 \rightarrow \Delta\nu_{naturelle} \neq 0$.

② Doppler: la source n'est pas immobile $\rightarrow \nu_{vue} = \nu_0 \pm \Delta\nu_{doppler}$.

③ Collisionnelle: Due aux collisions entre: choisis $\nu_1, \Delta\nu_1; \nu_2, \Delta\nu_2$.

* Type de spectre:

• Au centre: continue

• Lignes de raies: continues

* Intensité sur l'écran:

① Intensité spectrale $\Rightarrow dI_0 = I_0(\nu) \cdot d\nu$

$$② dI(x) = 2 dI_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right) \right)$$

$$\Rightarrow I(x) = 2I_0 \left(1 + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi \Delta\lambda \nu}{c}\right)}_V \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_0} \delta\right) \right)$$

* Sur l'écran:

① Au centre: frange de lumière blanche.

② Après: frange noire.

③ Après: frange inversée.

④ Après: blanc d'ordre supérieur (frange blanche).

IV) N-fentes:

$$\bullet S(m) = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin \theta - \sin i)$$

$$\bullet \text{Force d'usage: } \sin \theta - \sin i = p \frac{\lambda}{2}$$

① Intensité:

$$\bullet S(m) = S_1 + S_2 e^{-j\phi} + \dots + S_n e^{-j(m-1)\phi}$$

$$\Rightarrow S(m) = S_1 e^{-j(m-1)\phi} \left(\frac{\sin\left(\frac{m\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right)$$

$$I(m) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{m\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

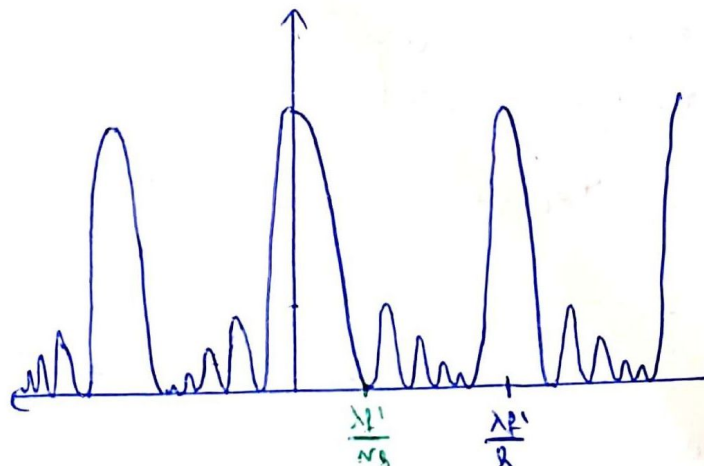
② Figure d'interférence:

$$I_{max} = n^2 I_0 \rightarrow x_{max} = \left(\frac{\lambda f'}{a} \right) m$$

$$I_{min} = 0 \rightarrow x_0 = \left(\frac{\lambda f'}{n a} \right) m$$

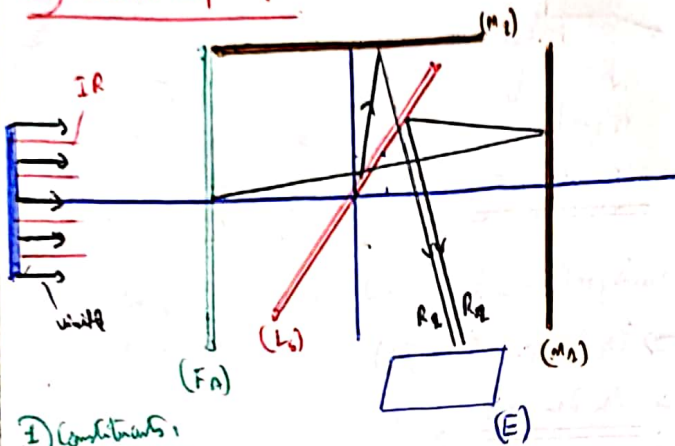
$$\rightarrow x_{max} \approx \frac{x_0 + \lambda_0 f'}{2}$$

Entre 2 maxima il y'a: $\begin{cases} (N-1) \text{ zéros} \\ (N-4) \text{ maxima secondaires} \end{cases}$



12 Michelson.

I) Schéma de principe:



1) Conditions:

Lame séparatrice: Divise le rayon incident en réfléchi + transmis.

Minuit M1: Assure la réflexion de R_2 sur (E) après une réflexion sur (Ls).

Minuit M2: Assure la réflexion de R_2 sur (E) après une transmission (Ls).

Filtre interférentiel: Élimine le (IR) pour ne pas endommager (Ls).

4 vis: permettent d'ajuster l'angle entre (M1) et (M2).

2) Marche des rayons R_1 et R_2 :

Sourc $\rightarrow$ réflexion (Ls) $\rightarrow$ réflexion (M2) $\rightarrow$ transmission (Ls) $\rightarrow$ (E)

Sourc $\rightarrow$ transmission (Ls) $\rightarrow$ réflexion (M1) $\rightarrow$ réflexion (Ls) $\rightarrow$ (E)

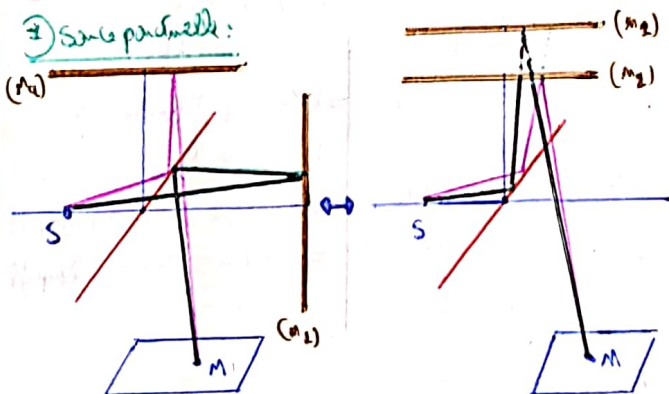
3) Intensité des rayons:

Les 2 ondes, qui interfèrent ont la même intensité: $I = I_1 + I_2$

Le $\frac{dI}{dR} = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$; Pour $R = \frac{1}{2}$ on a $I = I_{max}$.

II) Michelson en l'air d'air:

1) Sans pondération:



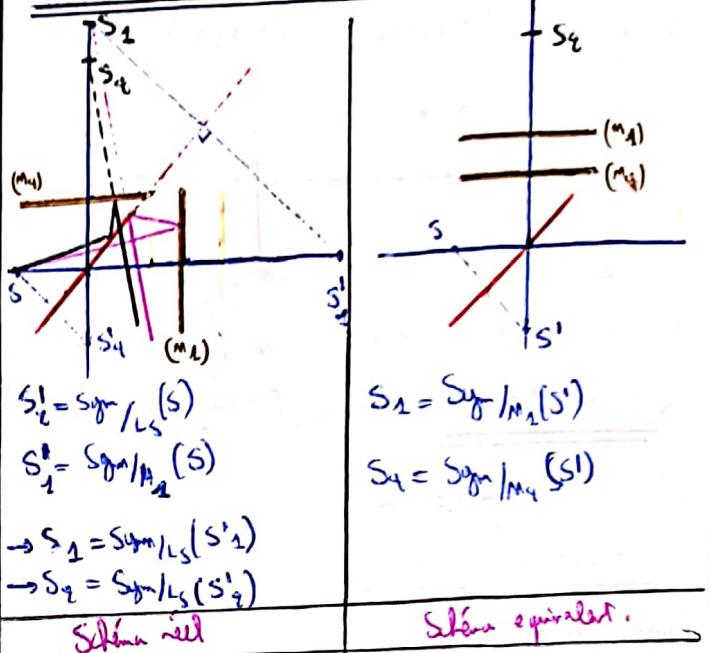
Le Michelson est équivalent à une lame d'air formée par (M2) et (M1').

A distance finie, on observe interférence de rayons différents.

$\Rightarrow$ division de front d'onde (Frits Young)

Cette interférence est modulée par les rayons secondaires car il existe plusieurs positions où l'on n'observe pas d'interférence.

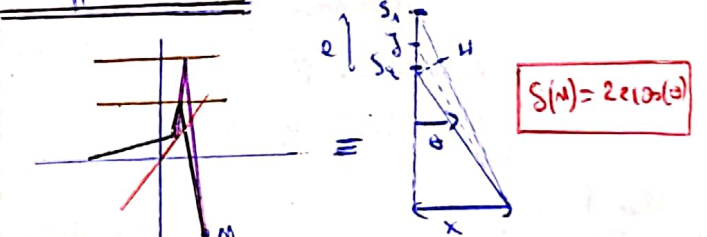
Position des rayons secondaires:



Distance $S_1 S_2$:

$$\begin{aligned} S_2 O + O S_1 &= S_2 O_1 + O_1 O + O O_1 + O_1 S_1 \\ &= O_1 S_1 + O_1 O + O O_1 + O_1 S_1 \\ &= 2(O_1 O_1 - O O_1) = 2e. \end{aligned}$$

Différence de marche:



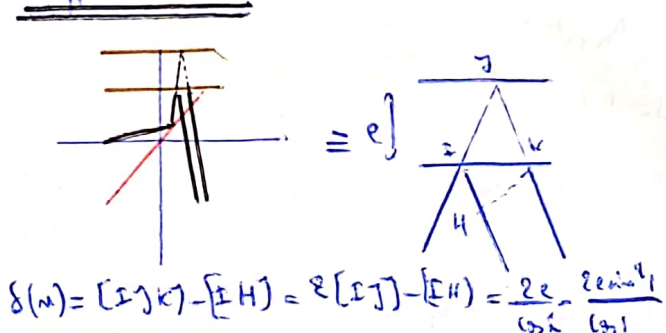
2) Sans pondération:

En tout point sur l'écran, l'interférence est modulée car on ne reçoit pas toujours des rayons de même intensité.

$\Rightarrow$ division d'amplitude (Michelson).

Chaque onde est considérée comme une onde $\Rightarrow$ il faut prendre en compte la phase de l'onde réfléchie.

Différence de marche:



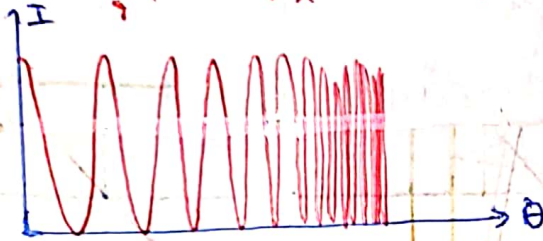
$$S(n) = [I]K - [I]H = 2[I] - [I]H = 2e \cos(\theta)$$

$\Rightarrow S(n) = 2e \cos(\theta)$

$\{M \in E_{\text{un}} / S = 0\} = \{M(n, \theta, e)\} = \text{ensemble en F.}$

→ lentille: Elle focalise l'onde plane en optique sur (F)

$$I(\theta) = \frac{I_0}{9} (1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2e \cos(\theta)))$$



les anneaux se trouvent de plus en plus près de P.

→ ordre d'interférence: $p(m) = \frac{2e \cos(\theta)}{\lambda}$

$p(\theta=0) = \frac{2e}{\lambda} = p_0$

→ type d'anneau central

Brillant $\begin{cases} p_0 = \text{entier} \\ p_{\text{inter}} = p_0 - m \\ p_{\text{min}} = p_0 - m - 0,5 \end{cases}$

Noir: $\begin{cases} p_0 = \text{entier} + \frac{1}{2} \\ p_{\text{inter}} = p_0 - (m-1) \\ p_{\text{min}} = p_0 - (m-1) - 0,5 \end{cases}$

Niveau gris: $\begin{cases} p_0 = \text{entier} + \frac{1}{2} \\ p_{\text{inter}} = p_{\text{min}} = p_0 - (m-1) - \frac{1}{2} \end{cases}$

→ Rayon

$\tan(i_m) = \frac{n_m}{f} \Rightarrow n_m = f i_m$

$p_m = \frac{2e \cos(i_m)}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} (1 - \frac{i_m^2}{2}) = p_0 (1 - \frac{i_m^2}{2})$

$\Rightarrow i_m = \frac{\sqrt{2e(p_0 - p_m)}}{p_0} \Rightarrow n_m = \frac{f}{\lambda} \sqrt{2e(p_0 - p_m)}$

→ Distance entre les anneaux:

$d = n_{m+1} - n_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ (de plus en plus serrés)

$d = f(k) \Rightarrow$ notion d'interférence n'a pas de sens.

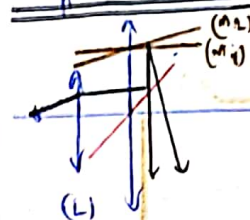
$f \in P \Rightarrow n_m \downarrow \Rightarrow$ la largeur du spectre de la lumière $\Rightarrow$ mode P

$e \downarrow \Rightarrow n_m \uparrow \Rightarrow$ la largeur du spectre de la lumière $\Rightarrow$ mode V

$e = 0 \Rightarrow$ (optique géométrique) $\Rightarrow$ absence de dispersion.

III) Michelson expérimente la cohérence:

→ Différence de marche:



→ ordre d'interférence:

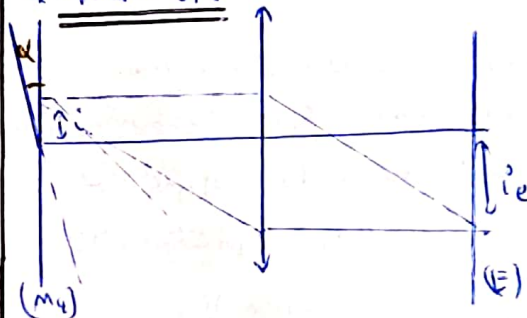
$e = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{OM}$

$\Rightarrow \delta(m) = 2d \cos \theta$

La seule position où le contraste dépende pas de d est $\theta = 0$.

→ les franges sont sur (M2)

→ chercher d:



$\delta = 2d \cos \theta \Rightarrow \Delta \delta = 2d \Delta \theta \Rightarrow \theta = \frac{\Delta \delta}{2d}$

$|\theta| = \frac{\Delta \delta}{2d} = \frac{e}{2} \Rightarrow d = \frac{i \delta}{2e}$

IV) Montage réel:

→ Les repartitions réelles:

$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \epsilon_0}} \cdot \epsilon$: épaisseur de film; l : épaisseur de métal.

$l < \delta \Rightarrow$ lumière transmise // $l > \delta \Rightarrow$ réflexion

→ montage réel (L_c) et (L_s) répartis de longueur l :

Avec (L_c) Sans (L_c)

→ la longueur d'onde de la lumière de la source.

$\Rightarrow \delta(m)_{L_c} = 2e \cos \theta$

$\Rightarrow \delta(m)_{L_s} = 2d \cos \theta$

→ (1) trans 3 fois pour aller à M

→ (2) trans 1 fois

$\Rightarrow \delta(m)_{L_c} = 2e \cos \theta + 2(m-1)l$

$\Rightarrow \delta(m)_{L_s} = 2d \cos \theta + 2(m-1)l$

→ réflexion sur une surface:

$n = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$

$\Rightarrow \sin \theta_1 > n_2$ (vair $\rightarrow$ air) $\Rightarrow n > 0 \Rightarrow \frac{E_{\text{refl}}}{E_{\text{inc}}} > 0 \Rightarrow \delta_{\text{supp}} = 0$

$\Rightarrow \sin \theta_2 > n_1$ (air $\rightarrow$ vair) $\Rightarrow n < 0 \Rightarrow \frac{E_{\text{refl}}}{E_{\text{inc}}} = e^{i\pi} \Rightarrow \delta_{\text{supp}} = \frac{\pi}{2}$

Donc: $\begin{cases} \text{air} \rightarrow \text{vair} : \delta_{\text{supp}} = \frac{\pi}{2} \\ \text{vair} \rightarrow \text{air} : \delta_{\text{supp}} = 0 \end{cases}$

13 Diffraction.

I) Définition et Principe de Huygens-Fresnel:

• Diffraction: Épanouissement de lumière autour de la direction prévue par l'optique géométrique.

• Type de diffraction:

• Par transmission: (fente de longueur très faible).

• Par réflexion: (mise de longueur très faible).

• Huygens-Fresnel:

① Limites se propagent de proche en proche $\Rightarrow$ tout point atteint par la lumière est une source secondaire.

② L'amplitude diffractée dAp, par élément de surface dSp, est proportionnelle à dSp.

③ Les sources secondaires sont cohérentes.

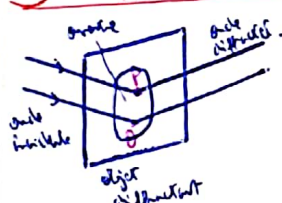
$$\rightarrow dA(P) = a_0 \cdot c(P) e^{i\varphi} dS_P$$

amplitude de l'onde incidente par élément de surface.

coefficient de transmission: $c(P) = 1$ si milieu transparent, $c(P) = 0$ si milieu opaque.

de phase de l'onde diffractée entre O et P: $\varphi = (\vec{k}_d - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}$

II) Diffraction de Fraunhofer:



Apx de Fraunhofer:

L'objet et l'observateur de diffraction sont à l'infini.

• Direction de diffraction: $\perp$ à la grande dimension de l'ouverture.

• Rôle de: (L_1) : transforme l'onde sphérique en onde plane

(L_2) : transforme l'onde diffractée plane en sphérique

pour voir la figure de diffraction à distance finie

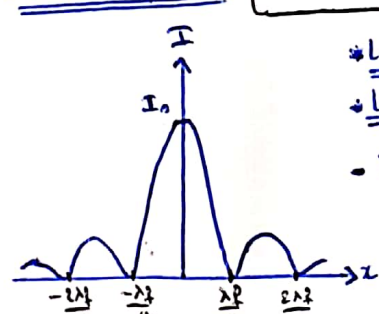
① Par fente, de largeur a, de longueur L:

• Déphasage: $\varphi = (\vec{k}_d - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP} = \frac{2\pi x}{\lambda f} \sin \theta = \frac{2\pi x}{\lambda f} \cdot x$

• Amplitude diffractée: $A_d = a_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{i\varphi} dx \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy$

$\rightarrow A_d = A_0 \text{sinc}\left(\frac{\pi a x}{\lambda f}\right)$ ②

• Intensité diffractée: $I = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda f}\right)$ ③



• Longueur de frange centrale: $\frac{2\lambda f}{a}$

• Longueur des autres franges: $\frac{\lambda f}{a}$

• Sur l'écran:

La tache centrale est 2 fois plus large que les autres.

• Variation de figure de diffraction:

- Toute translation de la fente ou du plan $\Rightarrow$ figure inchangée
- Tourne la fente $\Rightarrow$ figure tournée par $\theta \perp$ à la fente.
- Déplacement de f) $\Rightarrow$ figure se déplace par θ et θ est nul à l'axe de f)
- Largeur $\rightarrow 0 \Rightarrow$ interférence pure.

② N fentes, de largeur a, de longueur L, distantes de d > a:

• Déphasage: $\varphi = (\vec{k}_d - \vec{k}_i) \cdot \vec{O}_m \vec{O}_{m+1} = \frac{2\pi x d}{\lambda f}$

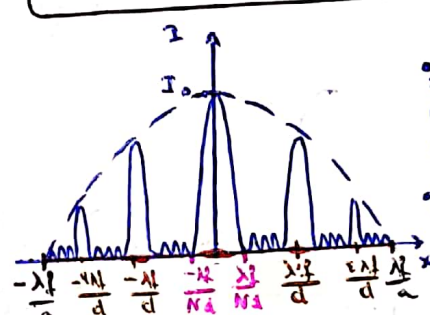
• Amplitude diffractée: $A_p = A_1 + \dots + A_N = A_1 (1 + e^{i\varphi} + \dots + e^{i(N-1)\varphi})$

$\rightarrow A_p = A_1 e^{i(N-1)\frac{\varphi}{2}} \frac{\sin(\frac{N\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}$

$\rightarrow A_p = A_0 \text{sinc}\left(\frac{\pi a x}{\lambda f}\right) \frac{\sin\left(\frac{N\pi x}{\lambda f}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{\lambda f}\right)} e^{i(N-1)\frac{\varphi}{2}}$ ④

• Intensité diffractée:

$I = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda f}\right) \left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi x}{\lambda f}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{\lambda f}\right)}\right]^2$ ⑤



• On observe: figure d'interférence dans les traits de diffraction.

• Interfrange: $x = \frac{\lambda f}{d}$

• $I = 0 \Leftrightarrow \frac{N\varphi}{2} = p\pi \Leftrightarrow x_p = \left(\frac{\lambda f}{Nd}\right) p$

• $I = I_{max} \Leftrightarrow \frac{\varphi}{2} = p\pi \Leftrightarrow x_p = \left(\frac{\lambda f}{d}\right) p$

• Nombre de franges brillantes dans la tache centrale de diffraction: N

$N = \frac{\text{largeur de tache centrale de diffraction}}{\text{interfrange}} - 1 = \frac{\Delta x}{x} - 1 = \frac{2\lambda f}{a} - 1$

• Deux largeurs: $\Delta x_{1/2} = \frac{\lambda f}{2Nd} - \frac{\lambda f}{2Nd} = \frac{\lambda f}{Nd}$

• Critère de Rayleigh:

$\left(\begin{array}{c} \text{max de } \lambda_1 \text{ pte } \lambda_2 \\ \text{1st min de } \lambda_1 \text{ pte } \lambda_2 \end{array} \right) \parallel \begin{array}{l} (x_{max,1})_{x_2} = (x_{0,1})_{x_2} \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda_1 f}{d} p = \frac{\lambda_2 f}{d} p + \frac{\lambda_2 f}{Nd} \\ \rightarrow \Delta \lambda = \frac{\lambda}{pN} \end{array}$

$\Rightarrow R = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1}{pN}$

III) Stéréoscopie: Filtrage optique:

• La diffraction se fait sur le plan focal image de (L_2)

$\Rightarrow$ c'est le plan de Fourier.

• Toute information sur la figure de diffraction dans le plan de Fourier modifie l'image de l'objet

$\Rightarrow$ Filtrage optique

① Spectre de l'objet, pour fente de largeur a , longueur L :

- dephasage: $\varphi = (\vec{k}_d - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP} = \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \theta$.

On pose $y = \frac{\sin \theta}{\lambda} \rightarrow \varphi = 2\pi xy$; avec $y = \text{fréquence spatiale}$.

- coefficient de transmission: $t(x) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right)$

- amplitude de diffraction: $A_p = A_0 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right)\right) e^{i\varphi} dx \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy$

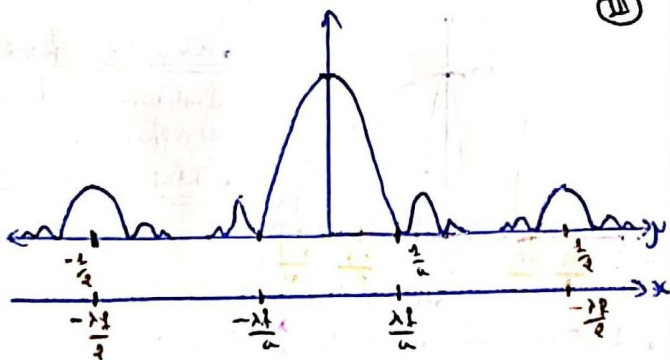
$\rightarrow A_p = A_0 a \left[\underbrace{\text{sinc}(\pi a y)}_{\text{carte } m=0} + \frac{1}{2} \underbrace{\text{sinc}\left(\pi a \left(y + \frac{1}{d}\right)\right)}_{\text{carte } m = \frac{1}{d}} + \frac{1}{2} \underbrace{\text{sinc}\left(\pi a \left(y - \frac{1}{d}\right)\right)}_{\text{carte } m = -\frac{1}{d}} \right]$ ③

• Intensité de diffraction:

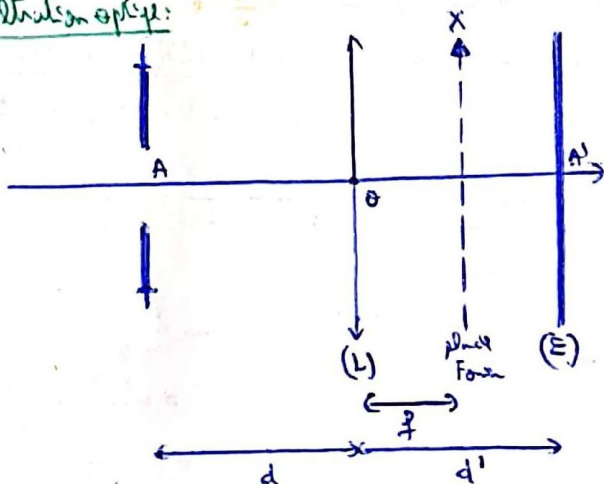
$I = A_p A_p^* = A_0^2 \left[A_2^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_3^2 + 2A_2 A_3 + 2A_1 A_2 + 2A_1 A_3 \right]$

les dots de A_2, A_3 et A_3 sont déphasés $\Rightarrow A_2 A_3 = A_2 A_4 = A_3 A_4 = 0$

$\Rightarrow I = I_0 \left[\text{sinc}^2(\pi a y) + \frac{1}{4} \text{sinc}^2\left(\pi a \left(y + \frac{1}{d}\right)\right) + \frac{1}{4} \text{sinc}^2\left(\pi a \left(y - \frac{1}{d}\right)\right) \right]$



② Filtration optique:



• Fonction de conjugaison: $\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \Leftrightarrow \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$

• Réalisation de Filtrage passe bas:

On place dans le plan de Fourier une fente centrée en $(0, z)$.

• $\left[\begin{array}{l} \text{longueur maximale: } a_{\max} = \frac{2\lambda f}{d} - \frac{2\lambda f}{a} \\ \text{longueur minimale: } a_{\min} = \frac{2\lambda f}{a} \end{array} \right]$

$\Rightarrow$ Figure de diffraction d'une fente de largeur a : $\text{sinc}(E)$, on voit l'image de la fente: une bande de largeur a .

$\Rightarrow$ on voit les gros détails de l'objet.

• Réalisation de filtre passe haut:

On place dans le plan de Fourier un obstacle centré.

• $\left[\begin{array}{l} \text{longueur maximale: } \frac{2\lambda f}{d} - \frac{2\lambda f}{a} \\ \text{longueur minimale: } \frac{2\lambda f}{a} \end{array} \right]$

$\Rightarrow$ on voit les petits détails, une précision.

14) Laser.

Introduction:

+ Le spectre optique résulte des largeurs spectrales → quantification d'énergie.

+ Loi de Planck: $E_2 - E_1 = h\nu$

+ Loi de Boltzmann: $P_E = \alpha \cdot e^{\frac{-E}{kT}}$: probabilité de trouver une particule à l'état d'énergie E.

$$\begin{aligned} P_{E_2} &= N_2 = \alpha e^{\frac{-E_2}{kT}} \\ P_{E_1} &= N_1 = \alpha e^{\frac{-E_1}{kT}} \end{aligned} \rightarrow \frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{-E_2 + E_1}{kT}} \quad (1)$$

- Si $T \rightarrow \infty$; $N_2 \rightarrow 0$ → Tous les atomes sont à l'état E_1 .

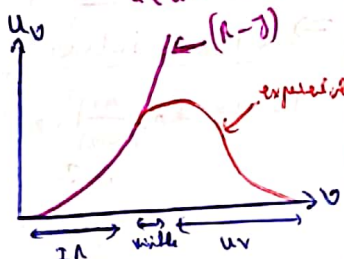
- Si $T \rightarrow 0$; $N_2 = N_1$ → Équation des atomes entre les 2 états

Conclusion: T ; $N_2 < N_1$.

* Catastrophe UV:

$$u_{em} = \frac{dN_{em}}{d\nu} \text{ et } u_{ab} = \frac{N_{ab}}{d\nu} \rightarrow u_{ab} = \frac{d^2 N_{em}}{d\nu d\nu} = \frac{I_{\nu}}{c}$$

• Pour les faibles fréquences, la courbe de Planck-Jean correspond à la courbe Rayleigh-Jeans
⇒ Catastrophe UV



I) Milieu Amplificateur et principe du laser:

1) Transitions multi-niveaux:

absorption	émission spontanée	émission stimulée
$O + h\nu \rightarrow O$ $E_1 \rightarrow E_2$	$O \rightarrow O + h\nu$ $E_2 \rightarrow E_1$	$O + h\nu \rightarrow O + h\nu$ $E_2 \rightarrow E_1$
$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{ab} = -N_2 B_{12} u_{\nu}$	$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{sp} = -N_2 A_{21}$	$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{st} = -N_2 B_{21} u_{\nu}$

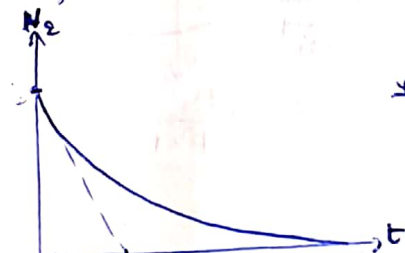
* Absorption: atome à l'état fondamental, excité par fréquence qui correspond à la transition de l'état $E_1 \rightarrow E_2$, se transforme à l'état E_2 .

* Émission stimulée: atome à l'état E_2 , sous l'impulsion de la lumière, passe à l'état E_1 en émettant une photon identique.

$$\text{Système fermé} \rightarrow \left(\frac{dN_2}{dt}\right) = -\left(\frac{dN_2}{dt}\right)$$

* Largeur naturelle de raie:

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{spont} = \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{spont} = -N_2 A \rightarrow N_2 = N_2(t=0) e^{-t/A}$$



τ : durée de vie de l'état excité.

$$\tau = \frac{1}{\Delta\nu} \rightarrow \Delta\nu = A \rightarrow \Delta t \Delta\nu \geq 1$$

2) Bilan de population:

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{spont} = -N_2 B_{12} u_{\nu} - N_2 A - N_2 B_{21} u_{\nu}$$

Énergie perdue: $\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{spont} = 0 \rightarrow$ probabilité d'ionisation une fois de Planck.

$$B_{12} = B_{21} = B; A = \frac{h\nu^3}{\pi^2 c^3} B$$

1) Comparaison des états:

Particule.	Principe laser.
$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{spont} = e^{\frac{-E_2}{kT}} - 1 \gg 1$ $\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{spont} \gg 1$ → l'émission spontanée est l'émission stimulée.	Dans la direction du laser, l'émission stimulée est plus importante que l'émission spontanée et incohérente. → l'émission stimulée est cohérente. → On ne s'occupe pas de l'émission spontanée.

II) Inversion de population:

1) Bilan d'énergie et équation de Beer-Lambert:

$$\Delta u(x) = u(x) \cdot dx = \frac{I(x)}{c} dx$$

* Bilan d'énergie entre x et $x+dx$:

$$\frac{d\Delta u(x)}{dx} = [I(x, t) - I(x+dx, t)] S + \left[\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{spont} + \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{st} - \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{ab} \right] h\nu S dx$$

$$\frac{dI(x)}{dx} S dx = -\frac{dI(x)}{dx} S dx + (m_2 B_{12} u_{\nu} - m_2 B_{21} u_{\nu}) h\nu S dx$$

$$\frac{1}{c} \frac{dI(x)}{dx} = -\frac{dI(x)}{dx} + \frac{m_2 - m_1}{c} B_{12} h\nu \cdot I(x)$$

$$\rightarrow \frac{1}{c} \frac{dI}{dx} + \frac{dI}{dx} - KI = 0 \quad (2) \quad \text{Eq Beer Lambert.}$$

$$\text{Si } N_2 = 0 \rightarrow \frac{dI}{dx} = 0 \rightarrow I(x) = I(x=0) e^{Kx} \quad (3)$$

• Valeur milieu, $m_2 < m_1 \rightarrow K < 0$.

• Pour que l'émission soit amplifiante $\rightarrow K > 0 \rightarrow$ nécessite l'inversion de population.

2) Inversion de population: (Kastler):

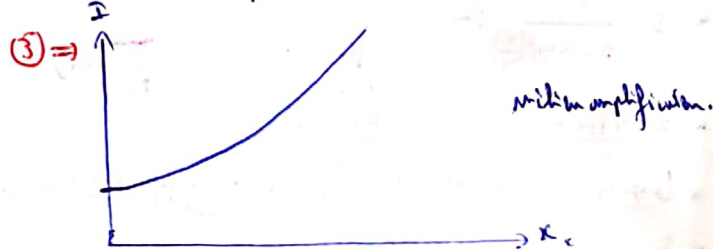
* Considère à faire intervenir un nouveau état d'énergie E_3 celui de He:

① les atomes He passent de $E_0 \rightarrow E_3$ par pompage électronique.

② les atomes He relaxent vers E_2 par transition collisionnelle.

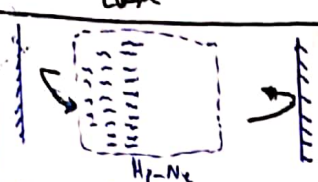
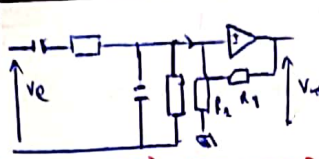
③ l'émission spontanée se décale des raies stimulées et on obtient l'inversion laser incohérente et cohérente.

⇒ En dehors de l'équilibre: $m_2 > m_1 \rightarrow K > 0 \rightarrow I(x) \uparrow$



I) Cavité laser:

1) Analogie Laser - Oscillateur Wm:

Laser	Electronique
 $\vec{E}(x,t) = \vec{E}_1(x,t) + \vec{E}_2(x,t)$ $= E_0 e^{i(\omega t - kx)} - E_0 e^{i(\omega t - kx)}$ $= 2E_0 e^{i\omega t} \sin(kx)$ $\vec{E}(x,t) = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx)$ $F(x,t) = 2Vt \sin(kx) = 0$ $E(x,t) = 0$ $\Rightarrow f_m = \frac{nc}{\epsilon l}$ A. $H(\omega) = 1$	 Filtrage $H(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\omega(\frac{L}{R} - \frac{C}{R})}$ (Filtrage) Amplification $V_n = \frac{0 + \frac{V_0}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{V_0}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$ AOI $V_p = V^+ = V^- = V_n$ $\Rightarrow$ AO non inverseur: $G = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ $H(\omega) = H(\omega) G$ Boucle $V_0 = V_n$ $\rightarrow H(\omega) \cdot G = 1$: condition de l'oscill.
Amplificateur	Emmission stimulée
Filtre	Cavité optique "Filtre interférentiel"
Bouclage	Miroirs de la cavité
Source d'énergie	Pompe
	Amplification inverseur.
	Filtre passe bande de Wm.
	retro-action.
	Alimentation AO $\pm 5V$

2) Les miroirs de la cavité: Filtre interférentiel:

• Rôle de cavité: Sélection des fréquences qui peuvent être "filtrées".

• Causes des pertes de la cavité:

• Sortie du faisceau laser.

• Absorption de l'énergie par effet Joule $\rightarrow$ unidirectionnel de l'onde.

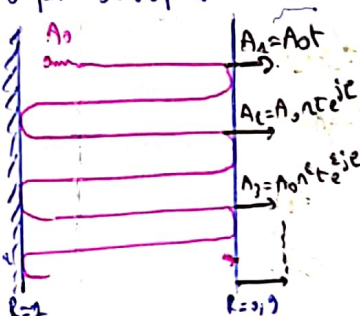
• Le miroir et l'amplification $\rightarrow$ compensation des pertes.

$$\rho = \frac{\epsilon \pi}{\lambda} \delta = \frac{4\pi}{\lambda} e$$

$$A = A_1 + \dots + A_n$$

$$\rightarrow A = A_{ot} \cdot \frac{1}{1 - \rho e^{i\delta}}$$

$$I = \frac{I_0}{1 + \tan^2(\frac{\delta}{4})} ; m = \frac{4\pi}{(2\pi)} e$$

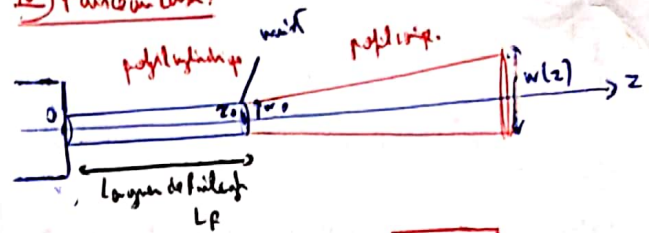


II) L'onde se propage dans la cavité: $\frac{A_2}{A_1} > 1$.

$$\text{Longueur d'onde } \rho(\lambda) = \frac{4\pi}{\lambda} e \Rightarrow d\rho = -\frac{4\pi e}{\lambda^2} d\lambda \Rightarrow d\lambda = -\frac{4\pi e}{\lambda^2} d\rho$$

$$\text{Facteur de finesse } \delta = \frac{v_0}{\Delta v} = \frac{\pi \sqrt{\lambda}}{\lambda - \lambda}$$

II) Faisceau laser:



Largeur de faisceau: $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}$

- Si $z \ll z_0 \rightarrow w(z) \approx w_0$: profil cylindrique.

- Si $z \gg z_0 \rightarrow w(z) \approx \frac{w_0}{z_0} z$: profil conique.

1) Propriétés du faisceau laser:

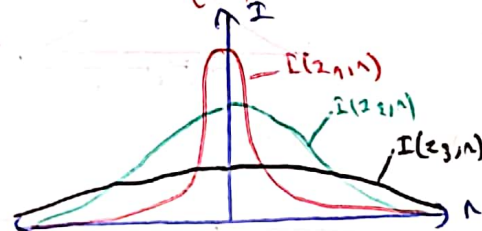
• $z = z_0$: Autodiffraction d'angle: $\alpha = \frac{\lambda}{2w_0}$

• α est l'angle de divergence du faisceau laser.

• Origine de l'émission: Diffraction par son propre bord.

2) Intensité du faisceau laser:

$$I(z, r) = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2 e^{-\frac{2r^2}{w(z)^2}} \rightarrow \text{profil Gaussien.}$$



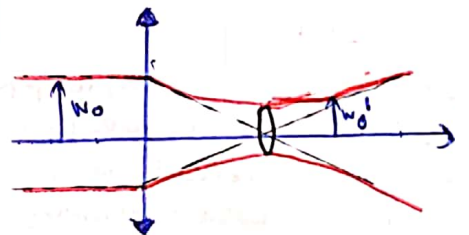
• Plus on s'éloigne de la source, plus le faisceau se dilate, plus il est large.

3) Focalisation du faisceau laser:

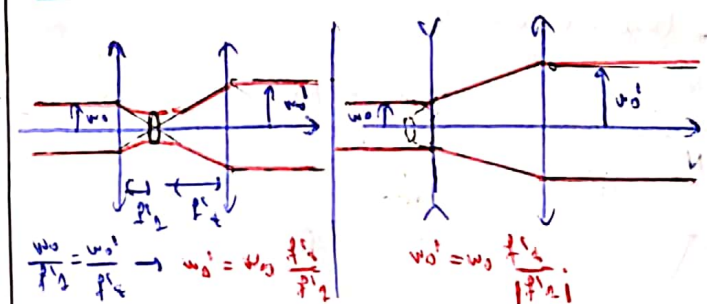
$$\tan \theta = \theta = \frac{w_0}{f}$$

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

$$\Rightarrow w_0^2 = \frac{\lambda f}{\pi}$$



3) Élargissement du faisceau laser:



4) Intensité du faisceau laser:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi w^2}$$

• P est la puissance du faisceau laser, A est la surface du faisceau laser.

$\Rightarrow$ on obtient un faisceau laser amplifié et polarisé.

15) Thermodynamique.

- les phénomènes de diffusion tendent à uniformiser la Température, la viscosité et les potentiels
- Analogie électrique - Thermodynamique:

Conductivité électrique	Diffusion de particules	Diffusion thermique
Charge électrique	Particules	Chaleur.
Variation de potentiel électrique V	Variation de concentration de particules m^*	Variation de température entre 2 points T
Conductivité électrique σ	Diffusivité des particules D	Conductivité thermique λ
Adm: $\vec{J} = -\sigma \nabla V$	Fick: $\vec{J}_D = -D \nabla n^*$	Fourier: $\vec{J}_\alpha = -\lambda \nabla T$

I) Diffusion des particules:

1) Expression:

$$\delta N(t) = m^*(n, t) \cdot d\mathcal{E} ; \quad \Phi(t) = \frac{dN(t)}{dt} = \|\vec{J}_D\| \cdot S \quad (1)$$

$$\frac{N(t)}{N_A} = m^*(n, t) ; \quad \vec{J}_D = m^*(n, t) \cdot \vec{V}'(n, t)$$

* Loi de Fick: $\vec{J}_D = -D \nabla n^*(n, t)$

$$[m^*] = L^{-3} ; [\vec{J}_D] = T^{-1} L^{-2} ; [D] = T^{-1} L^2$$

2) Equation de diffusion:

a) A 1 dimension: (poireux)

- Considérons une tige poireux, avec production / absorption:

* Bilan entre x et $x+dx$:

$$\frac{d\delta N(t)}{dt} = \phi(x, t) - \phi(x+dx, t) - \phi_L(n, t) + p \cdot dx$$

$$\frac{\delta n^*(x, t)}{\delta t} \cdot S dx = -\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} dx - J_L(n, t) \cdot S_{1,2} + p \cdot S dx$$

$$\frac{\delta n^*(x, t)}{\delta t} \cdot S dx = D \frac{\partial^2 n^*(x, t)}{\partial x^2} S dx - J_L(n, t) \cdot 2\pi R \cdot dx + p \cdot S dx$$

$$\rightarrow \frac{\partial n^*}{\partial t} - D \frac{\partial^2 n^*(x, t)}{\partial x^2} - p = -\frac{2}{R} J_L \quad (2)$$

* Si $J_L = 0$: tige non poireux

* Si $p = 0$: pas de production / absorption.

* En remplaçant: $D \frac{\partial^2 n^*}{\partial x^2}$ par $\frac{\partial \vec{J}_D}{\partial x}$ on retrouve l'équation de conservation de nombre de particules.

b) A 3 dimensions: (non poireux)

- Le nombre de particules n conserve:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(\frac{dN(t)}{dt} \right) - \left(\frac{dN(t)}{dt} \right) \Leftrightarrow \iiint \frac{\partial n^*}{\partial t} d\mathcal{E} = \iiint p d\mathcal{E} - \iint \vec{J}_D \cdot d\vec{S}$$

$$\rightarrow \frac{\partial n^*}{\partial t} - D \Delta n^*(n, t) - p = 0$$

3) Interprétation microscopique de diffusion:

- Elle est due à des chocs inter-particules.

→ la diffusion est due à des chocs (desirets)

$$J = \epsilon \cdot V$$

* J : les particules moyennes (distance 2 chocs)
en J , chocs doit être 1 choc.

* V : $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$: vitesse quadratique moyenne

* Bilan: Analogie Thermodynamique - Fluide.

Mécanique des Fluides	Thermodynamique
Variation de quantité de particules n dans dV : $dP = \frac{1}{6} n S dm [V(y, t) - V(y+dy, t)]$ $\frac{dP}{dt} = \frac{1}{6} n S dm \left[V + \frac{\partial V}{\partial y} dy - V + \frac{\partial V}{\partial y} dy \right]$ $= \frac{1}{3} n S dm \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{3} n S dm \frac{\partial V}{\partial y} u dt$ $\rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{1}{3} n S dm u \cdot \frac{\partial V}{\partial y}$ Expres: $\vec{J}_V = \eta \cdot S \frac{\partial V}{\partial y}$ $\rightarrow \eta = \frac{1}{3} n m l m u$	Variation de quantité de particules n dans dV : $dN = \frac{1}{6} S V dt [n(x, t) - n(x+dx, t)]$ $\frac{dN}{dt} = \frac{1}{6} S V dt \left[n - \frac{\partial n}{\partial x} dx - n + \frac{\partial n}{\partial x} dx \right]$ $= -\frac{1}{3} S V dt \frac{\partial n}{\partial x}$ $\rightarrow \frac{dN}{dt} = -\frac{1}{3} S V \frac{\partial n}{\partial x} = J_D$ Loi de Fick: $\vec{J}_D = -D \nabla n^*(n, t)$ $\rightarrow D = \frac{1}{3} l V$

* Théorème d'équipartition d'énergie:

$$1 \text{ ddl} \rightarrow \frac{1}{2} kT \quad \text{donc } 3 \text{ ddl} \rightarrow \frac{3}{2} kT$$

$$\text{donc: } \frac{1}{2} m \overline{V^2} = \frac{3}{2} kT \Rightarrow \overline{V} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \Rightarrow D = f(T)$$

* D dépend de T , nature du fluide et type d'écoulement

II) Diffusion thermique:

1) Expression:

$$\delta U(t) = \int S dx \cdot c dT$$

1^{er} principe thermodynamique: $dU(t) = \delta W + \delta Q \quad (d\mathcal{E} = 0)$

$$\Rightarrow \frac{d\delta U(t)}{dt} = \frac{\delta Q}{\delta t} = \int S dx \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

* Loi de Fourier: $\vec{J}_{th} = -\lambda \nabla T(T(n, t))$: isothermes

* Loi de Newton: $\vec{J}_{cc} = h (T(x, t) - T_p)$: convection

2) Equation de diffusion avec convection et production:

* Bilan entre x et $x+dx$:

$$\frac{d\delta U(t)}{dt} = \phi(x, t) - \phi(x+dx, t) - \phi_{cc} + p d\mathcal{E}$$

$$\int c \frac{\partial T}{\partial t} S dx = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} S dx - J_{cc} \cdot 2\pi R dx + p \cdot S dx$$

$$\rightarrow \int c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T(n, t)}{\partial x^2} - p = -\frac{2}{R} J_{cc} \quad (4)$$

3) Conditions aux limites:

ad - ad

* Conservation de flux:

$$\Phi_{\text{ch}}(x=x_0, t) = \Phi_{\text{cc}}(x=x_0, t)$$

* Continuité de Température:

$$T(x=x_0, t) = T(x=x_0, t); \forall t$$

ad - fd

* Conservation de flux:

$$\Phi_{\text{ch}}(x=x_0, t) = \Phi_{\text{cc}}(x=x_0, t)$$

$$-\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x = h S (T(x=x_0) - T_f)$$

4) Résistance thermique:

$$R_{\text{th}} = \frac{T_A - T_B}{\Phi_{\text{th}}}$$

* Analogie électrique: $\vec{j} = \sigma \vec{E} \rightarrow I = \sigma S E$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow V_A - V_B = EL$$

$$\Rightarrow R_e = \frac{L}{\sigma S}$$

$$\text{D'où: } R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S}$$

* Association des résistances:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{En série: } (R_{\text{eq}}) = \sum (R_{\text{th}}) \\ \text{En parallèle: } \left(\frac{1}{R_{\text{eq}}} \right) = \sum \left(\frac{1}{R_{\text{th}}} \right) \end{array} \right.$$

5) Rayonnement des corps noirs:

* Corps noir: Corps opaque qui absorbe tout rayonnement incident à la fréquence; $\Phi_i = \Phi_a$.

* Corps noir en équilibre radiatif: $\Phi_i = \Phi_a - \Phi_e$

* Vocabulaire:

① Flux:

* Φ_{ch} : Flux thermique rayonné.

* $\mathcal{E} = \frac{d\Phi_{\text{ch}}}{ds}$: densité de flux rayonné.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_\lambda = \frac{d\mathcal{E}}{d\lambda} \\ \mathcal{E}_\nu = \frac{d\mathcal{E}}{d\nu} \end{array} \right\} \quad \mathcal{E}_\lambda(\nu) = \mathcal{E}_\nu \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = \mathcal{E}_\nu \cdot \frac{c}{\lambda^2}$$

② Énergie:

* u : rayonnement.

* $u = \frac{du}{d\tau}$: densité d'énergie rayonnée.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\lambda = \frac{du}{d\lambda} \\ u_\nu = \frac{du}{d\nu} \end{array} \right\} \quad u_\lambda = u_\nu \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = u_\nu \cdot \frac{c}{\lambda^2}$$

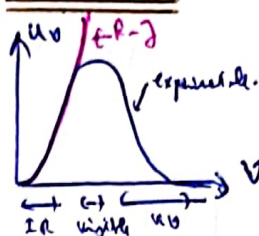
③ Relation Énergie - Flux:

$$\mathcal{E}_\lambda = \frac{c}{4} u_\lambda$$

④ Angle solide:

$$\Omega = \frac{S}{d^2}$$

② Loi de Planck:



• Pour les faibles fréquences, la loi de Planck s'accorde avec l'expérience.

• Pour les HF, c'est plus délicat.

$\Rightarrow$ catastrophe UV

$\Rightarrow$ nécessité de la MQ.

$$u_\nu(\nu) = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^3$$

$$u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$\approx \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^3 (\nu \ll \nu_0)$$

$$\approx \frac{8\pi h}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \nu^3$$

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathcal{E}_\nu d\nu = \dots \quad \mathcal{E} = 6T^4 \quad \text{Loi de Stefan}$$

* λ_m (correspondance de $u_\lambda \rightarrow \frac{du_\lambda}{d\lambda} = 0$)

$$\text{on pose } x = \frac{h\nu}{kT}$$

$$\rightarrow (5-x)e^x = 5 \quad \Rightarrow \quad \lambda_m T = 2898 \mu\text{m}\cdot\text{K} \quad \text{Loi de Wien}$$

② Rayonnement thermique (Effet serre):

$$\mathcal{E}_0 = 6T_s^4 \Leftrightarrow \frac{d\Phi_s}{ds} = \frac{dP_s}{ds} = 6T_s^4 \rightarrow P_s = 4\pi F_s \cdot 6T_s^4$$

puissance rayonnée
par la surface

$$\text{Puissance reçue par la terre: } P_{R,T} = P_s \cdot \frac{\Omega}{4\pi}$$

* À l'équilibre thermique: Flux partant = Flux incident.

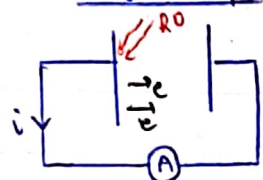
(16) Mécanique Quantique.

1) Introduction à la mécanique quantique:

1.1 Transfert des aspects ondulatoires et corpusculaires:

a) Aspect ondulatoire:

Photo-électrique.



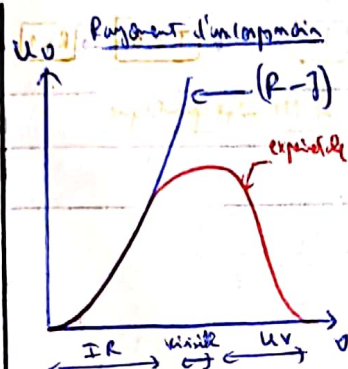
$$h\nu = W_{\text{ext}} + \frac{1}{2} m v^2$$

+ $h\nu < W_{\text{ext}} \rightarrow$ courant nul.

+ $h\nu > W_{\text{ext}} \rightarrow$ courant maximal.

$\Rightarrow$ A chaque onde de fréquence ν , on associe une particule d'énergie $h\nu$.

$\Rightarrow$ mise en évidence de la dualité de l'aspect corpusculaire de la lumière.



$\Rightarrow$ A chaque fréquence ν , on associe une quantité de mouvement $\vec{p}$ d'énergie $h\nu$.
 $\Rightarrow$ l'indépendance de la constante expérimentale h est la preuve de la dualité.

2) Equation de Schrödinger:

$$dP(M,t) = |\Psi(M,t)|^2 \cdot d\tau \quad (3)$$

$$\Psi(M,t) = |\Psi(M,t)|^2$$

$$[\Psi] = L^{-1/2} \Leftrightarrow [\Psi^2] = L^{-1}$$

+ dP : probabilité de présence de M en M , à t .

+ Ψ : densité de dP .

+ Ψ : amplitude de dP .

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \text{ opérateur de } E_m \rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E_m \Psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \text{ opérateur de } E_c \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta(\Psi) = E_c \Psi$$

$$V(M) \text{ opérateur de } E_p \rightarrow V(M) \cdot \Psi = E_p \Psi$$

$$\text{conservation d'énergie: } E_c + E_p = E$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \cdot \Psi \quad (I)$$

3) Etat stationnaire:

$$\text{Etat stationnaire} \Leftrightarrow \Psi(x,t) = \psi(x) \cdot f(t) \quad (4)$$

$$\text{Condition de normalisation: } \int_0^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1 \quad (5)$$

a) Définition de fonction du temps $f(t)$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \text{ opérateur de } E_m \Rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \Psi$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \psi(x) \frac{df}{dt} = E \psi(x) f(t) \rightarrow f(t) = f_0 e^{\frac{-iE}{\hbar} t} \quad (6)$$

b) Equation de Schrödinger indépendante du temps:

$$i\hbar \psi(x) \frac{df}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \cdot \psi(x)$$

$$\rightarrow \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \psi(x) = 0$$

+ cette équation admet une solution $\psi(x) = e^{ikx}$ d'après méthode de séparation des variables.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} i\hbar \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = E \psi(x) \Rightarrow E = \hbar^2 k^2 \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x) \end{array} \right. \quad (8)$$

II) Particule libre:

$$\text{particule libre} \Leftrightarrow V(x) = 0 \Leftrightarrow E = E_c \quad (9)$$

1) Fonction d'onde:

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} - E \psi(x) = 0 \rightarrow \psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

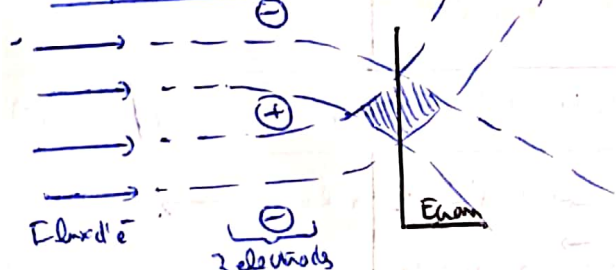
$$\Rightarrow \Psi(x,t) = \underbrace{A e^{-i(\omega t - kx)}}_{\text{incidente}} + \underbrace{B e^{-i(\omega t + kx)}}_{\text{reflète}}$$

$$\int |\Psi(x,t)|^2 dx \neq 1 \Rightarrow \Psi \text{ ne peut pas représenter une particule quantique.}$$

$\Rightarrow$ nécessité de paquet d'onde.

b) Aspect corpusculaire:

= Interférence électronique: Répertoire de Fresnel.



$\Rightarrow$ l'électron montre une figure d'interférence.

$\Rightarrow$ On doit associer à chaque e^- une onde pour interpréter l'interférence.

$\rightarrow$ Mise en évidence d'Hypothèse de De Broglie.

c) Dualité onde-particule:

$$\left(E, \vec{p} \right) \Leftrightarrow \left(\hbar \omega, \hbar \vec{k} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E = \hbar \omega \\ \vec{p} = \hbar \vec{k} \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{\hbar}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda_{dB} = \frac{h}{p} \quad (11)$$

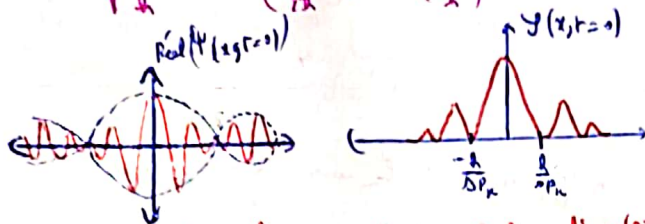
d) Transfert du traitement classique:

$$m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \rightarrow p = m \cdot v \Rightarrow \lambda_{dB} = \frac{h}{p} \approx 10^{-10} \text{ m}$$

$\Rightarrow$ les effets quantiques d'une masse sont visibles si λ_{dB} est de même ordre de grandeur que les dimensions des problèmes.

I) Équation de Schrödinger

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{\Delta p_x}{h}} \sin\left(\frac{\Delta p_x \cdot x}{h}\right) \cos\left(\frac{E}{h}\right)$$

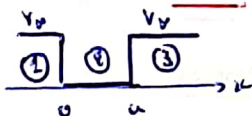


⇒ le paquet d'onde donne la localisation de particule m l'axe (Ox)
⇒ l'incertitude plus petite et x=0.

• Équation de Heisenberg: $\Delta p_x \Delta x \geq \frac{h}{2}$ (IV)

→ on ne peut pas attribuer à la particule position et quantité de mouvement.

II) Puits de potentiel:



$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + V_0 \psi_1 = E \psi_1 \Rightarrow \psi_1 = 0 & (1) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + 0 = E \psi_2 & (2) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_3}{dx^2} + V_0 \psi_3 = E \psi_3 \Rightarrow \psi_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

(2) ⇒ $\psi_2(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$; $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ (3)

$$\psi_2(x=0) = \psi_1(x=0) \text{ et } \psi_2(x=a) = \psi_3(x=a)$$

$$\Rightarrow \psi_2(x) = A \sin(kx)$$

$$\psi_2(x=a) = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{n\pi}{a} \text{ et } E_n = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \psi_2(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$\int_0^a |\psi_2|^2 dx = 1 \Rightarrow \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (5)$$

• Relation de dispersion: $E = \hbar \omega$, et $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

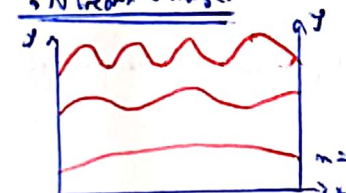
$$\Rightarrow \omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad (10) \Rightarrow \text{non linéaire} \Rightarrow \text{dispersion}$$

$$v_g = \frac{\omega}{k} \Rightarrow v_g = \frac{\hbar k}{2m} \quad (11) = f(k) \Rightarrow \text{dispersion}$$

$$v_p = \frac{d\omega(k)}{dk} \Rightarrow v_p = \frac{\hbar k}{m} \quad (12)$$

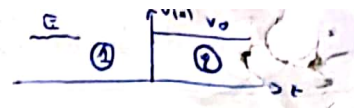
$$v_g = \frac{p}{m} = v_p = \text{vitesse de particule}$$

• Niveaux d'énergie:



pour n=1: niveau fondamental
pour n>1: niveaux excités

III) Marche de potentiel:



a) Comportements:

b) Mécanique classique: Conservation de E = $\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + V_0$

$E < V_0$	$E > V_0$
$\frac{1}{2} m v_1^2 = E - V_0 < 0$; onde	$v_2 < v_1$
$R=1$ avec vitesse opposée.	$\Rightarrow T=1$ avec vitesse plus lente.

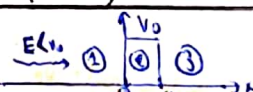
b) Mécanique quantique:

$E < V_0$	$E > V_0$
$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_1 = 0 \\ \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} - \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2} \psi_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \psi_1 = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \\ \psi_2 = A_2 e^{-\beta x} + B_2 e^{\beta x} \end{cases}$ • Condition aux limites: $B_2 = 0$ • Rayon de réflexion $R=0$: $\begin{cases} R = \frac{A_1}{A_2} = \frac{2k_2}{k_2 + i\beta} \\ R = \frac{B_1}{A_2} = \frac{k_2 - i\beta}{k_2 + i\beta} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_1 = 0 \\ \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} \psi_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \psi_1 = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \\ \psi_2 = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \end{cases}$ • Condition aux limites: $B_2 = 0$ • Rayon de réflexion $R=0$: $\begin{cases} R = \frac{A_1}{A_2} = \frac{2k_2}{k_2 + k_1} \\ R = \frac{B_1}{A_2} = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} \end{cases}$

$$\vec{j} = \Psi \vec{\nabla} \Psi = |\Psi|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$$

$R = \frac{j_R}{j_i} \rightarrow R = \frac{ j_R ^2}{ j_i ^2} = 1$ $E < V_0$: onde évanescente $T=0$ $R=1$ $T=0$	$R = \frac{j_R}{j_i} \rightarrow R = r ^2$ $E > V_0$: onde transmise $T=1$ $T = \frac{j_t}{j_i} \rightarrow T = t ^2 \frac{k_2}{k_1}$ $R \text{ et } T \neq 1$
--	--

IV) Effet Tunnel:



$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + k^2 \psi_1 = 0 \\ \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} - \beta^2 \psi_2 = 0 \\ \frac{d^2 \psi_3}{dx^2} + k^2 \psi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \\ \psi_2 = A_2 e^{-\beta x} + B_2 e^{\beta x} \\ \psi_3 = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx} \end{cases}$$

• Conditions aux limites:

$$\begin{cases} \psi_1(x=0) = \psi_2(x=0) \\ \psi_2(x=a) = \psi_3(x=a) \\ \psi_1'(x=0) = \psi_2'(x=0) \\ \psi_2'(x=a) = \psi_3'(x=a) \end{cases}$$

$$T = |t|^2 \frac{k}{k_1} \rightarrow T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} \sinh^2(\beta a)} \neq 0$$

pour $\beta \gg 1$ } $T \rightarrow 0$ (on n'arrive pas à traverser)
pour $\beta \ll 1$ } $T \rightarrow 1$ (on arrive à traverser)

• Approximation: $\beta a \gg 1 \Rightarrow T = \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2} e^{-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0-E)}}$