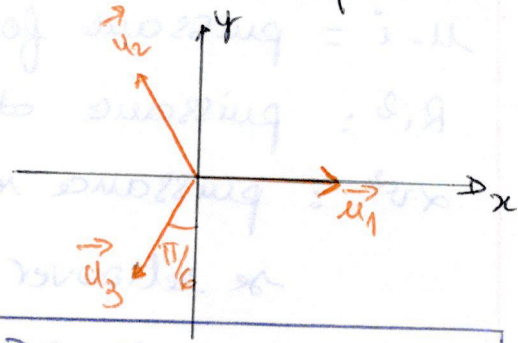


Exercice 4: Principe du moteur asynchrone

I/Stator de la machine asynchrone : production d'un champ tournant

$$1) \vec{B}(\theta, t) = \vec{B}_1(\theta, t) + \vec{B}_2(\theta, t) + \vec{B}_3(\theta, t)$$

$$= k i_1(t) \vec{u}_1 + k i_2(t) \vec{u}_2 + k i_3(t) \vec{u}_3$$



$$\vec{B}(\theta, t) = k I_m [\cos(\omega_s t) \vec{u}_n + \cos(\omega_s t - 2\pi/3) \cdot$$

$$(-\frac{1}{2} \vec{u}_n + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_y) + \cos(\omega_s t + 2\pi/3) (-\frac{1}{2} \vec{u}_n - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_y)]$$

$$\vec{B}(\theta, t) = k I_m [\cos(\omega_s t) - \frac{1}{2} (\cos(\omega_s t - 2\pi/3) + \cos(\omega_s t + 2\pi/3))] \vec{u}_n + k I_m \frac{\sqrt{3}}{2} [\cos(\omega_s t - 2\pi/3) - \cos(\omega_s t + 2\pi/3)] \vec{u}_y$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{u}_n \\ \vec{u}_2 &= -\sin \pi/6 \vec{u}_n + \cos \pi/6 \vec{u}_y \\ \vec{u}_3 &= -\sin \pi/6 \vec{u}_n - \cos \pi/6 \vec{u}_y \end{aligned}$$

$$\sin \pi/6 = 1/2 ; \cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$$

$$\text{or } \cos(a-b) + \cos(a+b) = 2 \cos a \cdot \cos b$$

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \cdot \sin b$$

$$\vec{B}(\theta, t) = k I_m [\cos(\omega_s t) - \cos(\omega_s t) \cdot \cos 2\pi/3] \vec{u}_n + k I_m \sqrt{3} \sin(\omega_s t) \sin 2\pi/3 \vec{u}_y$$

$$\text{or } \cos 2\pi/3 = -1/2 ; \sin 2\pi/3 = \sqrt{3}/2$$

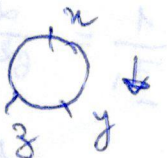
$$\vec{B}(\theta, t) = k I_m [(1 - (-1/2)) \cos(\omega_s t)] \vec{u}_n + k I_m \frac{3}{2} \sin(\omega_s t) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}(\theta, t) = \frac{3}{2} k I_m [\cos(\omega_s t) \vec{u}_n + \sin(\omega_s t) \vec{u}_y]$$

$$B_n = \frac{3}{2} k I_m \cos(\omega_s t) ; B_y = \frac{3}{2} k I_m \sin(\omega_s t) \Rightarrow \|\vec{B}\| = B = \frac{3}{2} k I_m$$

2) 1^{er} méthode

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{3}{2} k I_m [-\omega_s \sin(\omega_s t) \vec{u}_n + \omega_s \cos(\omega_s t) \vec{u}_y]$$



$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \omega_s \vec{u}_z \wedge \vec{B} \rightarrow \vec{B} \text{ est en champ tournant avec la vitesse angulaire } \vec{\omega}_s = \omega_s \vec{u}_z$$

2^{ème} méthode

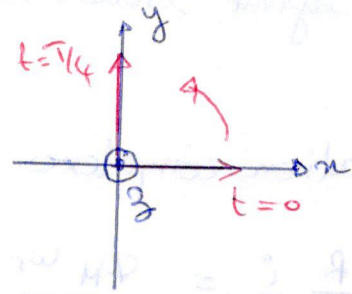
$$\vec{B} = B [\cos(\omega_s t) \vec{u}_x + \sin(\omega_s t) \vec{u}_y]$$

$$\text{à } t=0 \rightarrow \omega_s t = 0 \rightarrow \vec{B} = B \vec{u}_x$$

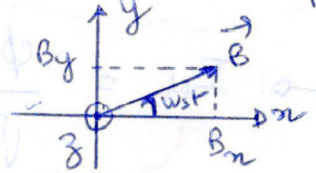
$$\text{à } t=T/4 \rightarrow \omega_s t = \pi/2 \rightarrow \vec{B} = B \vec{u}_y$$

$\rightarrow \vec{B}$ est un champ tournant à la vitesse angulaire

$$\vec{\omega}_s = \omega_s \vec{u}_z$$



3^{ème} méthode : l'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{u}_x$ varie linéairement dans le temps de plus $\|\vec{B}\| = \text{est}$ $\rightarrow \vec{B}$ est un champ tournant à la vitesse angulaire ω_s .



on a $f = 50 \text{ Hz} = \text{nb de tour / s} \rightarrow \text{nb de tour / min} = 50 \times 60$

$$N = 3000 \text{ tr/min}$$

II/Entraînement du rotor de la machine asynchrone

$$3) \phi = \iint_{\text{cadre}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint \vec{B} \cdot N d\vec{S} = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S \cos(\vec{B}, \vec{n})$$

$$\phi = NBS \cos((\omega_s - \omega)t)$$

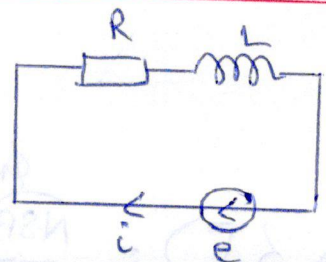
$$4) \omega_r = \omega_s - \omega ; \phi_M = NBS \Rightarrow \phi(t) = \phi_M \cos \omega_r t$$

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \phi_M \omega_r \sin(\omega_r t) = \phi_M \omega_r \cos(\omega_r t - \pi/2)$$

5-a) schéma électrique équivalent du cadre.

$$\text{loi des mailles : } e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{\phi_M \omega_r}{L} \cos(\omega_r t - \pi/2)$$



5-b/ en régime sinusoïdal forcé : $i(t) = I_M \sin(\omega t - \psi)$

$$i(t) = I_M \cos(\omega t - \pi/2 - \psi)$$

en notation complexe $\underline{i} = I_M \exp j(\omega t - \pi/2 - \psi)$

$$\frac{d\underline{i}}{dt} + \frac{R}{L} \underline{i} = \frac{\phi_M \omega r}{L} e^{j(\omega t - \pi/2)}$$

$$j\omega \underline{i} + \frac{R}{L} \underline{i} = \frac{\phi_M \omega r}{L} e^{j(\omega t - \pi/2)} \Rightarrow \underline{i} = \frac{\phi_M \omega r}{R + jL\omega} e^{j(\omega t - \pi/2)}$$

$$I_M e^{j(\omega t - \pi/2)} e^{-j\psi}$$

$$\rightarrow I_M e^{-j\psi} = \frac{\phi_M \omega r}{R + jL\omega}$$

$$\rightarrow I_M = \frac{\phi_M \omega r}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\text{et } -\psi = -\arg(R + jL\omega)$$

$$\rightarrow \psi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

III/ Couple électromagnétique

6°) $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{m} = Ni\vec{S} = NiS \cdot \vec{n}$; $\vec{n} = \cos\omega t \vec{u}_x + \sin\omega t \vec{u}_y$

$$\vec{\Gamma} = \|\vec{m}\| \cdot \|\vec{B}\| \sin(\vec{m} \wedge \vec{B}) \vec{u}_z$$

$$= NiSB \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

7°) $\langle \underline{a} \cdot \underline{b} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{a} \cdot \underline{b}^*)$

$$\langle \Gamma \rangle = NSB \langle i(t) \cdot \sin \omega t \rangle = NSB \langle I_M \sin(\omega t - \psi) \cdot \sin \omega t \rangle$$

$$\langle \sin(\omega t - \psi) \cdot \sin \omega t \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e^{j(\omega t - \pi/2 - \psi)} \cdot e^{-j(\omega t - \pi/2)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cos \psi \text{ or } \psi = \arg(R + jL\omega)$$

$$\rightarrow \cos \psi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\rightarrow \langle \Gamma \rangle = \frac{NSB \cdot I_M}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} = \frac{\phi_M^2 R \omega r}{2(R^2 + (L\omega)^2)} = \frac{\phi_M^2}{2L} \frac{\omega r L R}{(R^2 + (L\omega)^2)}$$

$$= \Gamma_{em}$$

8/ a) lorsque le moteur est à l'arrêt $\omega = 0 \rightarrow g = 1$

b) lorsque le moteur tourne à la vitesse angulaire de synchronisme ($\omega = \omega_s$) $\Rightarrow g = 0$

$$\left. \begin{aligned} 9) \quad \Gamma_{em} &= \frac{\Phi_m^2}{2L} \frac{\omega_r R L}{R^2 + L^2 \omega_r^2} \\ \Gamma_0 &= \frac{\Phi_m^2}{2L} ; g \doteq \frac{\omega_r}{\omega_s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Gamma_{em} = \frac{\Gamma_0 R g (L \omega_s)}{R^2 + (L \omega_s)^2 g^2}$$

10) Au démarrage du moteur ($\omega = 0 \rightarrow g = 1$) $\rightarrow \Gamma_{em} = \Gamma_d = \frac{\Gamma_0 R (L \omega_s)}{R^2 + (L \omega_s)^2}$

11) $\Gamma_{em}(g)$ admet un max lorsque $\frac{d\Gamma_{em}}{dg} = 0$

$$\text{or } \Gamma_{em} = \text{cst} \times \frac{g}{R^2 + (L \omega_s)^2 g^2} \rightarrow \frac{d\Gamma_{em}}{dg} = 0 \rightarrow$$

$$(R^2 + (L \omega_s)^2 g^2) \times 1 - 2g \cdot (L \omega_s)^2 \cdot g = 0 \rightarrow g^2 = \left(\frac{R}{L \omega_s}\right)^2$$

$$\text{or } g > 0 \text{ car } 0 \leq \omega \leq \omega_s \rightarrow g_{\max} = \frac{R}{L \omega_s}$$

$$\Gamma_{\max} = \frac{\Gamma_0 R (L \omega_s) \cdot \frac{R}{L \omega_s}}{R^2 + (L \omega_s)^2 \left(\frac{R}{L \omega_s}\right)^2} \rightarrow \Gamma_{\max} = \frac{\Gamma_0}{2}$$

12-a) on a $\Gamma_d = \frac{\Gamma_0 R L \omega_s}{R^2 + (L \omega_s)^2} = \frac{100 \times 4 \times 40}{4^2 + (40)^2} \rightarrow \Gamma_d = 9,9 \text{ N.m}$

$$g_{\max} = \frac{R}{L \omega_s} = \frac{4}{40} \rightarrow g_{\max} = 0,1$$

$$\Gamma_{\max} = \frac{\Gamma_0}{2} \rightarrow \Gamma_{\max} = 50 \text{ N.m}$$

12-b) on a $g_{\max} = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} = 0,1 \rightarrow 0,1 \omega_s = \omega_s - \omega \rightarrow \omega = 0,9 \omega_s$
or $n \propto \omega \rightarrow n = 0,9 n_s = 0,9 \times 3000 \Rightarrow n = 2700 \text{ tr/min}$

12-c) on a I est sinusoïdale $\rightarrow I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} = \frac{\Phi_M \cdot \omega_r}{\sqrt{2} \sqrt{R^2 + L^2 \omega_r^2}}$

or $\omega_r = g \omega_s$ et $\Gamma_0 = \frac{\Phi_M^2}{2L} \rightarrow \Phi_M = \sqrt{2L\Gamma_0}$

$\rightarrow I_{eff} = \frac{\sqrt{2L\Gamma_0} \cdot g \omega_s}{\sqrt{2} \sqrt{R^2 + L^2 \omega_s^2 g^2}}$

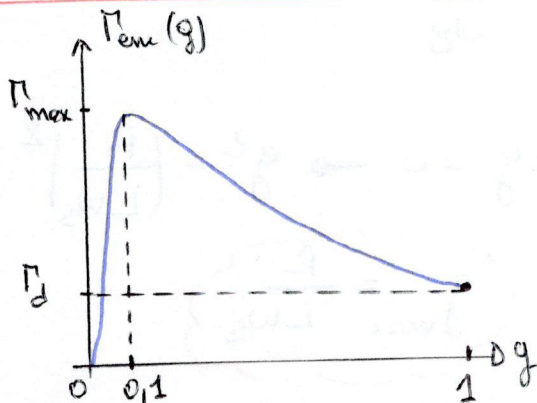
$I_{Reff} = I_{eff} \text{ pour } g = g_{max} = \frac{R}{L \omega_s}$

$\rightarrow I_{Reff} = \frac{\sqrt{L\Gamma_0} \cdot \frac{R}{L \omega_s}}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_s^2 \cdot \frac{R^2}{L^2 \omega_s^2}}} = \frac{R \sqrt{\frac{\Gamma_0}{L}}}{\sqrt{2} R} = \sqrt{\frac{\Gamma_0}{2L}}$

or on ne connaît que $L \omega_s \rightarrow I_{Reff} = \sqrt{\frac{\Gamma_0 \omega_s}{2L \omega_s}} = \sqrt{\frac{\Gamma_0 \cdot 2\pi f}{2L \omega_s}}$

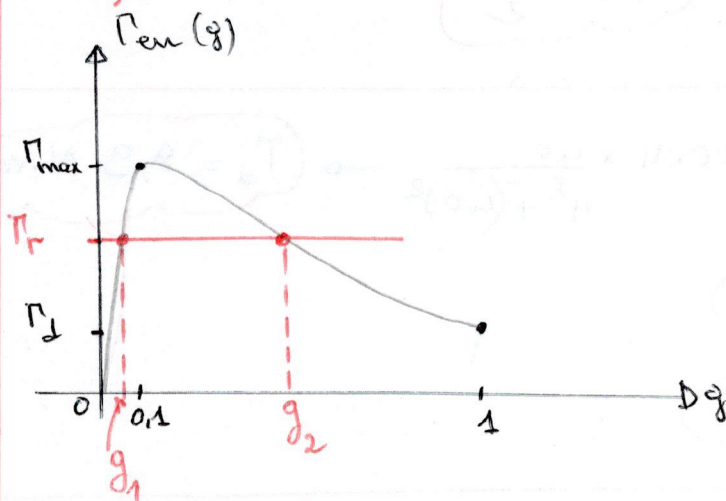
$\rightarrow I_{Reff} = \sqrt{\frac{100 \times \pi \times 50}{40}} \approx 20 \text{ A}$

13)



14-a) Si $\Gamma_r > \Gamma_d \rightarrow$ le moteur ne démarre pas (le couple Γ_d n'est pas suffisant)

14-b)



par définition le pt de fonctionnement d'un système technique correspond au régime permanent c.à.d lorsque le couple fourni par le moteur est équilibré par le couple résistant.

L'intersect° de la courbe $\Gamma_{em}(g)$ avec Γ_r donne 2 pts g_1 et g_2 or $g = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \rightarrow$ 2 vitesses de rotation du rotor ω_1 et ω_2

14-c) mut de rotation $\rightarrow$ TMC

$$J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\Gamma}_{em} + \vec{\Gamma}_r \rightarrow J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{em} - \Gamma_r$$

e) pour $g = g_1 \rightarrow \omega = \omega_1$. si on fait croître légèrement $\omega \rightarrow g = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \downarrow$, d'après la courbe $\Gamma_{em} < \Gamma_r \rightarrow \frac{d\omega}{dt} < 0 \rightarrow \omega \downarrow \Rightarrow \omega = \omega_1$ est un pt de fonctionnement stable. ($\downarrow$)

e) pour $g = g_2 \rightarrow \omega = \omega_2$. si on fait croître légèrement $\omega \rightarrow g \downarrow$, d'après la courbe $\Gamma_{em} > \Gamma_r \rightarrow \frac{d\omega}{dt} > 0 \rightarrow \omega \uparrow \Rightarrow \omega = \omega_2$ est un pt de fonctionnement instable. ($\uparrow$)

14-d) $\Gamma_d = \Gamma_0 R \frac{L\omega_s}{R^2 + (L\omega_s)^2} = 100 \times 8 \times \frac{40}{8^2 + 40^2} = 19,23 \text{ N.m}$

IV/ Puissance et rendement

15] $P_{mec} = \Gamma_{em} \cdot \omega = \Gamma_0 R \frac{(L\omega_s)g}{R^2 + (L\omega_s)^2 g^2} \cdot \omega$

or $\omega_r = g\omega_s \rightarrow P_{mec} = \frac{\Gamma_0 R L \omega_r \cdot \omega}{R^2 + L^2 \omega_r^2}$

$$P_j = \langle R i^2 \rangle = R \langle i^2 \rangle = R I_{eff}^2 = R \frac{I_M^2}{2}$$

$$= \frac{R}{2} \cdot \frac{\phi_M^2 \omega_r^2}{R^2 + L^2 \omega_r^2}$$

or $\Gamma_0 = \frac{\phi_M^2}{2L} \rightarrow \phi_M^2 = 2L\Gamma_0$

$\rightarrow P_j = \frac{\Gamma_0 R L \omega_r^2}{R^2 + L^2 \omega_r^2} = \frac{\omega_r}{\omega} \cdot P_{mec}$

16) $P_{em} = P_{mec} + P_j \rightarrow \eta = \frac{P_{mec}}{P_{em}} = \frac{1}{1 + P_j/P_{mec}} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_r}{\omega}} = \frac{\omega}{\omega + \omega_r}$

or $\omega_r = \omega_s - \omega \rightarrow \eta = \frac{\omega}{\omega + \omega_s - \omega} = \frac{\omega}{\omega_s} = \eta$

17) $g = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} = 1 - \frac{\omega}{\omega_s} = 1 - \eta \rightarrow \eta = 1 - g$

AN: $\eta = 0,95$