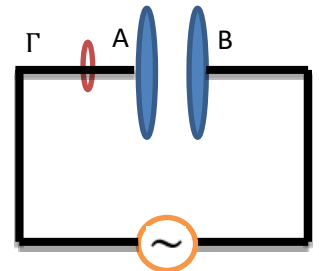


TD3 : Equations de Maxwell et bilan d'énergie

Exercice 1 : courant de déplacement

Un condensateur plan est constitué de deux disques métalliques A et B parallèles, d'axe Oz , de surface S , séparés par le vide. On choisit l'origine des coordonnées au milieu des armatures, l'armature A étant située en $z < 0$. Les armatures sont reliées par l'intermédiaire d'un fil conducteur, à un générateur fournissant une tension sinusoïdale de pulsation ω . La densité surfacique de charges sur l'armature A est $\sigma(t)$, celle de l'armature B est $-\sigma(t)$, où $\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t)$ avec $\sigma_0 > 0$.

- 1- On ne tient pas compte de l'effets de bords (le champ électrique se calcule comme si les disques avaient des rayons infinis)
 - a- Etudier les symétries pour indiquer la direction du champ électrique entre les armatures.
 - b- Donner l'expression de ce champ sachant qu'un conducteur infini portant une densité surfacique de charge σ crée un champ électrique dont le module est égal à $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.
- 2-
 - a- Utiliser l'expression de la charge de l'armature A pour établir celle de l'intensité $I(t)$ du courant dans le fil, en fonction de σ_0 , ω et S .
 - b- Indiquer le sens du courant à l'instant t tel que $0 < t < \frac{\pi}{2\omega}$.
- 3-
 - a- Montrer qu'une densité volumique de courant de déplacement existe entre les armatures, et donner son expression en fonction de σ_0 , ω .
 - b- Comparer l'intensité de ce courant entre les armatures à l'intensité de courant de conduction dans le fil.
- 4-
 - a- Le fil conducteur est en cuivre, de conductivité électrique $\gamma = 0,6 \cdot 10^8 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Exprimer en fonction de $I(t)$, la circulation du champ magnétique le long du contour fermé Γ indiqué sur la figure, en utilisant une surface limitée par Γ qui coupe le fil.
 - b- Exprimer cette même circulation en utilisant une surface limitée par Γ qui passe entre les armatures et comparer à l'expression précédente.



Exercice 2

Les plasmas sont des milieux macroscopiquement neutres, constitués d'électrons (masse m_e , charge $q = -e$ et de densité volumique de charge n_e) et d'ions positifs (masse $M = m_p$, charge $q = +e$ et de densité volumique de charge n_i). En l'absence de champ électromagnétique appliqué, on considère que le plasma est localement neutre et que $n_e = n_i = n_0$. On suppose que le gaz est totalement ionisé et que les interactions entre particules chargées peuvent être négligées.

Les propriétés électriques et magnétiques du plasma sont assimilées à celle du vide.

Considérons un ion de charge $q = +e$, placé en O, et pris comme origine d'un système de coordonnées sphérique (r, θ, φ) de base orthonormée direct $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. Du fait de l'attraction Coulombienne, au voisinage de cet ion, on observe un surplus de charge négative, responsable

d'un écart local à la neutralité globale du plasma. Soit $V(r)$ le potentiel qui règne en un point M situé à la distance r de l'ion situé en O . Les densités volumiques de charges d'ions et d'électrons en M s'écrivent respectivement : $\rho_i = \rho_0 \exp(-\frac{eV(r)}{k_B T})$ et $\rho_e = -\rho_0 \exp(\frac{eV(r)}{k_B T})$ avec ρ_0 désigne une constante et k_B est la constante de Boltzmann.

- 1- Que représente ρ_0 ? Exprimer ρ_0 en fonction de n_0 et e .
- 2- Donner l'expression de la densité volumique totale de charges au point, $\rho_t(M)$, pour $r \neq 0$
- 3- En coordonnées sphériques, montrer que l'équation différentielle à laquelle obéit le potentiel $V(r)$ est :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2[rV(r)]}{dr^2} = -\frac{\rho_t(M)}{\epsilon_0}$$

- 4- On se place dans l'hypothèse $eV(r) \ll k_B T$ et on admet que $V(r \rightarrow \infty) = 0$ et qu'au voisinage immédiat de l'ion placé en O , l'influence de sa charge l'emporte sur celle des charges électroniques distribuées en volume. Montrer que le potentiel $V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(\frac{-r}{\lambda_D}\right)$ où λ_D est une distance caractéristique (appelée longueur de DEBYE) que l'on déterminera.
- 5- Tracer sur un même graphique l'allure de $V(r)$ et l'allure du potentiel créé par l'ion placé en O de charge $q = +e$ dans le vide. Commenter.
- 6- En déduire le champ électrique correspondant au potentiel $V(r)$.
- 7- Calculer la charge totale Q contenue dans une sphère de centre O et de rayon r en fonction de e, r et λ_D . Discuter les cas $r \gg \lambda_D$ et $r \ll \lambda_D$.
- 8- Calculer la valeur numérique de λ_D à la température $T = 10^4 K$. Discuter de la validité de l'approximation faite à la question 3.

On donne $n_0 = 10^{23} m^{-3}$, $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$, $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} F \cdot m^{-1}$.

Exercice 3 : Energie dissipée par effet joule dans le cadre de l'effet de peau

Un conducteur ohmique de conductivité γ (de l'ordre de $10^7 S \cdot m^{-1}$), occupant le demi-espace ($z > 0$) est le siège d'un courant volumique d'expression complexe : $\vec{j} = j_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{u}_x$ avec $\delta =$

$\sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ est une longueur appelée épaisseur de peau.

- 1-
 - a- Ecrire les équations de Maxwell dans le cas d'un conducteur Ohmique de conductivité réelle γ .
 - b- A partir des équations de Maxwell, de l'équation de conservation de la charge et de la loi d'Ohm locale, établir l'équation différentielle vérifiée par la densité de charge ρ .
 - c- Dans le cas où $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma} \ll T$ (T période du régime sinusoïdal), montrer que $\rho = 0$ et que le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction $j : j_D \ll j$.
 - d- En déduire que $\vec{j}$ vérifie l'équation : $\Delta \vec{j} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \vec{0}$. Vérifier que le courant $\vec{j}$ donné est bien une solution.
- 2- Trouver l'expression de $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
- 3- En déduire la densité volumique d'énergie électromagnétique ainsi que sa valeur moyenne dans le temps. Comparer les contributions électrique et magnétique.
- 4- Quelle est la puissance moyenne dissipée par effet joule dans le volume parallélépipédique de longueur a , de largeur b et de profondeur infinie ?
- 5- Comparer cette puissance à la puissance moyenne rayonnée.
- 6- Conclure sur un bilan d'énergie électromagnétique.