

Exercice 2 :

1- ρ_0 = densité volumique de charge en absence de potentiel

$$\rho_0 = n_0 \cdot e$$

$$\begin{aligned} 2- \rho_t(M) &= \rho_i + \rho_e = \rho_0 e^{-\frac{eV(r)}{k_B T}} - \rho_0 e^{\frac{eV(r)}{k_B T}} \\ &= \rho_0 \left[e^{-\frac{eV(r)}{k_B T}} - e^{\frac{eV(r)}{k_B T}} \right] \end{aligned}$$

$$\rho_t(M) = -2 \rho_0 \sinh\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right)$$

$$3- \text{ on a } \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r V(r)] = - \frac{\rho_t(M)}{\epsilon_0} \quad (\text{eq de Poisson } \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0)$$

$$\rightarrow \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r V(r)] = \frac{2}{\epsilon_0} \rho_0 \sinh\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right)$$

$$\text{or } eV(r) \ll k_B T \rightarrow \sinh\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \approx \frac{eV(r)}{k_B T}$$

$$\rightarrow \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r V(r)] \approx \frac{2}{\epsilon_0} \cdot \rho_0 \cdot \frac{eV(r)}{k_B T}$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dr^2} [\underbrace{r V(r)}_{U(r)}] \approx \frac{2 \rho_0 e}{\epsilon_0 k_B T} \underbrace{[r V(r)]}_{U(r)} \quad (*)$$

on pose $U(r) = r V(r)$, l'équation (*) devient:

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} - \frac{2 \rho_0 e}{\epsilon_0 k_B T} U(r) = 0 \quad \text{eq diff du 2nd ordre}$$

$$\text{l'équation caractéristique } x^2 - \frac{2 \rho_0 e}{\epsilon_0 k_B T} = 0 \quad (x \text{ est la racine})$$

$$\rightarrow x^2 = + \frac{2 \rho_0 e}{\epsilon_0 k_B T} = \frac{1}{\lambda_D^2}$$
$$\rightarrow U(r) = A e^{-\frac{r}{\lambda_D}} + B e^{r/\lambda_D}$$

or qd $r \rightarrow \infty$; $V \rightarrow 0 \rightarrow B = 0$

$$\rightarrow U(r) = A e^{-r/\lambda_D} \quad \text{et } V(r) = \frac{A}{r} e^{-r/\lambda_D}$$

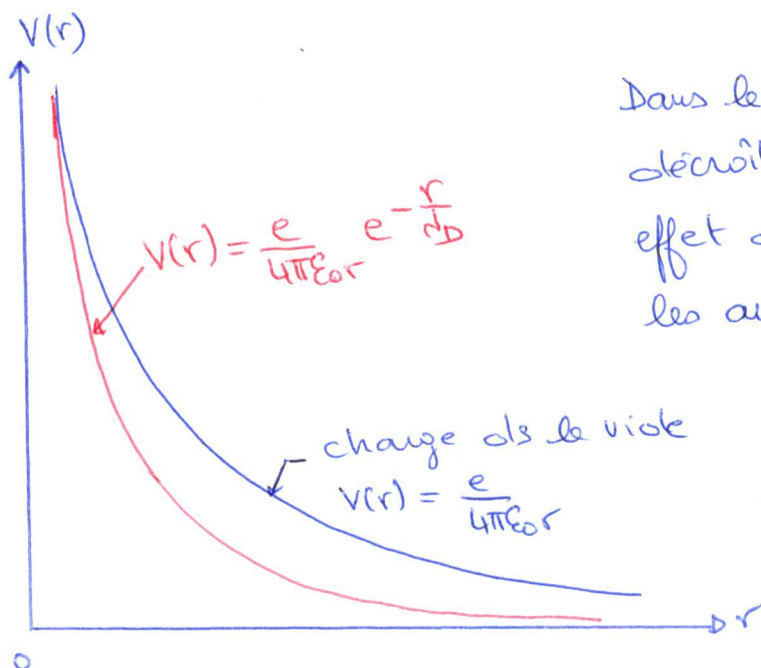
or au voisinage immédiat de l'ion placé en $r=0$

on a $V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \rightarrow A = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}$

$\rightarrow V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/d_D}$

$d_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2e n_0}}$

4-



Dans le plasma le potentiel décroît plus vite : il y a un effet d'écrantage causé par les autres charges.

5- $\vec{E} = -\text{grad} V = -\frac{dV}{dr} \cdot \vec{u}_r$

$= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r^2} e^{-r/d_D} + \frac{1}{r} \cdot \left(-\frac{1}{d_D}\right) e^{-r/d_D} \right] \vec{u}_r$

$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot e^{-r/d_D} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r \cdot d_D} \right] \vec{u}_r$

6- D'après le Thm de Gauss : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

$Q_{\text{int}} = \oint \frac{e}{4\pi\epsilon_0} e^{-r/d_D} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r d_D} \right] \cdot \vec{u}_r \cdot (r d\theta) \cdot (r \sin\theta d\phi) \vec{u}_r$

$= \frac{e}{4\pi r^2} e^{-r/d_D} \left[1 + \frac{r}{d_D} \right] \cdot 4\pi r^2$

$Q = e \left[1 + \frac{r}{d_D} \right] e^{-r/d_D}$

- si $r \gg d_D \rightarrow Q = 0 \rightarrow$ le milieu est globalement neutre
- si $r \ll d_D \rightarrow Q \approx e \rightarrow$ le milieu contient l'ent la charge $q=e$

7- on a $r_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2 n_0 e^2}} = 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ m}$

$$eV(r=r_D) = e \times \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_D} e^{-1} = 9,5 \cdot 10^{-22} \text{ J} \ll k_B T \approx 138 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

→ L'approximat° faite dans la question 3 est bien validée.

