

Application en électrostatique (équation de Laplace)

On considère un champ électrostatique uniforme $\vec{E}_0$ parallèle à Ox dans une région de l'espace.

- 1- Quelle est l'expression du potentiel $V_0(r, \theta)$ correspondant, sachant que $V_0 = 0$ pour le plan $x = 0$.
- 2- Dans le champ précédent, on introduit une sphère métallique de centre O et de rayon R reliée électriquement au sol.
A quelle équation obéit le potentiel dans tout l'espace ?
- 3- On cherche des solutions de la forme $V(r, \theta) = f(r) \cdot \cos\theta + V_1$ où V_1 est une constante.
Montrer que $f(r) = c_1 \times r + \frac{c_2}{r^2}$ où c_1 et c_2 sont des constantes que l'on déterminera aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de la sphère.
- 4- En déduire que le champ à l'extérieur de la sphère est la somme du champ $\vec{E}_0$ et du champ d'un dipôle dont on donnera le moment $\vec{p}$.
- 5- Calculer la densité superficielle de charge $\sigma(\theta)$ sur la sphère, ainsi que la charge électrique totale de celle-ci. Conclure.

On donne :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

