

Problèmes de révision 2 : OEM

Problème 1

Partie 1 : Approche énergétique de l'effet de peau

On note $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ la base cartésienne, orthonormée directe, du référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$.

Dans le demi-espace $z < 0$, occupé par l'air dont les propriétés électromagnétiques sont assimilées à celles du vide, se propage une onde plane progressive harmonique dont le champ électrique s'écrit en notation complexe $\vec{E}_i(M, t) = E_0 \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_x$ où E_0 est un réel positif.

Le demi-espace $z \geq 0$ est occupé par un milieu conducteur métallique ohmique de conductivité réelle γ . Dans ce conducteur règne le champ électrique :

$$\vec{E} = E_0 e^{-\alpha z} \exp i(\omega t - \alpha z) \vec{u}_x$$

On note ε_0 et μ_0 respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide.

- 1- Quelle est la dimension de α . Quelle est sa signification physique ? Cette onde est-elle plane ? Progressive ?
- 2- Montrer que le champ $\vec{E}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{E} = E_0 \exp i(\omega t - \alpha z(1 - i)) \vec{u}_x$$

En déduire le vecteur d'onde $\vec{k}$.

- 3- Déduire le champ magnétique $\vec{B}$ associé à l'onde électromagnétique représentée par le champ $\vec{E}$. Donner les expressions réelles de ces champs. Ces champs vibrent-ils en phase ?
- 4- Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle \vec{\Pi} \rangle$. Pourquoi on s'intéresse à la valeur moyenne et non à la valeur instantanée.

On considère un cylindre d'axe $\vec{u}_z$, de section droite S et situé entre z (face d'entrée) et $z + dz$ (face de sortie).

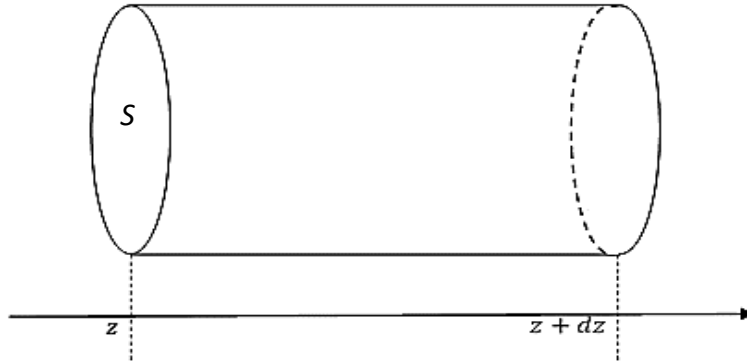


Figure 1

- 5- Exprimer la puissance moyenne $\langle P(z) \rangle$ entrant par la face située en z et la puissance moyenne $\langle P(z + dz) \rangle$ sortant par la face en $z + dz$.
- 6- Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule $\langle P_j(z) \rangle$, dans la tranche de volume élémentaire Sdz .
- 7- Effectuer un bilan de puissance sur le volume Sdz , délimité par la surface fermée du cylindre (On suppose qu'il n'y a pas de perte sur la surface latérale du cylindre).
- 8- En supposant $\ll 1$, déduire α en utilisant un développement limité d'ordre 1. Exprimer en fonction de α puis en fonction de μ_0 , γ et ω , la distance δ sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée. Qu'appelle-t-on la distance δ . Vérifier l'hypothèse faite dans cette question pour des fréquences de l'ordre du GHz et $\gamma \approx 10^7 S.I$

Partie 2 : Réflexion sur un conducteur parfait

On suppose dans cette partie que $\gamma \rightarrow \infty$.

- 9- Rappeler les caractéristiques du modèle du conducteur parfait.
- 10- Déterminer l'expression complexe du champ $\vec{E}_r(M, t)$ de l'onde réfléchie.
- 11- En déduire le champ magnétique $\vec{B}_r(M, t)$ de cette onde.
- 12- Déterminer les densités surfaciques de charges σ et de courants $\vec{j}_s$ qui peuvent apparaître sur la face métallique $z = 0$.
- 13- Déterminer en notation réelle, les champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ résultants dans l'air.
- 14- Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting de cette onde. Commenter le résultat.
- 15- On désire calculer la force qui s'exerce sur un élément de courant $\vec{j}_s \cdot dS$. On considérera le champ $\vec{B}$ au voisinage de dS comme la superposition du champ $\vec{B}_1$, créé par l'élément $\vec{j}_s \cdot dS$ et du champ $\vec{B}_2$ créé par les autres courants. En un point M très voisin de dS , $\vec{B}_1$ peut être considéré comme le champ créé par une nappe de courant plane de densité surfacique $\vec{j}_s$.
- 15-1- En déduire $\vec{B}_2$ agissant sur $\vec{j}_s \cdot dS$.
- 15-2- Donner l'expression de la force de Laplace $\vec{dF}$ s'exerçant sur dS , et en préciser le sens.
- 15-3- Calculer sa moyenne temporelle $\langle \vec{dF} \rangle$ et en déduire la pression correspondante sur dS , appelée pression de radiation P_{rad} définie par $P_{rad} = \frac{\langle \|\vec{dF}\| \rangle}{dS}$.
- 15-4- Exprimer P_{rad} en fonction de l'intensité I_i de l'onde incidente et de la célérité c de la lumière dans le vide.
- 16- **Interprétation corpusculaire**
Un certain nombre de faits expérimentaux ont conduit les physiciens à introduire l'idée qu'à une onde électromagnétique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$ est associé un photon d'énergie $\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$ et de quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ où h est la constante de Planck et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite.
- 16-1- A l'aide de la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique $\langle u_i \rangle$, déterminer la densité moyenne n_p de photons associée à l'onde incidente.
- 16-2- En considérant le rebond des photons sur la paroi métallique $z = 0$, et en supposant que les chocs sur le conducteur sont élastiques, calculer la quantité de mouvement $d\vec{p}$ transférée au conducteur par chaque photon qui se réfléchit.
- 16-3- En déduire la force moyenne à laquelle est soumis un élément d'aire dS du conducteur pendant le temps dt , et retrouver ainsi l'expression de pression de radiation.

Problème 2 : Diffusion Rayleigh atmosphérique (d'après PC 2009)

Sous l'action de la lumière provenant du soleil, les différentes molécules de l'atmosphère se comportent comme des dipôles oscillants et réémettent une partie de la lumière solaire qu'elles ont absorbée. On propose dans ce problème une étude simplifiée de cette diffusion Rayleigh atmosphérique.

L'atmosphère est caractérisée par sa permittivité électrique ε_0 et sa perméabilité, magnétique μ_0 . On notera c la célérité de la lumière dans le vide.

1^{ère} Partie: Rayonnement émis par un dipôle

On considère un doublet constitué de deux charges ponctuelles : $(-q)$ est immobile au point O et $(+q)$ est mobile le long de l'axe Oz suivant la loi $(t) = a \cos(\omega t)$, a et ω représentent respectivement l'amplitude et la pulsation des oscillations. L'ensemble constitue un modèle du dipôle oscillant qui rayonne dans le vide une onde électromagnétique de pulsation ω en un point M repère par les coordonnées sphériques (r, θ, φ) ; $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ étant la base sphérique, (**figure 1**).

On se place dans les conditions $a \ll \lambda \ll r$; λ étant la longueur d'onde de l'onde électromagnétique émise.

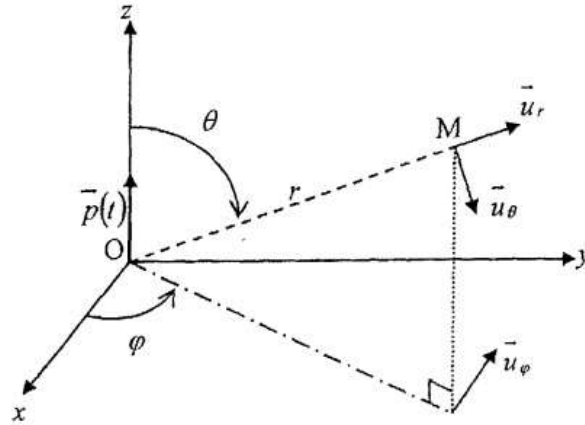


figure 1

1) Déterminer le moment dipolaire $\vec{p}(t)$ de ce dipôle oscillant. Quelle est la valeur p_0 de son amplitude ?

Le champ électromagnétique rayonné en M est tel que :

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2 p(t - \frac{r}{c})}{dt^2} \frac{\sin\theta}{r} \text{ et } B_\varphi = \frac{E_\theta}{c} ; \text{ les autres composantes sont négligeables.}$$

2-a) Justifier, par des considérations de symétrie, la direction des champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$.

2-b) Comparer la structure de cette onde à celle d'une onde plane. Justifier.

3-a) Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M, t)$ de cette onde et la norme de sa valeur moyenne Temporelle $\|\langle \vec{\Pi} \rangle\|$ en fonction de p_0 , ϵ_0 , ω , c et les coordonnées du point M .

3-b) Montrer que la puissance électromagnétique moyenne rayonnée à travers une sphère de centre O de rayon r est : $P_r = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$; On donne $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$

2ème Partie : Diffusion de la lumière solaire par les molécules de l'atmosphère

L'onde incidente émise du soleil, est caractérisée par son champ électrique qui s'écrit en notation complexe : $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - kx)$ avec $E_0 = \|\vec{E}_0\|$ est une constante. Cette onde interagit avec l'électron d'une molécule de l'atmosphère placée en O , celui-ci effectue des petites oscillations à la pulsation ω . L'électron de masse m_e , et de charge électrique $(-e)$ est repéré depuis O par le vecteur $\vec{r}_e$. Le mouvement de l'électron est régi par l'équation différentielle suivante :

$$m_e \frac{d^2 \vec{r}_e}{dt^2} = -m_e \omega_0^2 \vec{r}_e - \frac{m_e}{\tau} \frac{d\vec{r}_e}{dt} - e \left(\vec{E} + \frac{d\vec{r}_e}{dt} \wedge \vec{B} \right) ; \omega_0 \text{ et } \tau \text{ sont des constantes positives caractéristiques de la molécule considérée.}$$

4- On suppose que $\|\vec{r}_e\| \ll \lambda$ où λ est la longueur d'onde de l'onde électromagnétique incidente

Pourquoi peut-on négliger l'action du champ magnétique sur l'électron devant celle du champ électrique ?

5) On suppose que la molécule ne possède pas de moment dipolaire en l'absence de champ électrique extérieur et on admet que les N électrons de cette molécule ont le même déplacement, en déduire $\vec{p}(t)$ le moment dipolaire de la molécule induit par l'onde électromagnétique, ainsi que son amplitude complexe p_0 .

6-a) En se référant à la question 3-b de la première partie déterminer P_d la puissance moyenne diffusée par une molécule.

6-b) Exprimer $\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|$ la norme de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting de l'onde incidente en fonction de E_0 , ε_0 et c . En déduire la relation entre P_d et $\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|$.

7- Pour les molécules constituant l'atmosphère terrestre (diazote et dioxygène essentiellement) on a $\omega_0 = 10^{17} \text{ rad.s}^{-1}$ et $\tau = 10^{-9} \text{ s}$.

On donne la pulsation de la radiation rouge $\omega_R = 2,35 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ et celle du bleu $\omega_B = 2 \cdot \omega_R$.

7-a) Sachant que dans ces conditions on a la diffusion Rayleigh ($\frac{1}{\tau} \ll \omega \ll \omega_0$). Justifier la relation suivante :

$$P_d = \frac{N^2 e^4}{6\pi c^4 \varepsilon_0^2 m_e^2} \|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\| \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$$

7-b) En déduire une explication de la couleur bleue du ciel en plein jour par beau temps.

8- En réalité le rayonnement solaire perd de l'énergie en traversant l'atmosphère à cause de la diffusion. Pour cette raison on suppose que la puissance moyenne transportée par l'onde incidente, qui se propage dans le sens des x croissants, varie légèrement en fonction de x : $\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\| = \Pi(x)$.

Soit un cylindre élémentaire d'axe Ox de surface de base S , compris entre les abscisses x et $x + dx$ (figure 2).

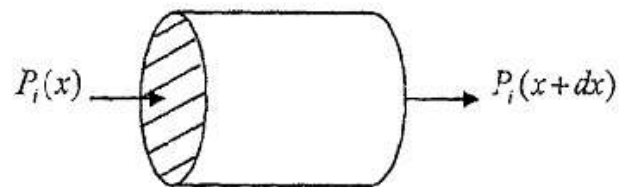


Figure 2

On note P_i la puissance moyenne de l'onde incidente traversant sous incidence normale la surface d'aire S .

8-a) On suppose que l'atmosphère terrestre est constituée de n molécules par unité de volume. Déterminer $dP_d(x)$ la puissance diffusée par les molécules contenues dans le cylindre élémentaire.

8-b) En effectuant un bilan de puissance sur ce cylindre élémentaire, montrer que $\Pi(x) = \Pi(0)e^{-\frac{x}{L}}$ et exprimer L en fonction de ε_0 , m_e , N , n , e , ω_0 , ω et c .

8-c) En Comparant les valeurs de L pour les ondes électromagnétiques correspondantes aux radiations rouge et bleue et commenter. Expliquer pourquoi les couchers de soleil sont-ils rouges par beau temps ?

On donne $N = 1$ électron par molécule; $n = 10^{25}$ molécules par m^3 ; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ et $\varepsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ SI}$.