

TD 4: Propagation des ondes EM**Exercice 1 : Superposition de deux OPPM**

Dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on considère deux OPPM O_1 et O_2 de même amplitude E_0 , de même pulsation ω et polarisées rectilignement suivant (Oy) . Ces deux ondes se propagent dans le vide dans deux directions du plan Oxz faisant l'angle α de part et d'autre de l'axe (Ox) .

- 1- Rappelez l'équation d'onde vérifiée par O_1 et O_2 et écrire les expressions des champs électriques correspondants en notation complexe.
- 2- Dédurre les expressions des champs magnétiques de O_1 et O_2
- 3- Déterminer le champ électrique et le champ magnétique résultant de la superposition de O_1 et O_2 .
- 4- Décrire la structure de l'onde résultante.
- 5- Dédurre les expressions réelles de ces champs dans le cas où $\alpha = 0$ et la structure de l'onde correspondante.
- 6- Exprimer la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g de l'onde résultante.
- 7- Calculer la valeur moyenne au cours du temps du vecteur de Poynting $\langle \vec{R} \rangle$. Peut-on voir la structure de l'onde prévoir la direction et le sens de $\langle \vec{R} \rangle$?
- 8- Calculer la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique $\langle u_{em} \rangle$.
- 9- Calculer la valeur moyenne spatiale de $\langle \vec{R} \rangle$ notée $\langle \langle \vec{R} \rangle \rangle$ et la valeur moyenne spatiale de $\langle u_{em} \rangle$ notée $\langle \langle u_{em} \rangle \rangle$. Dédurre la vitesse de l'énergie v_e . La comparer à v_g .

Exercice 2: Propagation d'une O.P.P.M dans un plasma

Les plasmas sont des milieux macroscopiquement neutres, constitués d'électrons (masse $m = m_e$, charge $q = -e$ et de densité volumique de charge n_e) et d'ions positifs (masse $M = m_p$, charge $q = +e$ et de densité volumique de charge n_i). En l'absence de champ électromagnétique appliqué, on considère que le plasma est localement neutre et que $n_e = n_i = n_0$. On suppose que le gaz est totalement ionisé et que les interactions entre particules chargées peuvent être négligées.

L'ionosphère est un exemple de plasma où les gaz sont ionisés par le vent solaire et le rayonnement cosmique. Les propriétés électriques et magnétiques du plasma sont assimilées à celle du vide.

Le plasma est soumis à une onde électromagnétique plane progressive harmonique donnée par le champ électrique complexe : $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$.

- 1- Exprimer la force de Lorentz qui s'exerce sur une charge q qui se déplace à la vitesse $\vec{v}$. Justifier qu'il est possible de négliger la composante magnétique devant la composante électrique.
- 2- En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer les vitesses complexes $\vec{v}_i$ des ions et $\vec{v}_e$ des électrons.
- 3- En déduire la densité volumique de courant $\vec{j}$ dans le plasma. Quel terme peut-on négliger dans cette expression. On posera $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}$.

- 4- Calculer la puissance moyenne temporelle échangée entre le champ et les porteurs de charges dans le plasma. Commenter le résultat.
- 5- Ecrire l'équation de Maxwell-Ampère dans le plasma sous la forme $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \frac{i\omega}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \vec{E}$. On posera $n^2 = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$.
- 6- Etablir l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique $\vec{E}$.
- 7- En déduire la relation de dispersion $k^2 = f(\omega)$. Tracer sur le même graphique la courbe décrivant la relation de dispersion pour une OPPH se propageant dans le vide illimité et la relation de dispersion de l'onde dans le plasma.
- 8- A quelle condition l'onde appliquée au plasma peut-elle s'y propager ? Dans le cas contraire que lui arrive-t-elle ?
- 9- A quel type de filtre peut-on assimiler le plasma vis-à-vis des ondes électromagnétiques ?
- 10- Les ondes radio de fréquences proches de 8 GHz envoyées par des sondes dans l'espace sont captées par des stations situées à la terre. Le choix de ces fréquences permet-il la communication entre la sonde et la terre sachant que $\omega_p \sim 10^7 \text{ rad.s}^{-1}$ pour l'ionosphère terrestre ?
- 11- Exprimer en fonction de n et E_0 la moyenne temporelle de la densité volumique de l'énergie cinétique des charges.
- 12- Exprimer la vitesse de propagation de l'énergie en fonction de n et c . Commenter.

Exercice 3: Onde dans un conducteur

Dans un matériau conducteur, les charges mobiles (les électrons) interagissent entre elles et avec les charges fixes du matériau ; ces interactions sont alors décrites dans le cadre d'une théorie quantique. Cependant, une approche phénoménologique classique peut être adoptée pour expliquer la conductivité de ces matériaux. Cela consiste à traiter les électrons (de densité n , de charge $-e$ et de masse m) comme des particules obéissant à la mécanique classique. On modélisera les collisions des électrons libres du conducteur avec le reste du matériau par une force de frottement visqueux $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ où τ est une constante appelée durée de relaxation des vitesses et $\vec{v}$ représente la vitesse moyenne d'un électron.

Dans la suite du problème, on négligera le poids de l'électron par rapport aux forces électrique et magnétique qui lui seront appliquées.

Le conducteur étudié est le plomb de conductivité $\gamma_0 = 4,8 \cdot 10^6 \Omega^{-1}.m^{-1}$.

On donne $n = 3,2 \cdot 10^{28} m^{-3}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$; $m = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$.

On suppose que le conducteur occupe le demi-espace $z > 0$. On considère une onde plane progressive monochromatique polarisée suivant Ox , elle se propage vers les z croissants.

Dans le demi-espace vide $z < 0$, le champ électrique de l'onde s'écrit comme suit:

$$\vec{E}_i = E_0 \exp(i(k_0 z - \omega t)) \vec{u}_x$$

Cette onde subit une réflexion à l'interface vide-conducteur et donne lieu à une onde réfléchie de champ $\vec{E}_r$ et une onde transmise de champ $\vec{E}_t$ avec : $\vec{E}_r = E_{0r} \exp(i(k_0 z + \omega t)) \vec{u}_x$ et $\vec{E}_t = E_{0t} \exp(i(\underline{k} z - \omega t)) \vec{u}_x$ où k_0 est le nombre d'onde dans le vide et $\underline{k}$ la composante complexe du vecteur d'onde dans le conducteur. Les amplitudes E_{0r} et E_{0t} peuvent être complexes.

I - Onde transmise

Les électrons du plomb sont soumis à l'action des champs électrique et magnétique de l'onde transmise, il s'établit dans le conducteur un courant de densité volumique $\vec{j}$

- 1- Écrire le principe fondamental de la dynamique pour l'électron et montrer que l'action du champ magnétique sur l'électron est négligeable par rapport à celle du champ électrique.

En déduire que la conductivité complexe en régime permanent est donnée par: $\gamma = \frac{\gamma_0}{1-i\omega\tau}$.

Calculer τ .

- 2-a- Écrire les équations de Maxwell dans le conducteur et déduire la relation de dispersion $k(\omega)$ de ce milieu.

- 2-b- En comparant le rapport $\frac{\epsilon_0}{\gamma_0}$ à la valeur de τ , montrer que la relation de dispersion du conducteur peut se simplifier dans le cas des "faibles fréquences" ($\omega \ll \frac{1}{\tau}$) pour donner: $k^2 = i\omega\mu_0\gamma_0$

On adopte l'approximation des "faibles fréquences" dans le reste du problème.

- 3-a- Écrire l'expression du champ électrique $\vec{E}_t$ de l'onde dans le conducteur.

En déduire la structure de l'onde correspondante. On posera $\frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma_0}{2}}$

- 3-b- Donner une interprétation physique de la quantité δ .

- 3-c- Calculer δ pour $f_1 = 50 \text{ Hz}$ puis pour $f_2 = 100 \text{ MHz}$.

II -Coefficient de réflexion et de transmission

Les coefficients de réflexion $\underline{r}$ et de transmission $\underline{t}$ sont définis comme suit

$$\underline{r} = \frac{E_{or}}{E_{oi}} \quad ; \quad \underline{t} = \frac{E_{ot}}{E_{oi}}$$

L'interface vide-conducteur ne porte aucune densité surfacique de courant.

- 4-a- Écrire les relations de continuité des champs électrique et magnétique à l'interface vide-conducteur.

- 4-b- Calculer les champs magnétiques $\vec{B}_i, \vec{B}_r$ et $\vec{B}_t$ et en déduire les coefficients de réflexion et de transmission.

- 4-c- Donner les expressions de ces coefficients pour ω très faible ($\omega \approx 0$).

- 4-d- Montrer alors que le champ magnétique peut pénétrer à l'intérieur du conducteur lorsque la pulsation ω est proche de zéro.

Exercice 4: Guide d'onde à section rectangulaire

On étudie dans cette partie la propagation d'une onde électromagnétique hyperfréquence de pulsation ω dans un guide d'onde de section rectangulaire (**figure 1**). Cette onde se propage suivant l'axe Oz en se réfléchissant sur ses faces internes formées de matériaux parfaitement conducteurs dans lesquels le champ électrique de l'onde s'annule.

L'espace interne du guide est l'air ayant les mêmes propriétés que le vide.

Les dimensions de ce guide sont a suivant Ox , et b suivant Oy .

Le champ électrique de cette onde peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{E} = E_0(x, y) e^{j(\omega t - k_g z)} \vec{u}_x$$

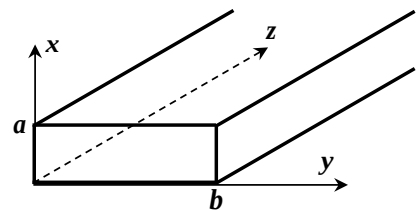


Figure 1

$E_0(x, y)$ est une fonction dont on demandera à déterminer dans la suite du problème, et k_g est un réel positif.

- 1- Cette onde est-elle plane ? Est-elle progressive ? Donner son vecteur d'onde et préciser sa polarisation.
- 2- Ecrire les équations de Maxwell dans l'espace vide du guide.
- 3- Montrer que le champ $\vec{E}$ est indépendant de x .
- 4- Ecrire l'équation de propagation du champ $\vec{E}$ et déduire l'équation différentielle vérifiée par $E_0(y)$. On posera : $\Omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2$.
- 5- Déterminer l'expression de $E_0(y)$ dans le cas où $\Omega^2 > 0$ et qui satisfait les conditions aux limites en $y = 0$ et $y = b$ (on introduira un entier m).

En déduire que l'expression de $\vec{E}$ peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E} = 2jE_0 \sin(\Omega y) e^{j(\omega t - k_g z)} \vec{u}_x \text{ avec } E_0 \text{ est une constante réelle.}$$

- 6- Etablir l'équation de dispersion du guide en fonction de k_g , b , c , ω et m . Le guide est-il dispersif ? Justifier.
- 7- A quelle condition sur la pulsation ω de l'onde a-t-on propagation ? En déduire la pulsation de coupure ω_{cm} du guide. On donnera également cette condition en fonction de la longueur d'onde λ .
- 8- A chaque valeur de m on associe un mode propagation :
 - a- Exprimer la vitesse de phase v_ϕ de l'onde en fonction de ω , c et ω_{cm} .
 - b- Trouver la vitesse de groupe v_g en fonction de c , λ_{cm} et λ .
 - c- Exprimer la relation entre λ , la longueur d'onde du guide λ_g et la longueur d'onde de coupure λ_{cm} .
- 9- On choisit un guide dont le côté : $b = 22,86 \text{ mm}$.
 - a- Déterminer la fréquence de coupure et la longueur d'onde associée pour les modes suivants : $m = 1$ et 2 .
 - b- A quelle condition sur la longueur d'onde a-t-on propagation uniquement du mode $m = 1$?
 - c- L'onde se propageant dans le guide est émise par une diode Gunn dont la fréquence varie entre 8,5 et 11 GHz. Quel est parmi les modes $m = 1$ et 2 celui qui est transmis par ce guide ?
- 10- Exprimer le champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde. Qu'elle est sa composante transversale ? Justifier l'expression « onde transverse électrique », puis montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ obtenu vérifie l'équation de Maxwell-Flux.

11- Dans la suite du problème, on choisit un guide de dimensions $a = \lambda/3$ et $b = 3\lambda/4$.

- a- Vérifier que seul le mode $m = 1$ peut se propager.
- b- Exprimer pour ce mode les vitesses v_ϕ et v_g en fonction de c .

12- Soit $\vec{R}$ le vecteur de Poynting de l'onde dans le guide.

- a- Calculer sa valeur moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$.

- b- On définit la valeur moyenne de $\langle \vec{R} \rangle$ dans l'espace par : $R_{\text{moy}} = \frac{1}{b} \int_0^b \langle R \rangle dy$

Déterminer R_{moy} en fonction de E_0 et v_g .

- c- En déduire la puissance moyenne totale P transportée dans le guide.
- d- A la fréquence $\nu = 10 \text{ GHz}$, on transporte une puissance moyenne de 10 mW . Calculer l'amplitude E_0 du champ électrique.

13- On définit la densité moyenne d'énergie électromagnétique dans l'espace et dans le temps par :

$$W_{moy} = \frac{1}{b} \int_0^b \left(\left\langle \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle \right) dy.$$

a- Déterminer W_{moy} .

b- Qu'elle est la signification physique du rapport $\eta = \frac{R_{moy}}{W_{moy}}$? Comparer η à v_g . Conclure.

Exercice 5 : Antenne rectiligne

I/ La **figure 2** représente une antenne rectiligne émettrice d'ondes hertziennes constituée d'une tige métallique de longueur $2l$ alimentée en son milieu par un circuit qui délivre un courant alternatif de haute fréquence.

Chaque élément de longueur dz de l'antenne peut être considéré comme un dipôle électrique oscillant de moment

dipolaire $\vec{dp}$ tel que $\dot{\vec{dp}} = Idz\vec{u}_z$.

Dans cette antenne l'intensité du courant dépend de z et du temps suivant la loi :

$$I(z, t) = I_0 \left(1 - \frac{|z|}{l}\right) \cos \omega t$$

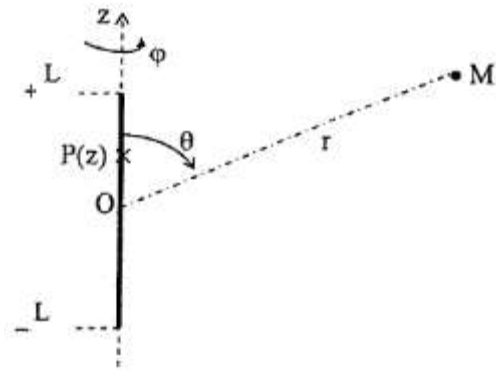


Figure 2

- 1- Déterminer à $t = 0$, les positions des nœuds et des ventres du courant.
- 2- On admet que le champ électrique total créé par l'antenne au point M de la zone de rayonnement peut s'écrire:

$$\vec{E} = - \frac{I_0 \sin \theta \sin^2 \left(\frac{\omega l \cos \theta}{2c} \right)}{\pi \epsilon_0 \omega r l \cos^2 \theta} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{u}_\theta$$

L'onde rayonnée étant localement plane, en déduire l'expression de son champ magnétique.

- 3- Déterminer la valeur moyenne de son vecteur de Poynting $\vec{R}$.
- 4- soit P_m la moyenne temporelle rayonnée par l'antenne à travers une sphère de centre O (origine de l'antenne) et de rayon r . Exprimer cette puissance sous forme d'une intégrale simple.
- 5- Sachant que cette puissance peut s'écrire sous la forme $P_m = \frac{1}{2} R_{ray} I_0^2$ où R_{ray} représente la résistance de rayonnement de l'antenne, vérifier que :

$$R_{ray} = \frac{2c}{\pi \epsilon_0 l^2 \omega^2} \int_0^\pi \frac{\sin^4 \left(\frac{\omega l \cos \theta}{2c} \right)}{\cos^4 \theta} d\theta \sin^3 \theta$$

II/ Etude du cas particulier

On se place dans toute la suite du problème dans le cas $l \ll \lambda$.

- 1- Donner la nouvelle expression de $\vec{E}$.
- 2- Montrer que R_{ray} peut se mettre sous la forme $R_{ray} = \alpha \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$ ou α est une constante à exprimer en fonction de c et ϵ_0 . Calculer R_{ray} .
On donne $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$ $\lambda = 300m$ et $l = 10m$.
- 3- Calculer la valeur moyenne de P_m pour $I_0 = 10A$.
- 4- Sachant que I_0 est constante, sur quels paramètres doit-on agir pour augmenter la puissance rayonnée par l'antenne?
- 5- Dans la suite de cette partie, on se place dans la direction $\theta = \left(\frac{\pi}{2} \right)$.
 - a- L'amplitude E_0 du champ électrique à une distance r_0 dans la zone de rayonnement vaut $210^{-2} V.m^{-1}$. En déduire r_0 .
 - b- Sachant que la puissance minimale par unité de surface détectée par une antenne réceptrice vaut $1,2810^{-8} W.m^{-1}$, calculer l'amplitude minimale E_0^{min} du champ électrique.
En déduire la portée r_{max} de l'antenne (distance maximale atteinte par l'onde)
 - c- Comment peut-on augmenter la portée de l'antenne.