

Correction DM : Rayonnement dipolaire (diffusion Rayleigh)

(Inès Ben Amar)

1ère partie

1-a) $a \ll \lambda \rightarrow \frac{a}{\tau} \ll \frac{\lambda}{\tau} \rightarrow v \ll c$: approximation non relativiste

1-b) a) $a \ll r$: approximation dipolaire

b) $\lambda \ll r$: " de la zone de rayonnement.

1-c) $\vec{p}(t) = q \cdot z(t) \vec{u}_z = qa \cos \omega t \vec{u}_z = p_0 \cos \omega t \vec{u}_z \rightarrow p_0 = qa$

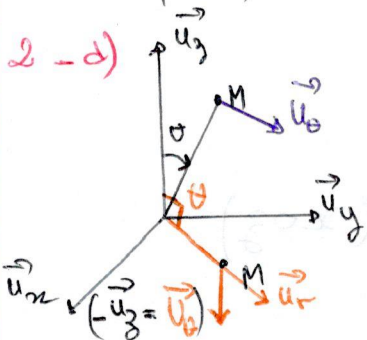
2-a) Le plan $\Pi(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie paire (P.S.P) pour la distribut° $\rightarrow \vec{E} \in \Pi$ et $\vec{B} \perp \Pi \rightarrow \vec{B} \parallel \vec{u}_\varphi$

$\vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta$ or ds la zone de rayonnement E_r est négligeable $\rightarrow \vec{E} = E_\theta \vec{u}_\theta$.

2-b) $t - \frac{r}{c}$: terme qui traduit la propagat°. Le champ E.M est reçu au pt M après un retard $\tau = \frac{r}{c}$ dû à la propagat° qui se fait selon $\vec{u}_r$ à la vitesse c

2-c) $\vec{E} \perp \vec{B}$; $(\vec{A}, \vec{E}, \vec{B})$ trièdre direct, $A = \frac{\omega}{c}$; $B = \frac{E}{c}$

$\rightarrow$ l'onde a la structure d'une onde plane se propageant ds le vide mais l'identificat° ne peut se faire que localement à cause des termes en $\frac{1}{r}$ et $\sin \theta$. (en effet sur une surface d'onde $r = cst$ et $\gg \lambda$ et pour θ pas trop grand, la surface d'onde est assimilée à un plan).



•) $M \in (Oz) \rightarrow \theta = 0/\pi \rightarrow \sin \theta = 0 \rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

•) $M \in (xOy) \rightarrow \theta = \pi/2 \rightarrow \sin \theta = 1$ et $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_z$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \vec{u}_z$$

commentaire : le rayonnement dipolaire est anisotrope (dépend de l'orientat° ds l'espace)

(Inès Ben Amar)

$$3-a) \vec{\pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_r \quad \text{or} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \dot{p}(t - \frac{r}{c})$$

$$\text{et } p(t) = p_0 \cos \omega t \rightarrow p(t - \frac{r}{c}) = p_0 \cos(\omega t - kr)$$

$$\dot{p}(t - \frac{r}{c}) = -p_0 \omega \sin(\omega t - kr)$$

$$\ddot{p}(t - \frac{r}{c}) = -p_0 \omega^2 \cos(\omega t - kr)$$

$$\Rightarrow \vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0 c^3} \times \frac{\sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4 r^2} p_0^2 \omega^4 \cos^2(\omega t - kr) \vec{u}_r$$

$$\text{or } \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$$

$$\vec{\pi} = \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - kr)}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \vec{u}_r$$

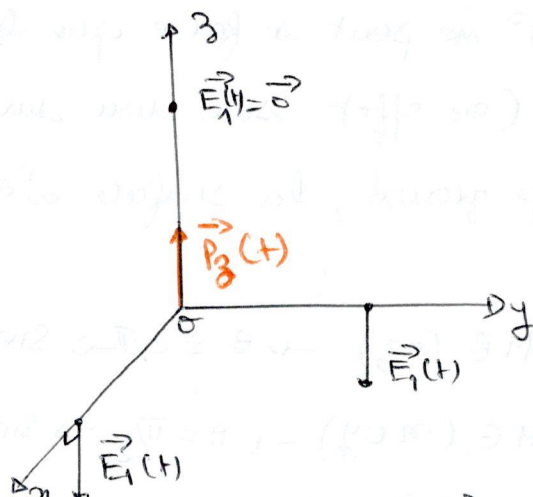
$$\Rightarrow \|\langle \vec{\pi} \rangle\| = \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2}$$

$$3-b) P_r = \oint \langle \vec{\pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \cdot r^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

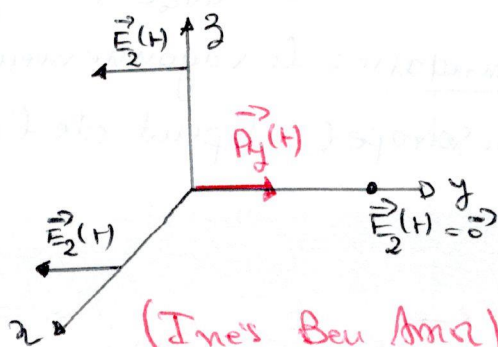
$$= 2\pi \times \frac{4}{3} \times \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} = P_r$$

2^{ème} partie

$$1) \text{ si } \vec{p} \parallel \vec{u}_3 \rightarrow E_{13} = 0 \text{ et } \vec{E}_1 \parallel -\vec{u}_3 \text{ si } M \in (xoy)$$



$$2) \text{ si } \vec{p} \parallel \vec{u}_y \rightarrow E_{2y} = 0 \text{ et } \vec{E}_2 = -\vec{u}_y \text{ si } M \in (xoz)$$



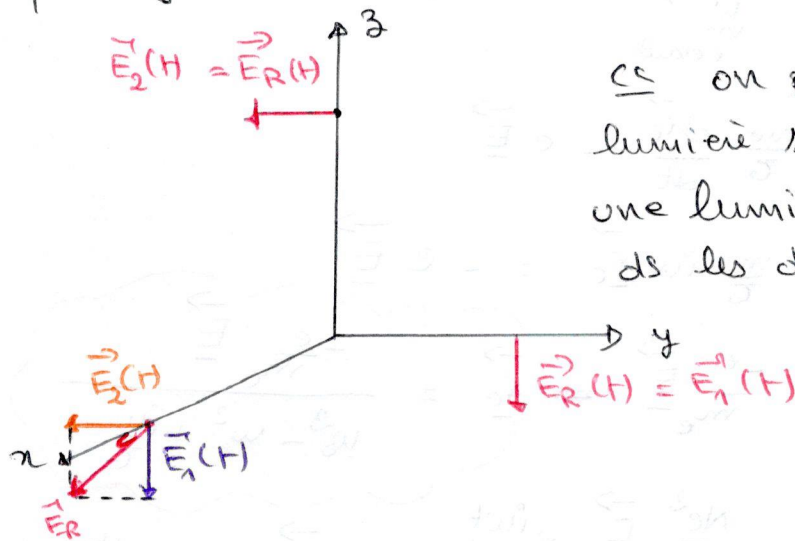
(I ne's Ben Amer)

3) a)

$$\vec{E}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx - \varphi(t)) \end{pmatrix} = \vec{E}_y \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{E}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx - \varphi(t)) \end{pmatrix}$$

$\vec{E}_y$ polarisé suivant (y) et $\vec{E}_z$ polarisé rectilignement suivant (z)

3-b) $\vec{E}_S = \vec{E}_z + \vec{E}_y$ induit le dipôle $\vec{p}(t) = \vec{p}_z(t) + \vec{p}_y(t)$
qui rayonne à son tour le champ $\vec{E}_R = \vec{E}_1(t) + \vec{E}_2(t)$



ce on peut obtenir à partir de la lumière solaire qui est non polarisée une lumière polarisée rectilignement ds les direct° $\perp$ à la direct° de propagation de la lumière ($\vec{u}_n$)

3-c) En observant le ciel ds une direct° voisine de celle du soleil à travers un polariseur (qui joue le rôle d'un analyseur ds cette expéri) l'intensité transmise ne varie pas si on fait tourner l'axe de l'analyseur car ds cette direct° la lumière diffusée est non polarisée.

3-d) En observant le ciel ds une direction $\perp$ à celle du soleil l'intensité transmise passe par un max et un min nul (extinct°) décalé de $\pi/2$, puisque ds cette direct° la lumière est polarisée rectilignement.

3^{ème} partie

1-a) - $m\omega^2 \vec{r}_e (= -k \vec{r}_e)$: force de rappel élastique qui modélise l'action exercée par le reste de l'atome sur l'e⁻.

1-b) $-\frac{m_e}{\tau} \frac{d\vec{r}_e}{dt} (= -\hbar \vec{v}_e)$: force de frottement visqueux qui modélise les pertes d'énergie par rayonnement induit par le champ incident.

2-a) $\|\vec{r}_e\| \ll \lambda \rightarrow \frac{\|\vec{r}_e\|}{\tau} \ll \frac{\lambda}{\tau} \rightarrow \|\vec{v}_e\| \ll c \Rightarrow \frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} \sim \frac{v_e \cdot B}{E} \approx \frac{v_e}{c} \ll 1$
 $\rightarrow \|\vec{F}_m\| \ll \|\vec{F}_e\|$

2-b) $\|\vec{r}_e\| \ll \lambda$: l'A.R.Q.S $\rightarrow$ on néglige le retard dû à la propagation $\rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 \exp i\omega(t - \frac{R}{c}) \approx \vec{E}_0 \exp i\omega t$

3-a) $m_e \frac{d^2 \vec{r}_e}{dt^2} = -m_e \omega_0^2 \vec{r}_e - \frac{m_e}{\tau} \frac{d\vec{r}_e}{dt} - e \vec{E}$

$\rightarrow -m_e \omega^2 \vec{r}_e + m_e \omega_0^2 \vec{r}_e + \frac{m_e}{\tau} i\omega \vec{r}_e = -e \vec{E}$

$\vec{r}_e [\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}] = \frac{-e}{m_e} \vec{E} \Rightarrow \vec{r}_e = \frac{-\frac{e}{m_e} \vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}}$

3-b) $\vec{P}(t) = -Ne \vec{r}_e = \frac{\frac{Ne^2}{m_e} \vec{E}_0 \exp i\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau} = \vec{P}_0 \exp i\omega t$

$\rightarrow \vec{P}_0 = \frac{\frac{Ne^2}{m_e} \vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau}$

4-a) d'après 3-b (1^{er} partie) , $\mathcal{P}_d = \frac{|\vec{P}_0|^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{\frac{N^2 e^4}{m_e^2} E_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2)}$

4-b) $\|\langle \vec{\pi} \rangle\| = \|\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \rangle\| = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2$

$\mathcal{P}_d = \frac{\frac{N^2 e^4}{m_e^2} \omega^4 E_0^2 c \epsilon_0}{6\pi\epsilon_0 c^3 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2) \times 2} = \frac{N^2 e^4 \omega^4 \|\langle \vec{\pi} \rangle\|}{6\pi\epsilon_0^2 c^4 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2) m_e^2}$

5-a) $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \ll 1$ et $\frac{\omega^2}{c^2} \ll \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \rightarrow \mathcal{P}_d = \frac{N^2 e^4 \omega^4 \|\langle \vec{\pi} \rangle\|}{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m_e^2 \omega_0^4}$

$$5-b) P_d = \left(\frac{N^2 e^4 \|\langle \vec{r}_i \rangle\|}{6\pi \epsilon_0^2 c^4 m_e^2 \omega^4} \right) \times \omega^4 = \beta \omega^4$$

$$P_{dB} = \beta \cdot \omega_B^4 ; P_{dR} = \beta \omega_R^4 = \beta \frac{\omega_B^4}{2^4} = \frac{1}{16} P_{dB}$$

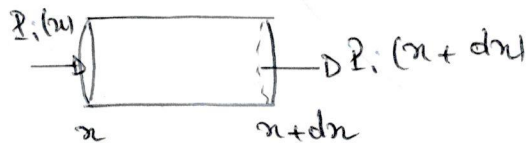
la puissance diffusée est 16 fois plus grande dans le bleu que dans le rouge, ce qui explique la couleur bleue du ciel en plein jour et par beau temps.

6-a) $dP_d(x)$ = la puissance diffusée par 1 molécule $\times$ le nb de molécules ds le cylindre

$$= (P_d) \times \underbrace{(n \times S dx)}_{\substack{\text{volume du cylindre} \\ \uparrow \\ \text{nb/unité de volume}}}$$

$$\rightarrow dP_d = \frac{n N^2 e^4 \pi(x) \omega^4 S dx}{6\pi \epsilon_0^2 c^4 m_e^2 \omega^4}$$

6-b)



$$P_i(x) - P_i(x+dx) = dP_d \quad \text{avec} \quad P_i(x) = \pi(x) \cdot S$$

$$\pi(x) \cdot S - \pi(x+dx) \cdot S = \frac{n N^2 e^4 \omega^4 \pi(x) \cdot S dx}{6\pi \epsilon_0^2 c^4 m_e^2 \omega^4}$$

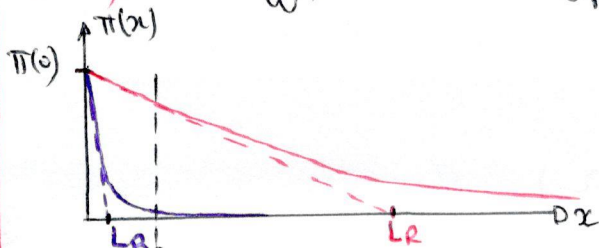
$$-\frac{d\pi(x)}{dx} dx = \frac{n N^2 e^4 \omega^4}{6\pi \epsilon_0^2 c^4 m_e^2 \omega^4} \pi(x) dx \Rightarrow \frac{d\pi}{dx} + \frac{n N^2 e^4 \omega^4}{6\pi \epsilon_0^2 c^4 m_e^2 \omega^4} \pi(x) = 0$$

$$\frac{d\pi}{dx} + \frac{\pi(x)}{L} = 0 \quad \text{eq diff du 1^{er} ordre d.d.m}$$

de solut^o générale $\pi(x) = \pi(0) e^{-x/L}$

$$\text{avec } L = \frac{6\pi \epsilon_0^2 c^4 m_e^2 \omega^4}{n N^2 e^4 \omega^4}$$

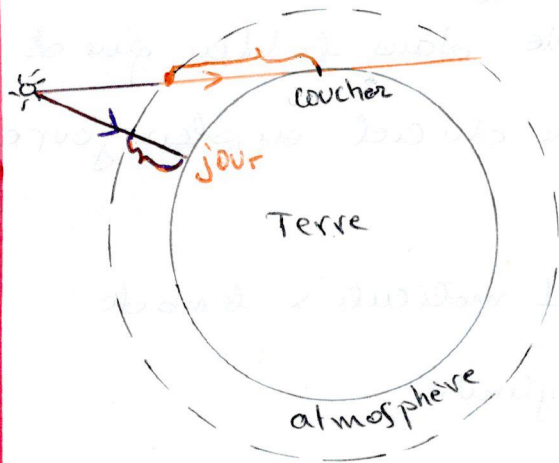
$$6-c) L = \frac{\alpha}{\omega^4} ; L_R = \frac{\alpha}{\omega_R^4} = \frac{\alpha}{\omega_B^4} \cdot 2^4 = 16 L_B$$



(Très Ben Amr)

Plus la lumière avance dans l'atmosphère, plus elle s'appauvrit en bleu (et en couleurs les plus diffusées)

6-d)



1) Au coucher, le soleil apparaît rouge, en effet un rayon direct émis par le soleil, traverse une grande épaisseur d'atmosphère, donc il s'appauvrit en bleu $\rightarrow$ il apparaît alors la couleur la plus résistante à la diffusion

2) En plein jour, le soleil apparaît jaune en effet, un rayon direct émis par

le soleil, traverse une épaisseur d'atmosphère moins importante qu'au coucher, d'où la couleur du soleil

