

Exercice 4

$$\vec{E} = E_0(x, y) e^{j(\omega t - k_y z)} \vec{u}_x$$

1.) Cette onde n'est pas plane car son amplitude varie qd $z = \text{cst}$.

•) Cette onde est progressive (couplage (z, t) suivant z)

•) son vecteur d'onde est $\vec{k}_y = k_y \vec{u}_z$

•) L'onde est polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_x$.

$$2) \text{div } \vec{E} = 0 ; \text{div } \vec{B} = 0 ; \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$3) \text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \text{or } \vec{E} = E_x \vec{u}_x$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 = \frac{\partial E_0(x, y)}{\partial x} = 0 \rightarrow \vec{E} \text{ ne depend pas de } x.$$

$$4) \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) = \text{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\text{rot} (\text{rot } \vec{E}) = \Delta \vec{E} - \text{grad}(\text{div } \vec{E})$$

$$= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

eq de propagation de $\vec{E}$

$$\Delta E_x = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_0(y)}{\partial y^2} e^{j(\omega t - k_y z)} - k_y^2 E_0(y) e^{j(\omega t - k_y z)} + \frac{\omega^2}{c^2} E_0(y) e^{j(\omega t - k_y z)} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_0(y)}{\partial y^2} + \Omega^2 E_0(y) = 0 \quad \text{avec } \Omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2$$

5/ L'eq caractéristique de l'eq diff précédente est $\Omega^2 + \Omega^2 = 0 \rightarrow r = \pm i\Omega$ ($\Omega^2 > 0$)

$$\rightarrow E_0(y) = A \sin(\Omega y) + B \cos(\Omega y) \text{ ou } E_{0y} = \alpha e^{j\Omega y} + \beta e^{-j\Omega y}$$

or $E(y=0) = 0 \rightarrow B = 0$ ou $E(y=0) = \alpha + \beta = 0 \rightarrow \beta = -\alpha$

et $E(y=b) = 0 \rightarrow A \sin \Omega b = 0 \rightarrow \Omega b = m\pi$
 $\rightarrow \Omega = \frac{m\pi}{b} ; m \in \mathbb{N}$

on pose $\alpha = E_0$ ou $A = 2jE_0$

$\rightarrow \vec{E} = 2jE_0 \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t - \beta y z)} \rightarrow \vec{u}_x$

6/ on a $\Omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$ et $\Omega = \frac{m\pi}{b}$

$\rightarrow \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$

relat° de dispersion

• La relat° entre β et ω n'est pas linéaire $\rightarrow$ le guide est donc dispersif.

7/ La propagat° est possible si $\beta \in \mathbb{R} \rightarrow \beta^2 > 0$

$\rightarrow \omega > \frac{m\pi c}{b} = \omega_{cm} : \text{pulsat° de coupure}$

or $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} > \frac{m\pi}{b} \rightarrow \lambda < \frac{2b}{m} = \lambda_{cm}$

8-a) $V_g = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cm}}{\omega}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cm}}{\omega}\right)^2}}$

8-b/ $\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \rightarrow 2\beta d\beta = 2\omega \frac{d\omega}{c^2}$
 $\rightarrow V_g = \frac{d\omega}{d\beta} = c^2 \frac{\beta}{\omega} = \frac{c^2}{V_p}$

$\rightarrow V_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cm}}{\omega}\right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cm}}\right)^2}$

8-c) on a $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cm}}{\omega}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{cm}^2}}$

$\rightarrow \frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{cm}^2}$

9-a) $b = 22,86 \text{ mm}$; $\omega_{cn} = \frac{n\pi c}{b} \rightarrow f_{cn} = \frac{nc}{2b}$

• $m = 1 \rightarrow f_{c1} = \frac{c}{2b} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \times 22,86 \cdot 10^{-3}} = 6,56 \text{ GHz}$

$\lambda_{c1} = 2b = 45,72 \text{ mm}$

• $m = 2 \rightarrow f_{c2} = \frac{2c}{2b} = 2 f_{c1} = 13,12 \text{ GHz}$; $\lambda_{c2} = \frac{\lambda_{c1}}{2} = 22,86 \text{ mm}$

9-b/ on a propagat° uniquement du mode fondamental ($m=1$) si l'onde satisfait la condit° de propagat° uniquement pour ce mode (et pas pour les autres)

or $\lambda < \frac{2b}{m}$: condit° de propagat°

$\lambda < \frac{2b}{1}$ et $\lambda > \frac{2b}{2} \rightarrow b < \lambda < 2b$

9-c/ il n'y a propagat° que si $f > f_{cm}$.

pour la diode Gunn et la fréquence varie entre 8,5 et 11 GHz, seul le mode fondamental $\exists$ ds le guide car $f_{c1} = 6,56 \text{ GHz}$ et $f_{c2} = 13,12 \text{ GHz}$

10/ (Rq: l'onde n'est pas plane $\rightarrow$ on ne peut pas alors utiliser la relat° $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$)

$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B}$

$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E(x,y,z) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial E}{\partial z} \\ -\frac{\partial E}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -j\omega B_x \\ -j\omega B_y \\ -j\omega B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -j B_y E \\ -2j E \Omega \cos(-2y) e^{j(\omega t - B_y z)} \end{vmatrix}$

$$\vec{B} = \begin{cases} 0 \\ B_y = 2 \frac{\hbar \gamma}{\omega} j E_0 \sin(\Omega y) e^{j(\omega t - \hbar \gamma z)} \\ B_z = \frac{2 E_0}{\omega} \Omega \cos(\Omega y) e^{j(\omega t - \hbar \gamma z)} \end{cases}$$

•) La composante transversale de $\vec{B}$ est B_y

•) La composante longitudinale de $\vec{B}$ est non nulle
 $\rightarrow \vec{B} \nparallel \vec{k}_y \rightarrow$ l'onde n'est pas transverse magnétique
 alors que $E_z \neq 0 \rightarrow$ l'onde est transverse électrique.

$$\begin{aligned} \bullet) \operatorname{div} \vec{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= 0 + 2j E_0 \frac{\hbar \gamma}{\omega} \Omega \cos(\Omega y) e^{j(\cdot)} - j \hbar \gamma \frac{2 E_0}{\omega} \Omega \cos(\Omega y) e^{j(\cdot)} \\ &= 0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{aligned}$$

$$11-a) \quad a = \frac{1}{3} \text{ et } b = \frac{3\lambda}{4} \rightarrow \lambda = \frac{4}{3} b$$

$\rightarrow b < \lambda < 2b \rightarrow$ seul le mode $m=1$ peut se propager.

$$11-b) \quad v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{3c}{\sqrt{5}}$$

$$v_g = \frac{c}{3} \sqrt{5}$$

$$12-a) \quad \langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{2 E_0^2}{\mu_0 \omega} \hbar \gamma \sin^2(\Omega y) \vec{u}_z$$

avec $\Omega = \frac{\pi}{b}$
($m=1$)

$$\begin{aligned} 12-b) \quad R_{\text{moy}} &= \frac{1}{b} \int_0^b \langle R \rangle dy = \frac{1}{b} \int_0^b \frac{2 E_0^2}{\mu_0 \omega} \hbar \gamma \sin^2\left(\frac{\pi}{b} y\right) dy \\ &= \frac{E_0^2 c^2}{\mu_0 \omega} \hbar \gamma = \epsilon_0 E_0^2 c^2 \frac{\hbar \gamma}{\omega} \\ &= \epsilon_0 E_0^2 v_g \end{aligned}$$

$$12-c) P = R_{\text{moy}} \cdot S = \epsilon_0 E_0^2 v_g \cdot a \cdot b$$

$$12-d) E_0 = \sqrt{\frac{P}{ab \epsilon_0 v_g}} \quad \text{or } a \cdot b = \frac{\lambda}{3} \times \frac{3\lambda}{4} = \frac{\lambda^2}{4} = \frac{c^2}{4\nu^2}$$

$$\text{et } v_g = \frac{c}{3} \sqrt{5}$$

$$\rightarrow E \approx 150 \text{ V.m}^{-1}$$

$$13-a) \left\langle \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right\rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \cdot 4 E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$\left\langle \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle = \frac{4E_0^2}{4\mu_0 \omega^2} \left[\mu_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \right]$$

$$W_{\text{moy}} = \frac{1}{b} \int_0^b \left(\left\langle \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle \right) dy$$

$$= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega^2} \underbrace{\left[\mu_0^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \right]}_{\frac{\omega^2}{c^2} \text{ (relat° de dispersion)}} = \epsilon_0 E_0^2$$

$$13-b) \eta = \frac{P_{\text{moy}}}{W_{\text{moy}}} = \text{vitesse de propagation de l'énergie moy}$$

$$\eta = \frac{\epsilon_0 E_0^2 v_g}{\epsilon_0 E_0^2} = v_g : \text{L'énergie moyenne se propage à la vitesse de groupe (milieu transparent)}$$