



TD N°5 : Optique ondulatoire

Exercice 1: Dispositif d'Young à l'infini : Montage de Fraunhofer

Un dispositif à fentes d'Young est utilisé pour réaliser des interférences lumineuses à partir de la lumière rouge d'un laser, de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 653 \text{ nm}$.

La source S placée au foyer objet d'une lentille convergente L_1 , de centre optique O et d'axe principal SOz , éclaire deux fentes F_1 et F_2 identiques, parallèles à l'axe Oy , symétriques par rapport à Oy et distantes de a . On observe l'éclairement sur un écran placé dans le plan focal d'une lentille L_2 de distance focale f' située entre le plan des fentes et l'écran. Un point M de l'écran est repéré par son abscisse $x = F'M$.

1.a) Représenter la marche de deux rayons lumineux issus de S et dont les vibrations se superposent en M . en déduire la différence de marche $\delta(M)$ en fonction de a, x et f' .

1.b) Déterminer l'intensité lumineuse $I(x)$ en fonction de a, f', x, λ_0 et de l'intensité lumineuse I_0 d'une fente.

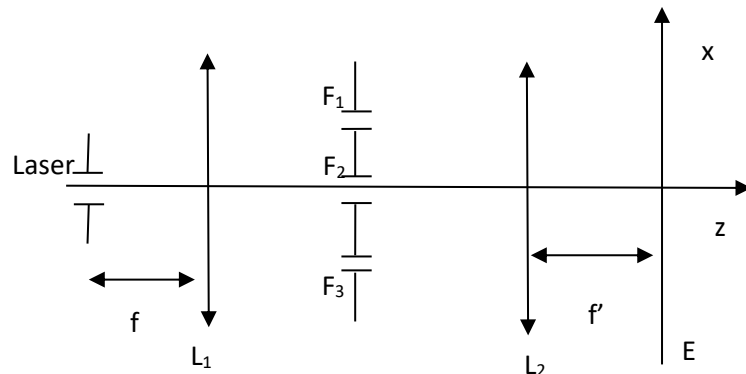
1.c) Représenter $I(x)$. Quelle est l'ordre d'interférence p en F' et en M ?

A.N : Calculer i pour $a = 1 \text{ mm}$ et $f' = 50 \text{ cm}$.

2) Une lame de verre d'épaisseur e , d'indice n , est placée avant F_1 (en $x = \frac{a}{2}$). Déterminer la nouvelle position de la frange centrale. De combien d'interfranges s'est-elle déplacée?

A.N : $n = 1,500$ et $e = 0,01 \text{ mm}$

3) Dans le montage précédent, on remplace le dispositif de deux fentes par un dispositif de trois fentes F_1, F_2 et F_3 équidistantes de a et perpendiculaires au plan xOz .



3.1) Tracer le cheminement des rayons issus du laser arrivant au point M après avoir traversé les trois fentes.

3.2) Les vibrations qui interfèrent en M sont-elles cohérentes ? Justifier.

3.3) Etablir l'expression du déphasage φ entre les vibrations issues de deux fentes successives en fonction de a, x, λ_0 et f' .

3.4) La fente F_2 émet la vibration complexe $\underline{S}_2 = Ae^{j\omega t}$ prise comme origine des phases. Montrer que la vibration résultante $\underline{S}$ en un point M de l'écran s'écrit :

$$\underline{S} = \underline{S}_2 [1 + 2\cos\varphi]$$

3.5) Déterminer l'intensité $I(\varphi)$.

3.6) On ferme la fente centrale F_2 . Exprimer l'intensité au point M en fonction de x, I_0 et l'interfrange i_f . Calculer i_f pour $a = 0,5 \text{ mm}$, $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ et $f' = 50 \text{ cm}$.

Exercice 2 : Le biprisme de Fresnel ; Cohérence spatiale

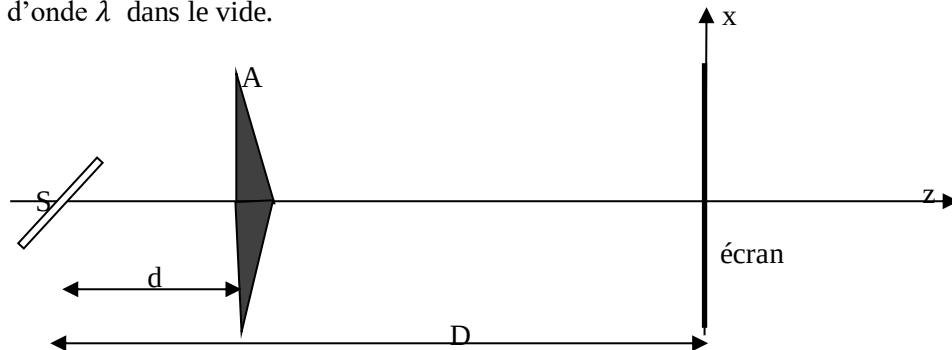
A. Un faisceau lumineux parallèle tombe sous incidence normale sur toute la face d'entrée d'un prisme droit de petit angle au sommet A et d'indice n.

- 1) Représenter sur un schéma le faisceau émergent du prisme dans un plan de section principale.
- 2) Exprimer l'angle de déviation α en fonction de n et A en supposant la faible valeur de l'angle A.
- 3) Calculer numériquement α .

B. Champ d'interférence par une source ponctuelle à distance finie

Un dispositif interférentiel comprend :

- Deux prismes identiques à celui décrit précédemment, accolés par leurs bases et placés symétriquement de part et d'autre de l'axe optique Sz.
- Une fente source de centre S, infiniment fine, parallèle à l'arête commune des deux prismes et située dans leur plan de symétrie à la distance d. La lumière émise par S est supposée monochromatique de longueur d'onde λ dans le vide.



- 4) Tracer la marche des rayons issus de la source S. En déduire la position des sources secondaires S₁ et S₂ et leur écartement a en fonction de n, A et d. Le dispositif est ainsi équivalent à celui des fentes d'Young.
- 5) Dessiner le champ d'interférence et décrire le système des franges observées sur l'écran.
- 6) Exprimer en fonction de d, D, n et A la différence de marche δ en un point M de l'écran, en déduire l'interfrange i. Combien de franges peut-on espérer voir ? $d = 10\text{cm}$; $D = 1\text{m}$; $n = 1,5$; $A = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ et $\lambda = 546 \text{ nm}$ (vert du mercure Hg).

C. Interférence avec une source large

- 7) Le système est de nouveau éclairé en lumière monochromatique ($\lambda = 546\text{nm}$) et la source S est toujours constituée d'une fente infiniment fine. On déplace la source S parallèlement à elle-même d'une quantité $SS' = x_s$. Montrer que la nouvelle différence de marche δ' en un point M d'abscisse x s'écrit :

$$\delta' = \frac{a}{D}(x - x_s).$$

a étant la distance entre les sources secondaires S₁ et S₂

- 8) On suppose maintenant que la fente source placée en S (centré sur l'axe z'z) a une largeur 2ε.

8.a) Montrer que l'éclairement résultant en tout point de l'écran est sous la forme :

$$I = 2I_0(1 + B\cos\varphi) ;$$

B et φ étant des quantités que l'on déterminera. Quelle est la signification de B ?

8.b) Décrire le phénomène observé lorsque l'on fait croître progressivement ε à partir de zéro.

Exercice 3 : Miroir de Lloyd, cohérence spatiale

L'espace est rapporté à un repère $(Oxyz)$ de base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

On considère un miroir carré (M) , de côté ℓ , disposé dans le plan (yOz) , symétriquement par rapport à $(z'z)$ et dans l'espace des z négatifs. Ce miroir est éclairé par une source S , de coordonnées cartésiennes $(h, 0, -(\ell + d))$. On désigne par S' l'image de S par (M) .

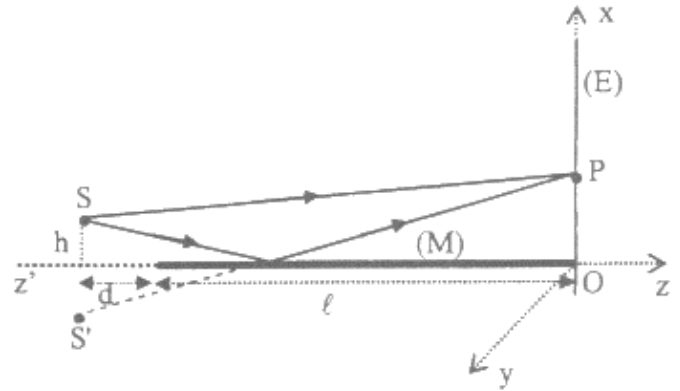
On observe le phénomène d'interférences dans un plan (E) confondu avec le plan (xOy) .

On donne $\ell = 24 \text{ cm}$, $d = 1 \text{ cm}$ et $h = 0,3 \text{ mm}$ avec $(\ell + d) \gg h$.

I- Source ponctuelle monochromatique

La source S , supposée ponctuelle, émet de la lumière monochromatique de longueur d'onde

$$\lambda_0 = 600 \text{ nm}.$$



1.a) Justifier pourquoi ce dispositif est à division de front d'onde.

1.b) Représenter le champ d'interférence.

2.a) Montrer que l'intensité lumineuse en un point P de (E) s'écrit:

$$I(P) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{2hx}{\ell + d} + \frac{\lambda_0}{2} \right) \right) \right]$$

2.b) Quelle est la nature de la frange en $x = 0$? Justifier.

2.c) Calculer l'interfrange i .

2.d) Déterminer le nombre de franges sombres N_s observées.

II- Source étendue

3) La source monochromatique ponctuelle S est déplacée parallèlement à (Oy) .

Dire en le justifiant si la figure d'interférence obtenue précédemment est modifiée.

4) La source S étant ramenée à sa position initiale. On ajoute deux sources ponctuelles S_1 et S_2 , identiques à S , émettant la même longueur d'onde que S , à une même distance de part et d'autre de S . Le segment S_1S_2 de centre S est parallèle à (Oy) .

Qu'observe-t-on sur (E) ? Justifier.

5) Le miroir (M) est maintenant éclairé par une fente F_s de largeur a ($a < h$) suivant (Ox) et de longueur b parallèle à (Oy) . F_s est centrée sur la position initiale de S .

On suppose que l'intensité élémentaire dI émise par un élément dX de F_s , centré sur un point d'abscisse X par rapport au centre de la fente en un point P de (E) s'écrit:

$$dI(P) = 2 \frac{I_0}{a} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_g(P) \right) \right] dX$$

où $\delta_g(P)$ est la différence de marche géométrique en un point P de (E) .

5.a) Montrer que l'intensité en un point P de (E) s'écrit:

$$I(x) = 2I_0 \left(1 - \operatorname{sinc} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{l+d} \right) \cos \left(\frac{2\pi x}{i} \right) \right)$$

Où i est l'interfrange déterminée dans I.2.c).

5.b) Tracer l'allure de $I(x)$ pour $h = 3a$. Commenter.

Pour quelles valeurs de x obtient-on un brouillage de la figure d'interférence?

Exercice 4 : Miroirs de Fresnel en lumière blanche

Deux miroirs de Fresnel sont éclairés par une source ponctuelle S de lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$. La distance L entre la source S et l'arête commune O des miroirs est égale à 10 cm , le petit angle formé par les deux miroirs est noté α . On appelle a la distance entre les deux sources S_1 et S_2 symétriques de S données par les deux miroirs M_1 et M_2 . La figure d'interférence observée sur un écran E perpendiculaire à la direction moyenne des rayons réfléchis OO' . La distance D entre l'arête O des miroirs et la position de l'écran E est grande devant a , elle égale à $1,5 \text{ m}$.

1) On observe un interfrange égal à $0,8 \text{ mm}$. En déduire la valeur de l'angle formé par les deux miroirs.

2.a) Décrire les franges observées sur l'écran E quand la source émet de la lumière blanche.

2.b) En un point M tel que $OM = x = 3 \text{ mm}$, on analyse la lumière à l'aide d'un spectroscopie. Le spectre observé, appelé spectre cannelé, présente des bandes sombres (cannelures). Montrer, en utilisant la longueur de cohérence de la lumière blanche, qu'on n'observe pas de franges en M . Calculer les longueurs d'onde correspondants aux cannelures.

Exercice 5 : L'interféromètre de Michelson

On étudie des phénomènes d'interférences à deux ondes que l'on illustrera à l'aide de l'interféromètre de Michelson.

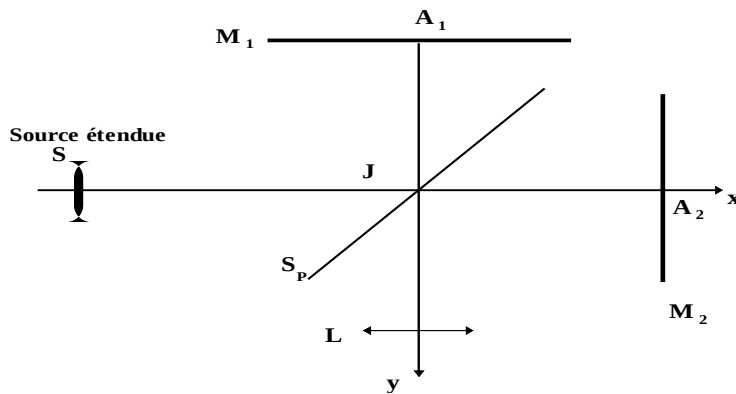
1) Pour obtenir des interférences à deux ondes, on peut utiliser, soit un dispositif à division de front d'onde, soit un dispositif à division d'amplitude.

1.1) Préciser pour les deux cas suivants, la localisation des franges en lumière monochromatique avec :

- a) une source ponctuelle,
- b) une source étendue.

1.2) Quel est le rôle de la longueur de cohérence dans les conditions d'observation des franges d'interférences?

2) Un interféromètre de Michelson est constitué par une lame semi réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice S_P dont les facteurs de transmission et de réflexion valent $1/2$, et de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. La lame S_P est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 . L'interféromètre est plongé dans l'air. Dans tout le problème, on ne tiendra compte, ni des inconvénients liés à l'épaisseur non négligeable de la séparatrice (qui sont supposés parfaitement corrigés grâce à une lame compensatrice), ni d'éventuels changements de phases par réflexion. L'indice de l'air sera pris égal à 1.



On utilise comme source étendue S une lampe spectrale de symétrie de révolution autour de l'axe SJ .

2.1) On part de la situation où les deux bras sont égaux ($JA_1 = JA_2$). On observe en lumière monochromatique dans le plan focal d'une lentille mince convergente L d'axe optique Jy et de distance focale $f' = 1m$.

2.1.a) Qu'observe-t-on ?

2.1.b) Pourquoi est-il nécessaire de diaphragmer la lentille ou de limiter l'inclinaison des rayons incidents issus de la source primaire ?

3) On déplace M_2 normalement à son plan de $e = 1,1 mm$ dans la direction des x positifs.

3.1) Montrer à l'aide d'un schéma que le phénomène d'interférences observé est analogue à celui d'une lame d'air à faces parallèles.

3.2) Donner en le justifiant, le lieu de localisation des franges d'interférences.

3.3) Avec une raie de longueur d'onde $\lambda = 546,1 nm$ dans le vide, déterminer le rayon du premier anneau brillant.

3.4) On place sur le bras JA_1 et parallèlement au miroir M_1 , une lame d'épaisseur $e' = 9,5 \mu m$ et d'indice $n = 1,5117$. Calculer la variation de l'ordre d'interférence au centre et le rayon du premier anneau brillant.

4) A partir de la situation où les deux bras sont égaux ($JA_1 = JA_2$), on fait tourner le miroir M_2 d'un angle α très faible autour d'un axe perpendiculaire JA_1A_2 et passant par A_2 , le dispositif est donc équivalent à un coin d'air d'angle α .

4.1) Comment éclairer le coin d'air sous incidence quasi-normale?

4.2) Pour des rayons lumineux voisins de l'incidence normale, faire apparaître à l'aide d'un schéma, la position du plan de localisation de la figure d'interférences.

4.3) Comment faut-il placer la lentille L pour observer les interférences sur un écran?

4.4) Caractériser le système de franges et donner la valeur de l'interfrange i_E sur l'écran, sachant que le grandissement de la lentille est 4.

Application numérique: $\alpha = 1 \text{ minute d'arc}$, $\lambda = 546,1 nm$. Donner la valeur de i_E .

4.5) On éclaire le coin d'air en lumière blanche, et on replace la lame d'épaisseur e' . Indiquer un moyen de déterminer l'épaisseur e' ou l'indice moyen de la lame.

5) L'interféromètre est réglé en lame d'air. La source primaire est maintenant une lampe à vapeur de sodium dont on suppose que le spectre d'émission ne contient que deux raies intenses, de couleur jaune et de longueur d'onde $\lambda_1 = 589,0 nm$ et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ avec $0 \ll \Delta\lambda \ll \lambda_0$.

On déplace le miroir M_2 de façon à faire défiler les franges obtenues dans la question 4. On constate que les franges disparaissent lorsque le déplacement de M_2 est $d = 0,15 \text{ mm}$. En déduire $\Delta\lambda$ et λ_2 .

Exercice 6 : Interférence à N ondes : réseau plan

Un miroir rectangulaire plan de largeur ε et de longueur Λ est éclairé par une onde plane monochromatique, de longueur d'onde λ , sous l'angle d'incidence i_1 . On observe la lumière diffractée à l'infini dans le demi-espace contenant l'onde incidente. La longueur Λ est suffisamment grande pour ne pas considérer la diffraction dans la direction correspondante.

L'expression de l'intensité de l'onde diffractée par le miroir dans la direction faisant l'angle i_2 avec la normale du miroir est donnée par :

$$I_{\text{Diff}} = I_0 \text{sinc}^2[U] \quad \text{avec} \quad U = \frac{\pi\varepsilon}{\lambda} (\sin i_1 + \sin i_2)$$

Les angles i_1 et i_2 sont comptés à partir de la normale au miroir, positivement dans le sens trigonométrique (figure 1.a).

Interférence à N ondes avec un réseau plan

Un réseau plan est constitué de N miroirs parallèles identiques de largeur ε , séparés les uns des autres par une distance h , dite pas du réseau. Le réseau est éclairé par une onde plane monochromatique, de longueur d'onde λ , sous l'angle d'incidence i_1 (figure 1.b)

1) Montrer que l'intensité de l'onde diffractée à l'infini par l'ensemble du réseau dans la direction faisant

$$\text{l'angle } i_2 \text{ peut s'écrire sous la forme : } I_R = I_{0R} \text{sinc}^2[U] \left[\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right]^2$$

Exprimer φ en fonction de λ , h et $(\sin i_1 + \sin i_2)$. que représente I_{0R} ?

2.a) Simplifier l'expression donnant I_R pour une largeur ε des miroirs très petite ($\varepsilon \ll \lambda$).

L'étude de cette fonction simplifiée montre l'existence de :

- Maximas principaux pour $\varphi = 2p\pi$ où p est un entier (appelé ordre),
- Maximas secondaires d'intensité négligeable,
- Minimas nuls pour $\varphi = m \left(\frac{2\pi}{N} \right)$ où m est un entier différent de pN

2.b) Donner alors l'allure de $I_R(\varphi)$.

3) En tenant compte du fait que $N \gg 1$, quelle valeur $(\delta i_2)_{1/2}$ pour la demi-largeur angulaire d'un maximum principal d'ordre p ? Exprimer $(\delta i_2)_{1/2}$ en fonction de i_2 , N , h et λ .

4) Pour une longueur d'onde $\lambda + \delta\lambda$ voisine de λ , la direction d'un maximum principal d'ordre p varie de $(\delta i_2)_{\text{max}}$ par rapport à celle correspondant à λ dans le même ordre. Exprimer $(\delta i_2)_{\text{max}}$ en fonction de i_2 , p , h et $\delta\lambda$.

5) La lumière incidente contient en fait deux radiations de longueurs d'ondes λ et $\lambda + \delta\lambda$. en adoptant le critère de Rayleigh, quel est le plus petit écart $\Delta\lambda_{\text{min}}$ de longueur d'onde que l'on peut détecter dans la

région d'un maximum principal d'ordre p ? exprimer alors le pouvoir de résolution théorique du réseau :

$$R_{th} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}} \text{ en fonction de } p \text{ et } N.$$

- 6) On utilise une lampe à vapeur de mercure, munie d'un filtre jaune qui ne laisse passer que deux radiations très voisines d'égale intensité et de longueur d'onde $\lambda_1=577 \text{ nm}$ et $\lambda_2=579 \text{ nm}$ (doublet jaune de mercure). Le réseau utilisé, comportant 400 miroirs /mm, est éclairé sur une largeur $L=1 \text{ cm}$. Ce doublet est-il résolu dans le spectre d'ordre 1 ?

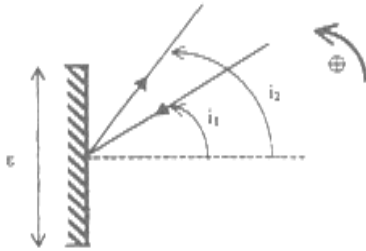


Figure 1-a

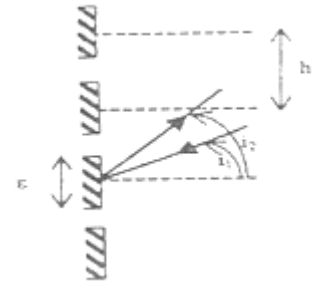
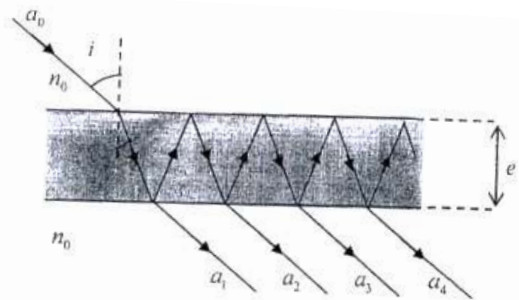


Figure 1-b

Exercice 7 : filtre interférentiel

Un filtre interférentiel est une lame mince de verre à face parallèles d'épaisseur e et d'indice n (on prend $n = 1.5$), qu'on place dans l'air d'indice $n_0 = 1$. On suppose que n_0 et n ne dépendent pas de la longueur d'onde. Pour un rayon lumineux de longueur d'onde λ , arrivant sous incidence i , cette lame donne par transmission et réflexion une infinité de rayons émergents (on ne s'intéressera pas aux rayons émergents de la lame par réflexion).



Pour diminuer les pertes dans le filtre on augmente le pouvoir réflecteur de la lame de verre en déposant sur chacune de ces faces une mince couche semi-réfléchissante non absorbante d'un diélectrique. On notera les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique par $r_2 = r_{\text{verre traité} \rightarrow \text{air}}$, $t_1 = t_{\text{air} \rightarrow \text{verre traité}}$ et $t_2 = t_{\text{verre traité} \rightarrow \text{air}}$

Et on notera R le coefficient de réflexion en puissance de la surface air/verre traité avec $R = r_2^2$.

- 1- Soient a_0 l'amplitude de l'onde incidente et $a_1, a_2, \dots, a_N$ les amplitudes respectives du 1^{er}, 2^{ème}, ..., N^{ème} rayon transmis. Déterminer les rapports $\frac{a_1}{a_0}$ et $\frac{a_2}{a_0}$, puis déduire le rapport $\frac{a_N}{a_0}$ en fonction de r_2, t_1, t_2 et $(N-1)$.

2- Montrer que le déphasage φ entre deux ondes transmises successives est $\varphi = \frac{4\pi ne}{\lambda} \cos i'$ avec i' est l'angle de réfraction.

3- Montrer que la vibration lumineuse associée au $N^{\text{ième}}$ rayon transmis, au point M situé à l'infini s'écrit : $\underline{s}_N(M, t) = \underline{s}_1(M, t) R^{N-1} e^{-j(N-1)\varphi}$

avec $\underline{s}_1(M, t) = a_1 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{SM})}$ la vibration lumineuse associée au premier rayon.

En déduire la vibration lumineuse résultante au point M qu'on note $\underline{s}(M, t)$.

Exprimer $I(M)$ en fonction de $\underline{s}(M, t)$.

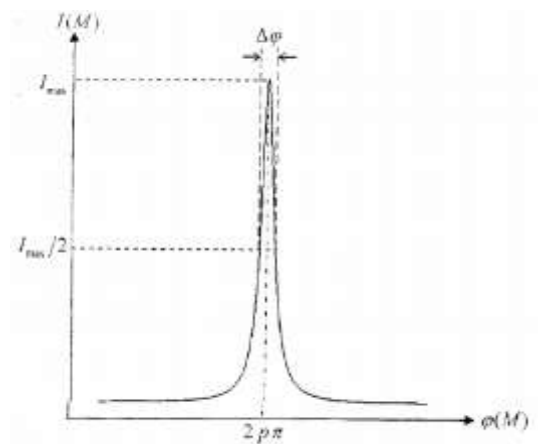
4-

5- L'intensité lumineuse associée à l'onde totale transmise par le filtre est de la forme :

$$I(M) = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

4-a- Quelle doit être la valeur du coefficient R pour que le contraste défini par $\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max}}$ soit égal à 0.95 ? $I_{\max}$ et $I_{\min}$ désignent les intensités transmises respectivement maximale et minimale.

4-b- On définit la largeur angulaire à mi-hauteur $\Delta\varphi$ par l'intervalle à l'intérieur duquel l'intensité transmise $I(M)$ est supérieure ou égale à la moitié de sa valeur maximale. Sachant que $\Delta\varphi$ est faible, déterminer son expression. En déduire que le pouvoir de résolution du filtre s'écrit : $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = p \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$ où p est un entier.



6- Le filtre est éclairé en incidence normale par un faisceau parallèle de lumière blanche. L'épaisseur e est choisie de sorte que ce filtre transmet un maximum d'intensité pour la longueur d'onde $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$ et qu'il atténue tout le reste du spectre du visible dont les longueurs d'ondes sont comprises entre 400 nm et 800 nm .

5-a- Montrer que les valeurs possibles de l'épaisseur e de la lame de verre sont : $e = p \frac{\lambda_0}{2n}$ avec p entier non nul.

5-b- Quelle est l'influence de l'épaisseur e sur les performances du filtre ?

5-c- Déterminer la bande passante $\Delta\lambda$ du filtre pour $e = 0.36 \mu\text{m}$. On prendra $R = 0.9$