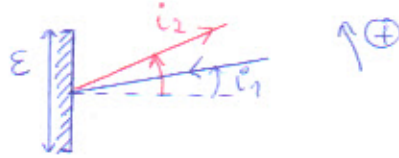


Problème 6



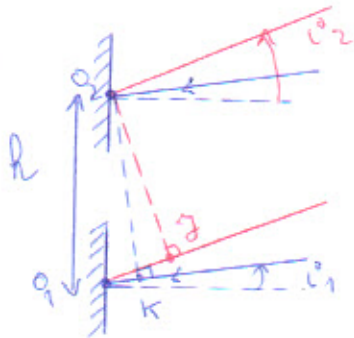
$$\varepsilon \approx \lambda$$

$$\lambda \gg \lambda$$



$$I_{\text{Diff}} = I_{0R} \text{sinc}^2 u \quad \text{avec} \quad u = \frac{\pi \varepsilon}{\lambda} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$

1°



Soit φ le déphasage entre 2 ondes diffractées dans la m^{ème} direction i_2 par 2 miroirs consécutifs.

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \quad \text{avec} \quad \delta = [O_1 K] + [O_1 J]$$

$$\delta = h [\sin \theta_1 + \sin \theta_2]$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} h [\sin \theta_1 + \sin \theta_2]$$

Soit A_1 l'amplitude complexe de l'onde diffractée par le 1^{er} miroir ds la direction i_2 .

A_2 , l'amplitude complexe de l'onde diffractée par le 2^{ème} miroir ds la direction i_2 , est égale à : $A_2 = A_1 e^{j\varphi}$

$$A_R = A_1 + A_1 e^{j\varphi} + A_1 e^{j2\varphi} + \dots + A_1 e^{j(N-1)\varphi}$$

$$= A_1 \frac{1 - e^{jN\varphi}}{1 - e^{j\varphi}} = A_1 e^{j(N-1)\varphi/2} \frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \varphi/2}$$

$$\Rightarrow I_R = \langle A_R \cdot A_R^* \rangle = \langle A_1 \cdot A_1^* N^2 \left(\frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{N \sin \varphi/2} \right)^2 \rangle$$

$$\text{avec} \langle A_1 \cdot A_1^* \rangle = I_{\text{Diff}} = I_{0R} \text{sinc}^2 u$$

$$I_R = \underbrace{N^2 I_{0R} \sin^2 u}_{I_{\max}} \left(\frac{\sin N \varphi/2}{N \sin \varphi/2} \right)^2$$

$$I_{\max} = N^2 I_{0R} \sin^2 u$$

$$I_{\text{diff}} = I_{0R} \sin^2 \left(\frac{\pi E}{\lambda} (\sin i_1 + \sin i_2) \right)$$

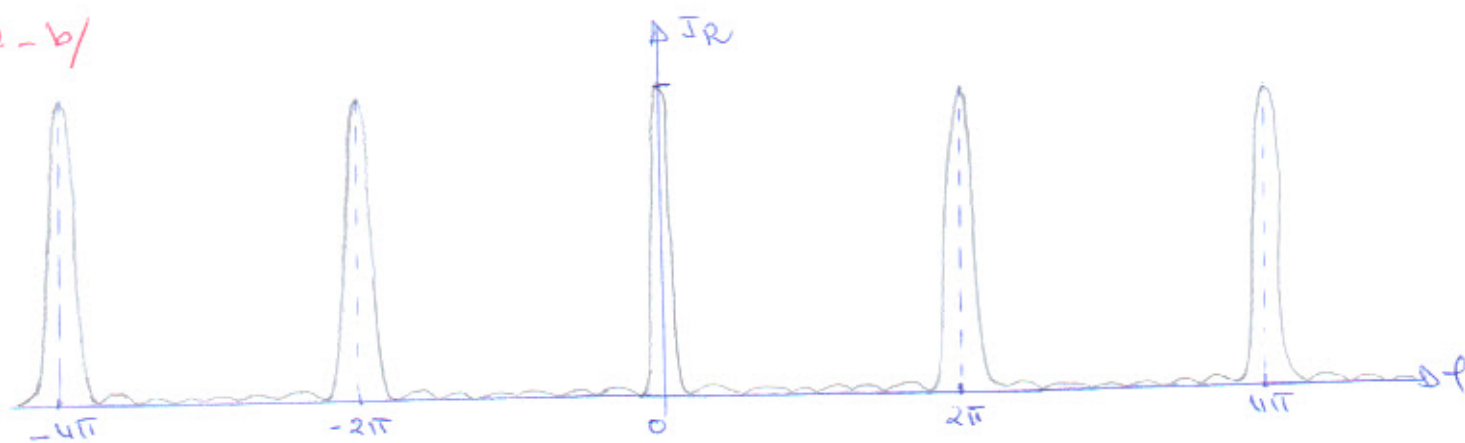
pour $i_2 = -i_1$, $I_{\text{diff}} = I_{0R} = I_{\text{diff}}(u=0)$

I_{0R} représente l'intensité de l'onde diffractée par le miroir dans la direction prévue par l'optique géométrique.

2-a/ si $E \ll \lambda \Rightarrow \frac{E}{\lambda} \ll 1 \Rightarrow u \rightarrow 0 \Rightarrow \sin^2 u \rightarrow 1$

$$I_R = I_{0R} N^2 \left(\frac{\sin N \varphi/2}{N \sin \varphi/2} \right)^2$$

2-b/



3- La demi-largeur angulaire d'un maximum principal correspond à $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$

or $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} h (\sin i_1 + \sin i_2)$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} h \cos i_2 \Delta i_2 = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow (\Delta i_2)_{1/2} = \frac{\lambda}{N h \cos i_2}$$

4° pour un maximum principal $\ell = 2\pi p$ or $\ell = \frac{2\pi}{\lambda} h (\sin i_1 + \sin i_2)$

$\Rightarrow \sin i_2 + \sin i_1 = p \frac{\lambda}{h}$: formule fondamentale du réseau par réflexion

$$\rightarrow \cos i_2 \cdot d i_2 = p \frac{d\lambda}{h} \Rightarrow (S i_2)_{\max} = \frac{p \lambda}{h \cos i_2}$$

5° $\Delta d_{\min}$ correspond à $(S i_2)_{1/2} = (S i_2)_{\max}$

$$\frac{\lambda}{N \cancel{h} \cos i_2} = \frac{p \Delta d_{\min}}{\cancel{h} \cos i_2} \Rightarrow R_{Th} = \frac{\lambda}{\Delta d_{\min}} = p \cdot N$$

6° $d_1 = 577 \text{ nm}$

$$d_2 = d_1 + \Delta d = 579 \text{ nm} \Rightarrow \Delta d = 2 \text{ nm}$$

le nb de miroir $N = 400 \times 10 = 4000$

à l'ordre 1, $\Delta d_{\min} = \frac{\lambda_1}{N} \approx 0,14 \text{ nm}$

$\Delta d > \Delta d_{\min} \rightarrow$ la résolution du doublet jaune de mercure est possible à l'ordre 1.

PB 7: filtrer interférentiel

1°)

$$a_1 = a_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_0} = t_1 \cdot t_2$$

$$a_2 = a_0 \cdot t_1 \cdot r_2 \cdot r_2 \cdot t_2 \Rightarrow a_2 / a_0 = t_1 \cdot t_2 \cdot r_2^2$$

$$a_3 = a_0 \cdot t_1 \cdot r_2^4 \cdot t_2$$

$$a_4 = a_0 \cdot t_1 \cdot r_2^6 \cdot t_2 = a_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot r_2^{2(N-1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a_N}{a_0} = t_1 \cdot t_2 \cdot r_2^{2(N-1)}}$$

2°) $S = 2ne \cos i' \Rightarrow \ell = \frac{2nS}{\lambda} = \frac{4\pi ne}{\lambda} \cos i'$

3°) $S_1(M,t) = a_1 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{SM})}$

$$S_2(M,t) = a_2 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{SM})} e^{-j\varphi}$$

$$= a_1 r_2^2 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{SM})} e^{-j\varphi}$$

$$= a_1 R e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{SM})} e^{-j\varphi}$$

$$S_3(M,t) = a_3 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{SM})} e^{-j2\varphi}$$

$$= a_1 e^{-j2\varphi} R^2 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{SM})}$$

$$\Rightarrow S_N(M,t) = S_1(M,t) R^{N-1} e^{-j(N-1)\varphi}$$

$$\underline{S} = \sum \underline{S}_i \text{ et } I = \langle \underline{S} \cdot \underline{S}^* \rangle$$

4- $I(M) = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$

4-a) $I_{\max} = I_0 \quad (\sin^2 \varphi/2 = 0)$

$$I_{\min} = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}} \quad (\sin^2 \varphi/2 = 1)$$

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max}} = 1 - \frac{I_{\min}}{I_{\max}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}}$$

$$= \frac{(1-R)^2 + 4R - (1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R}$$

$$= \frac{4R}{(1-R)^2 + 4R} = \gamma$$

$$4R = \gamma(1-R)^2 + 4R$$

$$\frac{4R}{\gamma} = 1 + R^2 - 2R + 4R = 1 + R^2 + 2R$$

$$\Rightarrow R^2 + 2\left(1 - \frac{2}{\gamma}\right)R + 1 = 0 : \text{eq 2}^{\text{nd}} \text{ degree}$$

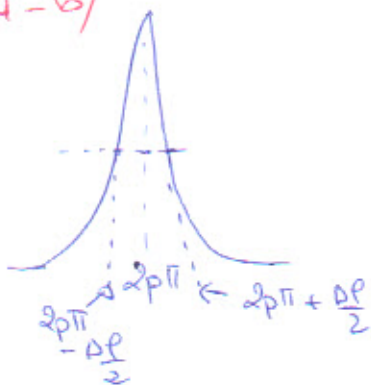
$$\Delta = 4\left(1 - \frac{2}{\gamma}\right)^2 - 4 = 4\left(1 - \frac{2}{0,95}\right)^2 - 4 \approx 0,88$$

$$R_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0,64$$

$$R_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 1,57 > 1 \text{ a rejeter}$$

$$\text{car } R+T=1 \Rightarrow R < 1 \Rightarrow \boxed{R = 0,64}$$

4-b/



$$I(2p\pi \pm \frac{\Delta f}{2}) = \frac{I_{\max}}{2} = \frac{I_0}{2}$$

$$\frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(p\pi \pm \frac{\Delta f}{4})} = \frac{I_0}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(p\pi \pm \frac{\Delta f}{4}) = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2(p\pi \pm \frac{\Delta f}{4}) = \frac{(1-R)^2}{4R}$$

$\sin^2$ est π périodique $\Rightarrow \sin^2(p\pi \pm \frac{\Delta f}{4}) = \sin^2(\frac{\Delta f}{4})$
 et paire
 or $\sin x \approx x$ si x est faible $\Rightarrow \sin^2(\frac{\Delta f}{4}) \approx (\frac{\Delta f}{4})^2$

$$\left(\frac{\Delta\varphi}{4}\right)^2 = \frac{(1-R)^2}{4R} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

• on a $\varphi = \frac{2\pi s}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi s \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$
 et $\varphi = 2\pi p \Rightarrow s = p\lambda$ $\Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi p \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$

$$\Delta\varphi = 2\pi p \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} \Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{p\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

5°a) incidence normale $i = 0 \Rightarrow i' = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{4\pi n e}{\lambda_0}$

or I est maximale pour $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = p\pi$
 $\varphi = 2p\pi$

$$2p\pi = \frac{4\pi n e}{\lambda_0} \Rightarrow e = p \cdot \frac{\lambda_0}{2n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

b/ on a $e = p \frac{\lambda_0}{2n}$ et $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\pi\sqrt{R} p}{(1-R)}$

• qd $e \uparrow$, $p \uparrow \Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \uparrow \Rightarrow \Delta\lambda \downarrow \Rightarrow$ le filtre est plus sélectif

• ~~2°~~

c/ on a $p = \frac{2ne}{\lambda_0} = \frac{2 \times 1,5 \times 360}{546} = 2$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0(1-R)}{p \cdot \pi \sqrt{R}} = \frac{546(1-0,9)}{2 \times \pi \sqrt{0,9}} = 9,16 \text{ nm}$$