

Exercice 5 : O.P.P.M Thermique - effet de peau thermique

$T(0,t) = T_0 + \alpha \cos \omega t$; T_0 est la valeur moyenne de $T(0,t) = \langle T(0,t) \rangle$

1° invariance par translation // ent x (on) et (oy) $\Rightarrow T(x,t) = T(y,t)$

2° Loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \text{grad } T$

$\vec{j}_{th}$: vecteur densité du courant thermique conductif ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$)

λ : conductivité thermique ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)

T : Température (K)

3° $\theta(z,t) = T(z,t) - T_0$: l'écart de T à T_0 à l'intérieur du sol.

$$P_{th}(z,t) - P_{th}(z+dz,t) = c \cdot S \cdot dz \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$j_{th}(z,t) \cdot \cancel{S} - j_{th}(z+dz,t) \cdot \cancel{S} = c \cdot S \cdot \cancel{S} dz \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial j_{th}}{\partial z} = c \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{or} \quad j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = c \rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \text{or} \quad \theta = T - T_0 \rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = c \rho \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

4° $\theta(z, t) = \underline{f(z)} e^{i\omega t}$

$$D \left(\frac{\lambda}{c\rho} \right) \frac{d^2 \underline{f(z)}}{dz^2} = i\omega \underline{f(z)} \rightarrow \frac{d^2 \underline{f}}{dz^2} - \frac{i\omega}{D} \underline{f(z)} = 0$$

5° $\frac{d^2 \underline{f}}{dz^2} - \frac{i\omega}{D} \underline{f(z)} = 0$ eq diff du 2nd ordre d'eq caractéristique

$$r^2 - \frac{i\omega}{D} = 0 \rightarrow r^2 = \frac{i\omega}{D} = e^{i\pi/2} \frac{\omega}{D} \rightarrow r_{1/2} = \pm e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\omega}{D}}$$

$$r_{1/2} = \pm (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2D}} = \pm \frac{(1+i)}{\sqrt{\frac{2D}{\omega}}}$$

$$\underline{f(z)} = A e^{\frac{(1+i)z}{\sqrt{\frac{2D}{\omega}}}} + B e^{-\frac{(1+i)z}{\sqrt{\frac{2D}{\omega}}}}$$

$\underline{f(z)}$ ne doit pas diverger donc $A=0$

$$\Rightarrow \underline{f(z)} = B e^{-z/\delta} e^{-iz/\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$$

6° $\theta(z, t) = \underline{f(z)} e^{i\omega t} = B e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}$

or pour $z=0$, $\theta(0, t) = T(0, t) - T_0 = \alpha \cos \omega t \Rightarrow B = \alpha$

$$\theta(z, t) = \alpha e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}$$

7° $T(z, t) = T_0 + \theta(z, t)$

$$T(z, t) = T_0 + \alpha e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta)$$

interprétation

il s'agit d'une onde thermique plane progressive monochromatique amortie (O.P.P.H amortie), se propageant vers les $z > 0$

L'amortissement est caractérisé par la profondeur de pénétration δ (l'épaisseur de peau thermique).

pour des profondeurs $z \gg \delta$: $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow T(z,t) \rightarrow T_0 \forall t$
donc pour $z \gg \delta$: la température ne varie plus et prend une valeur cst T_0

8° $\varphi = \omega t - z/\delta$: phase

$$d\varphi = \omega dt - dz/\delta = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = v_\varphi = \omega \cdot \delta$$

$$\Delta t = \frac{z}{v_\varphi}$$

9° L_{10} est telle : $\frac{\alpha}{10} = \alpha e^{-L_{10}/\delta} \rightarrow \ln 10 = L_{10}/\delta$
 $\Rightarrow L_{10} = \delta \ln 10$

10° $D = 0,257 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

• Cas n°1 : variation quotidienne $T = 24 \text{ h} = 24 \times 3600 \text{ s}$

$$L_{10} = \ln 10 \cdot \sqrt{\frac{2D}{2\pi/T}} = \ln 10 \cdot \sqrt{\frac{2 \times 0,257 \cdot 10^{-6} \times 24 \times 3600}{2 \cdot \pi}}$$
$$\approx 19,35 \text{ cm}$$

• Cas n°2 : variation annuelle $T = 365 \times 24 \times 3600 \text{ s}$

$$L_{10} = \ln 10 \cdot \sqrt{\frac{2 \times 0,257 \cdot 10^{-6} \times 24 \times 3600 \times 365}{2 \cdot \pi}} \approx 3,7 \text{ m}$$

• Si ds un pays la T^{air} varie annuellement entre 25°C et -15°C

$$\rightarrow T_0 = (25 + (-15))/2 = 5^\circ\text{C}$$

α vaut alors 20°C ($= 25 - 5$ ou $15 + 5$)

à la profondeur L_{10} , l'amplitude de variatio est $\frac{\alpha}{10} = 2^\circ\text{C}$

$\rightarrow T(z=L_{10}, t)$ varie entre $T_0 + \frac{\alpha}{10}$ et $T_0 - \frac{\alpha}{10}$ donc entre 7°C et 3°C , ce qui est $> 0^\circ\text{C}$ (La T^{air} de solidification de l'eau)

→ les canalisations géothermiques devraient être enfouis à une profondeur de l'ordre de L_{10} .

11/ entre $z=0$ et $z=L_{10}$, le décalage temporel dû à la profondeur est $\Delta t = \frac{L_{10}}{V_f} = \frac{L_{10}}{wS} = \frac{L_{10} \cdot 8}{wS} = \frac{L_{10}}{w} = \frac{L_{10}}{2\pi} \cdot T$

1^{er} cas : $T = 24 \times 3600 \text{ s} \rightarrow \Delta t = \frac{L_{10}}{2\pi} \cdot 24 \times 3600$
 $= 8 \text{ w } 47' 42.818''$

2^{em} cas : $T = 365 \times 24 \times 3600 \text{ s} \rightarrow \Delta t = \frac{L_{10}}{2\pi} \times 365 \times 24 \times 3600$
 $= 133,76 \text{ jours,}$

