

TD: Transferts thermiques

Exercice 1 : Transfert thermique et courant électrique (d'après concours MP2003)

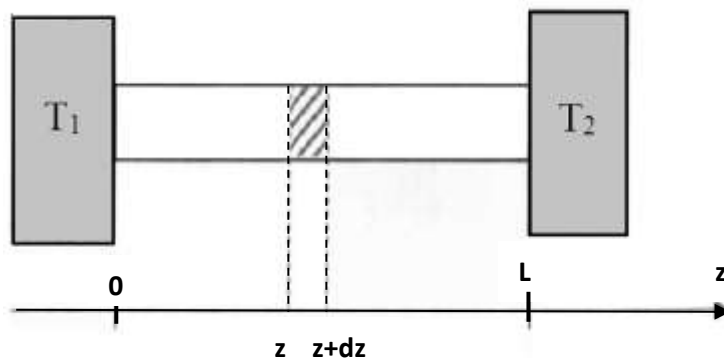
On considère un cylindre de rayon a parcouru par un courant électrique de vecteur densité volumique uniforme $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$. On désigne par μ sa masse volumique, par c sa capacité thermique massique et par λ sa conductivité thermique.

on admet que toutes les grandeurs caractérisant le milieu (λ, μ, γ, c) sont constantes, uniformes et indépendantes de la température.

Le cylindre est mis en contact thermique avec deux thermostats qui maintiennent ses extrémités, $z = 0$ et $z = L$, respectivement aux températures constantes T_1 et T_2 .

La surface latérale du cylindre est parfaitement calorifugée (paroi adiabatiques) de telle sorte que l'on peut négliger les transferts thermiques à travers cette surface.

Dans cette partie, seul le transfert thermique par conduction, régi par la loi de Fourier, est à considérer.



En se limitant à un phénomène unidimensionnel, pour lequel la température T ne dépend que de la variable z et éventuellement du temps t , l'équation différentielle vérifiée par la température $T(z, t)$ s'écrit :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{j_0^2}{\gamma} \quad (1)$$

- 1- En effectuant un bilan d'énergie sur une tranche du cylindre de longueur élémentaire dz , retrouver l'équation de diffusion thermique (1). On expliquera la signification physique du terme $\frac{j_0^2}{\gamma}$.
Dans la suite du problème, on travaillera en régime permanent.
- 2- Déterminer, la température $T(z)$ solution de l'équation de diffusion.
- 3- Dans le cas $j_0 = 0$, définir et exprimer la résistance thermique R_{th} de la barre cylindrique.
- 4- Pour $j_0 \neq 0$, exprimer la puissance $P(z)$ traversant, dans le sens des z croissants, une section droite d'abscisse z du cylindre.

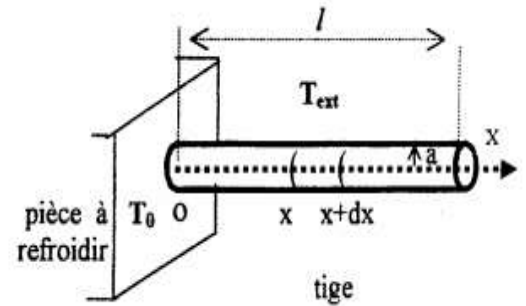
- 5- En déduire les expressions des puissances thermiques P_1 et P_2 reçues par les deux thermostats. Ecrire alors une relation entre P_1 , P_2 et la puissance P_J dissipée par effet Joule, dans le cylindre. Commenter.
- 6- On impose, à présent, aux deux extrémités, $z = 0$ et $z = L$ une même température T_0 ($T_1 = T_2 = T_0$). Vérifier que la température s'écrit alors : $T(z) = T_0 + \alpha(-z^2 + Lz)$. Exprimer α en fonction de j_0 , γ et λ .
- 7- On désigne par T_F la température de fusion du matériau conducteur. Afin d'éviter la fusion, montrer que l'intensité du courant électrique parcourant le cylindre doit être inférieure à une valeur I_0 que l'on exprimera en fonction de T_0 , T_F , λ , γ , a et L . Calculer I_0 et proposer une application.

On donne : $T_0 = 300K$; $T_F = 600K$; $\lambda = 102 W.m^{-1}.K^{-1}$; $\gamma = 4,3 \cdot 10^7 S.m^{-1}$; $a = 0,1mm$; $L = 1cm$

Exercice 2 : Ailette de refroidissement

Un radiateur est formé d'ailettes, chaque ailette est une tige d'aluminium, pleine, de conductivité thermique λ , cylindrique d'axe Ox , de rayon a et de longueur l infiniment grande devant a ($l \gg a$).

L'extrémité $x = 0$ de la tige, est fixée à une pièce métallique à refroidir, de température T_0 supposée constante ($T_0 = 100^\circ C$) et le reste de l'ailette est plongé dans l'air ambiant à température



$$T_{ext} = 20^\circ C.$$

On se place en régime statique et on considère que, dans la section droite de la tige d'abscisse x , la température $T(x)$ est uniforme.

Les transferts thermique dans l'ailette se font par conduction selon la loi de Fourier et par conducto-convection sur la surface latérale avec une densité de courant thermique vers l'extérieur égale à $h(T(x) - T_{ext})$; où h désigne un coefficient de transfert thermique constant et $T(x)$ est la température du point de la surface considérée.

1 – Ecrire l'expression de la loi de Fourier et exprimer le flux thermique qui traverse une section droite S de la tige d'abscisse x en fonction de a et de la densité de courant thermique $j_{th}(x)$.

2- En tenant compte du transfert thermique par convection, établir le bilan thermique pour une tranche d'ailette comprise entre les abscisses x et $x + dx$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$.

Par souci de simplification, on posera : $x_0 = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$

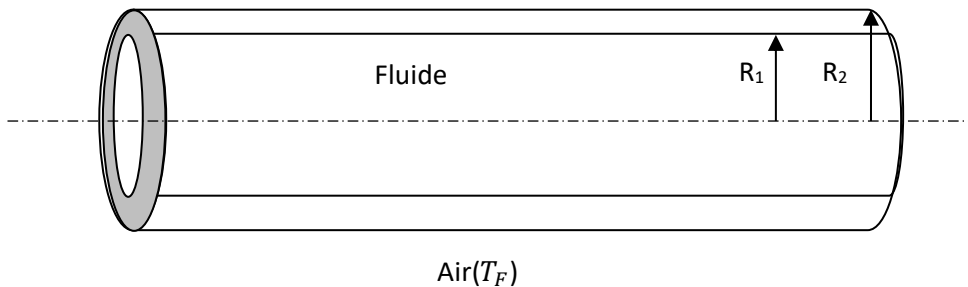
3- Détermination la répartition de température $T(x)$ au sein de la tige en supposant que lorsque x tend vers l'infini, $T(x)$ tend vers T_{ext} . Représenter graphiquement T en fonction de x . Quelle est la signification de x_0 ?

4- On suppose que les pertes thermiques par convection, pour la pièce métallique et pour la tige, se font avec des densités de courant thermique ayant la même valeur de h . Calculer les flux thermiques sortants de la pièce métallique à travers une surface circulaire de rayon a en $x = 0$ en présence de la tige, puis sans la tige. Comparer ces deux flux et conclure.

Application numérique : $a = 1mm$; $\lambda = 238 W.m^{-1}.K^{-1}$; $h = 8,36 W.m^{-2}.K^{-1}$

Exercice 3 : Transfert radial : Optimisation du rayon d'un échangeur

Un échangeur thermique avec une source froide est un tube métallique de rayon intérieur R_1 , de rayon extérieur R_2 et de conductivité thermique λ qui sépare le fluide à refroidir du milieu extérieur (ici l'air à la température constante T_F).



Les échanges thermiques diffuso-convectifs entre le fluide et le tube sont caractérisés par un coefficient h : la puissance thermique échangée par unité de surface est donc donnée par la loi de Newton $h(T_1 - T'_1)$, où T_1 représente la température du fluide en $r = R_1$ et T'_1 celle du métal au contact. De même, les échanges thermiques métal /air sont caractérisés par un coefficient h' . T'_F étant la température du métal en contact avec l'air.

- 1- Le tube et les conditions aux limites vérifient la symétrie de révolution autour de l'axe Δ du tube. Dans la base cylindrique d'axe Δ , la température T ne dépend que de r en régime stationnaire. La diffusion est alors dite radiale et le vecteur densité de courant thermique peut s'écrire $\vec{J}_{th}(M) = J_{th}(r)\vec{u}_r$

- 1-a- Faire un bilan énergétique sur le volume cylindrique situé entre r et $r + dr$, en déduire l'équation :

$$\frac{dJ_{th}}{dr} + \frac{J_{th}}{r} = 0$$

- 1-b- A l'aide de la loi de Fourier, établir l'expression de $T(r)$ en tenant compte de T'_1 et T'_F .

- 1-c- Déterminer la puissance thermique ϕ_{th} échangée, en régime permanent, entre un morceau de tube de longueur l et l'air, en fonction de $(T'_1 - T'_F)$, R_1 , R_2 , l et λ . Exprimer la résistance thermique du tube due à la diffusion R_{diff} .

- 1-d- Etablir l'expression de la résistance thermique R_{int} pour une longueur l de l'interface liquide /tube et R_{ext} pour une longueur l de l'interface tube/air, dues au phénomène diffuso-convectif.

- 1-e- En déduire la résistance thermique totale présentée par un morceau de longueur l du tube et permettant d'écrire le flux thermique transféré algébriquement du liquide vers l'air sous la forme $\phi_{th} = \frac{(T_1 - T_F)}{R_{th}}$

- 2- Etudier les variations de ϕ_{th} avec R_2 lorsque R_1, h, h', λ, T_1 et T_F sont fixés. Conclure.

Exercice 4: Etude du chauffage d'une station spatiale

Pour chauffer une station spatiale, on envisage d'utiliser l'énergie solaire.

Dans un premier temps, on étudie les pertes thermiques de la station. Pour ce calcul, on suppose négligeable la puissance fournie par le soleil à la structure de la station.

La paroi de la station est assimilée à une sphère de rayon R de centre O , constituée d'un matériau d'épaisseur $e \ll R$ et de conductivité thermique λ .

On considérera que l'extérieur de la station est de température T_e et l'intérieur à la température T_i , supposées constantes. Le régime est permanent.

- 1-a- Exprimer la loi de Fourier vérifiée par la température dans le matériau de la paroi.

- 1-b- Quelle est l'unité de λ dans le système international ?

- 1-c- Effectuer un bilan de puissance sur une calotte sphérique d'épaisseur dr et en déduire la loi de variation de la température du matériau de la paroi en fonction de T_e et T_i .

1-d- Calculer la puissance thermique P_1 échangée par la station avec l'extérieur. En déduire la résistance thermique $R_{th} = \frac{(T_i - T_e)}{P_1}$.

2- Pour assurer le chauffage, on utilise des panneaux solaires.

2-a- Le rayonnement thermique émis par le soleil est analogue à celui d'un corps noir de température T_s , égale à la température de surface de l'astre. En utilisant la loi de Wien calculez cette température.

2-b- En déduire la puissance surfacique émise par le soleil. On donne la constante de Stefan $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} SI$.

2-c- Calculer la puissance thermique P_2 reçue par la surface S d'un panneau solaire orienté perpendiculairement aux rayons solaires, situé sur la station spatiale, au voisinage de la terre, à une distance $r = 1,5 \cdot 10^{11} m$ du soleil. On donne le rayon du soleil $R = 7 \cdot 10^8 m$.

2-d- Quelle est la valeur de P_2 si la normale au panneau fait l'angle α avec les rayons solaires ?

2-e- On suppose la puissance P_1 transmise à la station avec l'efficacité ρ . En déduire la valeur minimale de S permettant de maintenir la température de la station constante.

Exercice 5 : température du sol

On considère le sol comme un milieu homogène semi-infini limité par le plan horizontal $x = 0$. La température du sol varie périodiquement : on l'écrit sous la forme : $T(0, t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$.

On appelle $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0$ où $T(x, t)$ est la température observée dans le sol à l'instant t à la profondeur x . On admet que θ est une fonction sinusoïdale du temps.

On utilisera sa représentation complexe $\underline{\theta}(x, t) = \underline{\alpha}(x) \cdot e^{i\omega t}$.

1- Que représente T_0 et θ_0 ?

2- A quelle équation différentielle satisfait $\underline{\alpha}(x)$?

3- Résoudre cette équation différentielle et donner l'expression de $\theta(x, t)$, physiquement acceptable. On en donnera son expression réelle et on fera apparaître la grandeur $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega K}}$ et on donnera sa signification physique.

4- Application : on donne pour le sol : $\rho = 3 \cdot 10^3 kg \cdot m^{-3}$; $\lambda = 1 SI$; $c = 515 J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$.

La température à la surface du sol prend sa valeur minimale de $5^\circ C$ le premier janvier et sa valeur maximale de $45^\circ C$ le premier juillet. La période de ces fluctuations est d'un an (365 jours).

4-1- calculer δ . Déterminer T_0 et θ_0 .

4-2- A quelle date la température du sol est elle maximale à la profondeur $x = 3 m$. Que vaut cette température maximale ?

Exercice 6: Réchauffement de la Terre par effet de Serre (d'après concours T 2004)

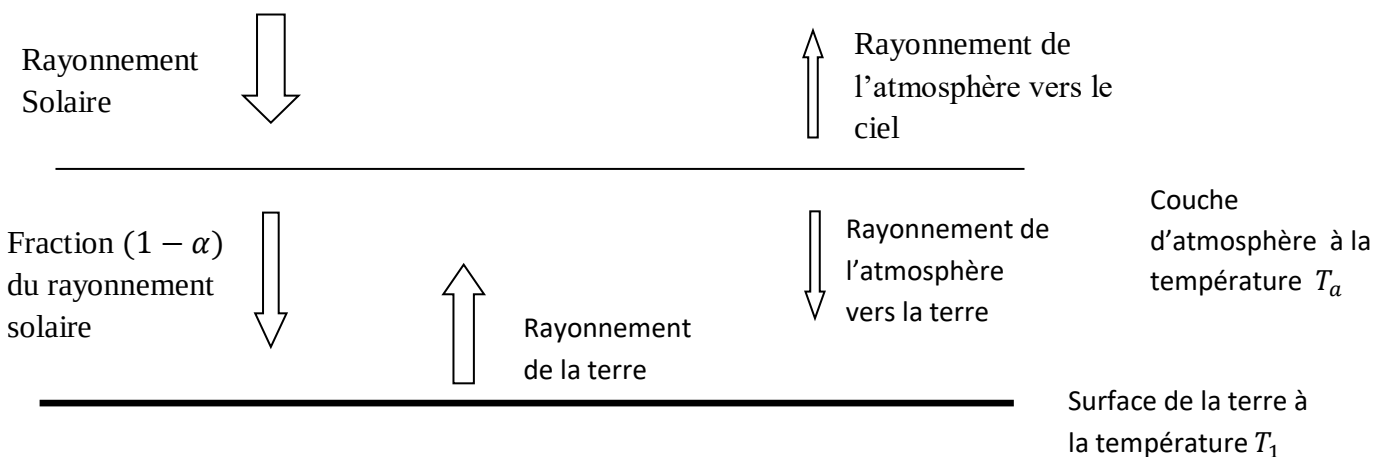
I. Rayonnement du corps noir

1- Donner la définition d'un corps noir.

2- Dans quel domaine du spectre électromagnétique la puissance émise par un corps noir de température $T_1 = 300K$ est maximale ? Même question pour $T_2 = 6000K$.

II. Température de la terre

- 3- En admettant que le soleil se comporte comme un corps noir de température T_s , exprimer la puissance totale P_s rayonnée par le soleil en fonction de T_s , R_s et σ , où R_s est le rayon du soleil, supposé sphérique et σ est la constante de Stefan.
- 4- On désigne par D la distance moyenne de la terre au soleil et par R_T le rayon de la terre supposée sphérique. Montrer que la puissance P_T reçue par la terre s'écrit :
- $$P_T = \frac{\pi \sigma R_s^2 R_T^2 T_s^4}{D^2}.$$
- 5- On suppose que la terre de température T_0 , absorbant la totalité du rayonnement solaire qu'elle reçoit, se comporte comme un corps noir. Déterminer la valeur numérique de T_0 . Commenter.
- On donne : $R_s = 7,0 \cdot 10^8 \text{ m}$; $D = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$; $T_s = 5700 \text{ K}$
- 6- En réalité, la terre est entourée par son atmosphère qu'on assimile à une couche sphérique de gaz de même centre que la terre et de température uniforme T_a . On suppose que l'épaisseur ε de la couche est négligeable devant R_T ($\varepsilon \ll R_T$) et que la couche a sensiblement le même rayon R_T que la terre. On désigne par T_1 la température de la surface de la terre en tenant compte de l'atmosphère.



On suppose, dans le modèle, schématisé que :

- la terre et l'atmosphère, de températures respectives T_1 et T_a , rayonnent comme des corps noirs.
- l'atmosphère absorbe la fraction α et la terre la fraction $(1 - \alpha)$ du rayonnement solaire.
- la terre absorbe la totalité du rayonnement de l'atmosphère vers la terre et l'atmosphère absorbe la totalité du rayonnement de la terre.

En écrivant les équations traduisant les équilibres radiatifs pour l'atmosphère et pour la terre ; exprimer la température T_1 en fonction de T_0 et α . Calculer T_1 pour $\alpha = 0,7$.