

Correction TD mécanique quantique

Exercice 1 : Particule libre

- 1- -) $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ est la densité de probabilité de présence de la particule à l'instant t dans l'intervalle de longueur dx centré au point M d'abscisse x .
 -) La probabilité de trouver la particule à l'instant t quelque part dans l'espace (ici sur $(0, \infty)$) est égale à 1 donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$.

-) La dimension de $|\psi(x, t)|^2 = L^{-1} \rightarrow \boxed{|\Psi(x, t)| \text{ est } L^{-\frac{1}{2}}}$.

2-

- a- -) On a $\rho(x) = |\Psi(x, t)|^2 = |\varphi(x)|^2$ est indépendant du temps donc l'état est stationnaire.

-) $i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \cdot \psi(x, t)$

$$i\hbar \left(-i \frac{E}{\hbar}\right) e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x) \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \varphi(x)$$

La fonction $\varphi(x)$ vérifie l'équation $\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x)}$

- b- Si $V(x) = V_0$ l'équation devient : $\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \varphi(x) = 0$
- Si $E > V_0$ la solution de cette équation est de la forme $\varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ où A et B deux constantes complexes et $k = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$.
 - Si $E < V_0$ la solution est de la forme $\varphi(x) = A'e^{qx} + B'e^{-qx}$, où A' et B' deux constantes complexes et $q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$.

- 3- La particule est libre si $V(x) = 0$, son énergie totale est égale son énergie cinétique

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}}$$

- 4- $E > 0 \rightarrow \varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ avec A et B deux constantes complexes et $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

or $\Psi(x, t) = \varphi(x) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$ donc $\Psi(x, t) = Ae^{-i(\frac{E}{\hbar} t - kx)} + Be^{-i(\frac{E}{\hbar} t + kx)} \rightarrow$

$$\Psi(x, t) = A e^{-i(\omega t - kx)} + B e^{-i(\omega t + kx)} \quad \text{donc } \omega = \frac{E}{\hbar} \text{ et } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

- 5- La solution de l'équation est une somme de deux ondes planes, le premier terme correspond à une O.P.P.H qui se propage dans le sens des x croissants. Le deuxième

terme correspond à une O.P.P.H qui se propage dans les sens des x décroissant. On a

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \text{ et } \frac{E}{\hbar} = \omega \rightarrow k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar} \rightarrow \text{la relation de dispersion } \boxed{\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}}.$$

$$\text{On a } E = \hbar\omega = \hbar \times \frac{\hbar k^2}{2m} = \frac{(\hbar k)^2}{2m} \text{ or } E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \hbar k = \frac{\hbar}{2\pi} \times \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

Cette relation est appelée relation de L. De Broglie : En MQ à chaque particule

d'impulsion p on associe une onde de longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{p}$ (dualité onde

corpuscule).

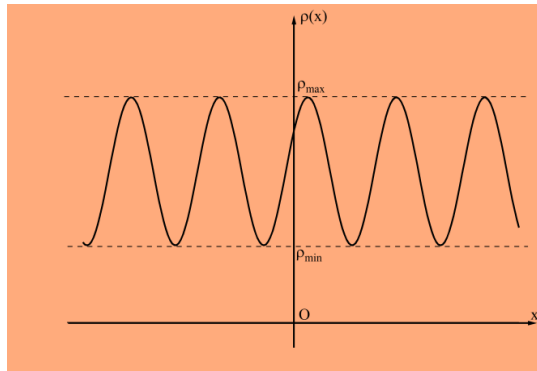
6- $\rho(x) = \psi(x, t) \cdot \psi^*(x, t) \Rightarrow$

$$\rho(x) = \left(\sqrt{\rho_1} e^{i\theta_1} \cdot e^{-i(\omega t - kx)} + \sqrt{\rho_2} e^{i\theta_2} \cdot e^{-i(\omega t + kx)} \right) \times \left(\sqrt{\rho_1} e^{-i\theta_1} \cdot e^{i(\omega t - kx)} + \sqrt{\rho_2} e^{-i\theta_2} \cdot e^{i(\omega t + kx)} \right)$$

$$\rightarrow \rho(x) = \rho_1 + \rho_2 + 2\sqrt{\rho_1\rho_2} \cos(2kx + \theta_1 - \theta_2)$$

7- $\rho_{\min} = \rho_1 + \rho_2 - 2\sqrt{\rho_1\rho_2}$

$$\rho_{\max} = \rho_1 + \rho_2 + 2\sqrt{\rho_1\rho_2}$$



La densité de probabilité varie de façon sinusoïdale il y a des zones où elle est maximale $\rho = \rho_{\max}$ et des zones où elle est minimale $\rho = \rho_{\min}$: il y a un phénomène d'interférences entre l'onde progressive et l'onde régressive.

8- $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho_1 + \rho_2 + 2\sqrt{\rho_1\rho_2} \cos(2kx + \theta_1 - \theta_2) \right) dx$ diverge $\Rightarrow$

La probabilité totale est $\neq 1$, ce qui n'est pas acceptable physiquement, la particule libre ne peut pas être présentée par une onde plane ou 2 ondes planes se propageant en sens inverse.

Il faut décrire la particule par une superposition d'ondes planes de pulsations différentes : un paquet d'ondes.

9-

a- $\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-i(\omega t - kx)} dk \Rightarrow \psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk$

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_1}^{k_2} \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} e^{ikx} dk$$

Or $k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$ et $\Delta k = k_2 - k_1 \Rightarrow k_1 = k_0 - \frac{\Delta k}{2}$ et $k_2 = k_0 + \frac{\Delta k}{2}$

Rq : $\psi(x, 0)$ est la T.F de la fonction porte (il faut trouver sinc ())

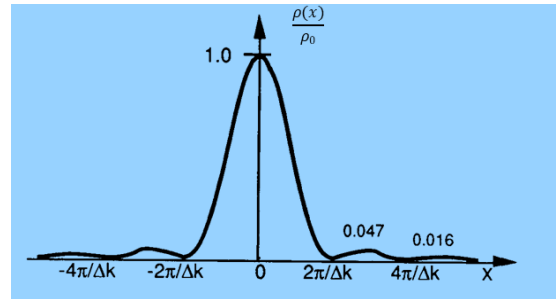
$$\begin{aligned}\psi(x, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} e^{ikx} dk = \sqrt{\frac{\Delta k}{2\pi}} \frac{1}{ix\Delta k} \left[e^{i(k_0 + \frac{\Delta k}{2})x} - e^{i(k_0 - \frac{\Delta k}{2})x} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\Delta k}{2\pi}} e^{ik_0 x} \left[\frac{e^{i(\frac{\Delta k}{2})x} - e^{-i(\frac{\Delta k}{2})x}}{2i(x\frac{\Delta k}{2})} \right] \\ \psi(x, 0) &= \sqrt{\frac{\Delta k}{2\pi}} e^{ik_0 x} \text{sinc}\left(\frac{\Delta k}{2} x\right)\end{aligned}$$

b- Pour un état **stationnaire** ρ ne dépend pas du temps $\rightarrow \rho(x) = \psi(x, 0) \cdot \psi^*(x, 0)$

$$\rho(x) = \frac{\Delta k}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta k x}{2}\right)$$

$$\rho(x) = 0 \rightarrow x_n = \frac{2n\pi}{\Delta k}, n \in \mathbb{Z}^*$$

$$\rho_0 = \rho(0) = \frac{\Delta k}{2\pi}$$



c- $\rho(x) = \frac{\Delta k}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta k x}{2}\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta k}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta k}{2} x\right) dx$$

$$\text{On pose } u = \frac{\Delta k}{2} x \rightarrow du = \frac{\Delta k}{2} dx \rightarrow dx = \frac{2}{\Delta k} du$$

si $x \rightarrow +\infty$ alors $u \rightarrow +\infty$

Et $x \rightarrow -\infty$ alors $u \rightarrow -\infty$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta k}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta k}{2} x\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta k}{2\pi} \text{sinc}^2(u) \frac{2}{\Delta k} du = 2 \times \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{sinc}^2(u) du = 1$$

Donc $\psi(x, 0)$ représente bien l'état d'une particule libre à l'instant $t = 0$, puisque le paquet d'onde est normalisable (vérifie la relation de normalisation).

d- $\Delta x = x_1 - x_{-1} = \frac{4\pi}{\Delta k} \rightarrow \Delta x \cdot \Delta k = 4\pi \rightarrow \Delta x \cdot \Delta p = 4\pi\hbar \rightarrow$ On ne peut pas mesurer simultanément avec autant de précision que l'on veut la position et la vitesse de la particule. Ceci est compatible avec l'inégalité de Heisenberg spatiale.

10- On a : $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m}$ et $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{v_g}{2}$.

Or $p = \hbar k = mv_g = mv \rightarrow v_g = v$ où v est la vitesse de la particule en mécanique classique. Donc le paquet d'onde qui se propage à la vitesse v_g représente bien la particule libre.